Université de Caen
UFR de Sciences
EXAMEN DE COMMANDE : Systèmes continus
Master Pro 2A AEII
Lundi 06 février 2006 de 8h15 à 9h45

Seul un résumé des principaux résultats de cours sur 2 pages manuscrites est autorisé.
Le résumé devra être impérativement rendu avec la copie.

Les téléphones portables et ordinateurs même éteints ne sont pas autorisés. La note finale prendra en compte la qualité de la rédaction et des justifications des réponses.

1 Obtention d'un modèle à partir d'équations physiques

Une plate-forme est montée sur un bâti avec une liaison pivot. La plate-forme est entraînée par un moteur électrique solidaire du bâti via un réducteur et un engrenage permettant d'effectuer un mouvement de rotation dans le plan horizontal. La tension appliquée au moteur est notée $u(t)$. Sur ce dispositif, on veut commander l'angle $\theta(t)$ de la plate-forme par rapport au bâti. Les équations physiques du système sont :

$$J\ddot{\theta}(t) \quad = \quad \Gamma_m(t)$$

avec $\Gamma_m(t)$ le couple généré par le moteur sur la plate-forme. Il est donné par la relation :

$$\Gamma_m(t) = \frac{K_m K_g}{R_m} u(t) - \frac{(K_m K_g)^2}{R_m} \dot{\theta}(t).$$

La signification des paramètres physiques est donnée dans le tableau 1.

Notation	
J	Inertie de l'ensemble moteur+engrenage+plate-forme
K_m	Constante électromécanique du moteur
K_g	Rapport de l'engrenage
R_m	Résistance électrique de l'induit

Table 1: Signification des paramètres physiques

Déterminer la fonction de transfert reliant l'entrée de commande u à la sortie à commander θ.

2 Le jeu des correspondance

On considère un système $G(p)$ commandé par un correcteur $C(p)$ à un degré de liberté (voir figure 1). Le module de la fonction de transfert $T_{v\to\epsilon} = GS$ en fonction de ω est représenté Figure 2. Une telle fonction de transfert peut-elle être obtenue avec un correcteur Avance de Phase ? Justifier.

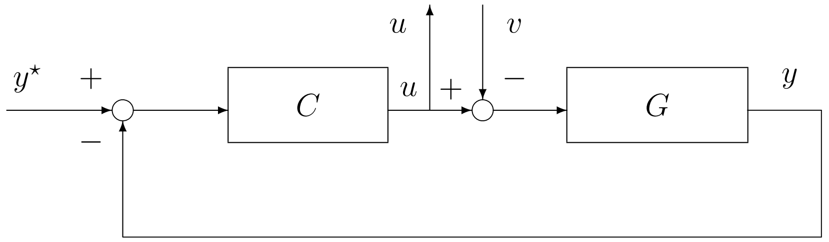

Figure 1: Système bouclé avec un correcteur à un degré de liberté

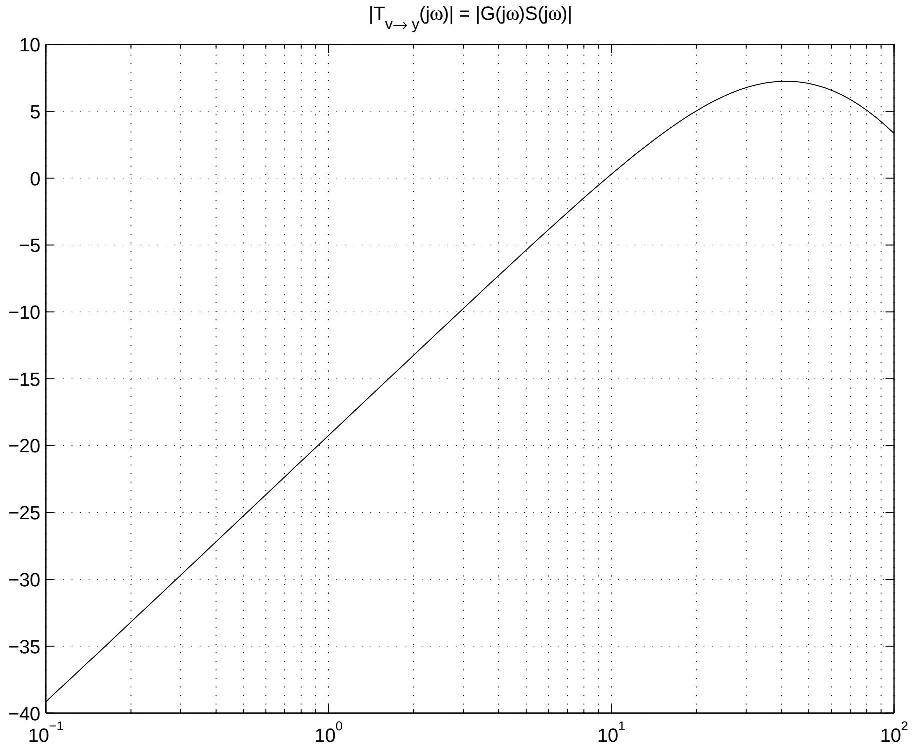

Figure 2: Module de $T_{v\rightarrow y}$

3 Correction PI modifiée

On considère un système à commander défini, avec $K > 0$ et $\tau > 0$, par :

$$Y(p) = G(p)(U(p) + V(p)) \quad \text{et} \quad G(p) = \frac{K}{p(\tau p + 1)}$$

où

- $Y(p)$ est la transformée de Laplace de la sortie du système à commander ;
- $U(p)$ est la transformée de Laplace de la commande ;
- $V(p)$ est la transformée de Laplace de la perturbation d'entrée ;

par un correcteur PI modifié défini par :

$$U(p) = k^c \left(-Y(p) + \frac{a}{p}(Y^\star(p) - Y(p)) \right)$$

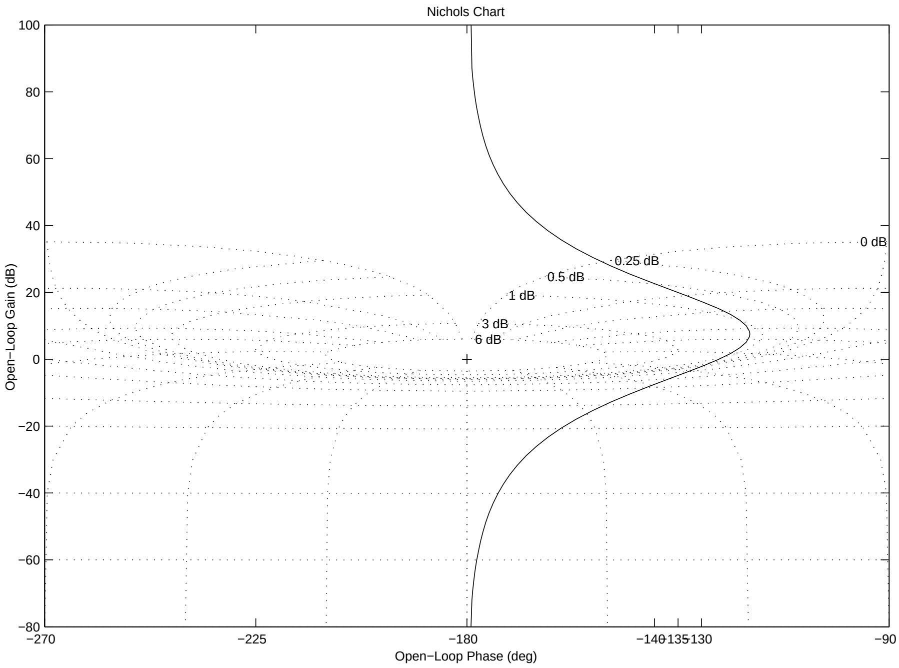

Figure 3: Diagramme de Nichols de la fonction de transfert en boucle ouverte

avec $a > 0$ et $k^c > 0$ et où $Y^\star(p)$ est la transformée de Laplace du signal de référence.

1. Représenter le schéma-bloc du système en boucle fermée avec ce correcteur.

2. Calculer les fonctions de transfert :

   - de la référence vers la sortie $T_{y^\star \to y}(p)$;
   - de la perturbation vers la sortie $T_{v \to y}(p)$;
   - de la référence vers la commande $T_{y^\star \to u}(p)$;
   - de la perturbation vers la commande $T_{v \to u}(p)$

   en fonction de K, τ, a et k_c.

3. Ce correcteur assure-t-il la poursuite d'échelon de référence en échelon et assure-t-il le rejet de perturbation en échelon ? Justifier.

4. Dans le cas où le système $G(p)$ est commandé par un correcteur PI "standard" :

$$U(p) = C(p)(Y^\star(p) - Y(p)) \quad \text{avec} \quad C(p) = k^c \frac{p + a}{p}$$

   on a :

$$T_{y^\star \to y}(p)(p) = \frac{G(p)C(p)}{1 + G(p)C(p)} \quad \text{et} \quad T_{v \to y}(p)(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)C(p)}$$

   Dans le cas où les deux correcteurs (PI modifié et PI) sont définis par les mêmes valeurs de k^c et a, comparer les fonctions de transfert en boucle fermée de la référence vers la sortie et de la perturbation vers la sortie. Quelle(s) différence(s) observez-vous ? En déduire l'intérêt du correcteur PI modifié par rapport au correcteur PI.

5. Dans le cas où le système à commander $G(p)$ est commandé par le correcteur PI modifié, donner la fonction de transfert en boucle ouverte correspondante.

6. A partir du diagramme de Nichols (Figure 3) la fonction de transfert en boucle ouverte, déterminer les marges de gain et de phase.

4 Commande par modèle interne

On désire mettre au point un correcteur par modèle interne pour le système à commander $G(p)$ (voir figure 4) :

$$G(p) = \frac{k_G}{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)}$$

avec $k_G > 0$, $\tau_1 = 0,3s$ et $\tau_2 = 0,01s$. On désire remplir le cahier des charges suivant :

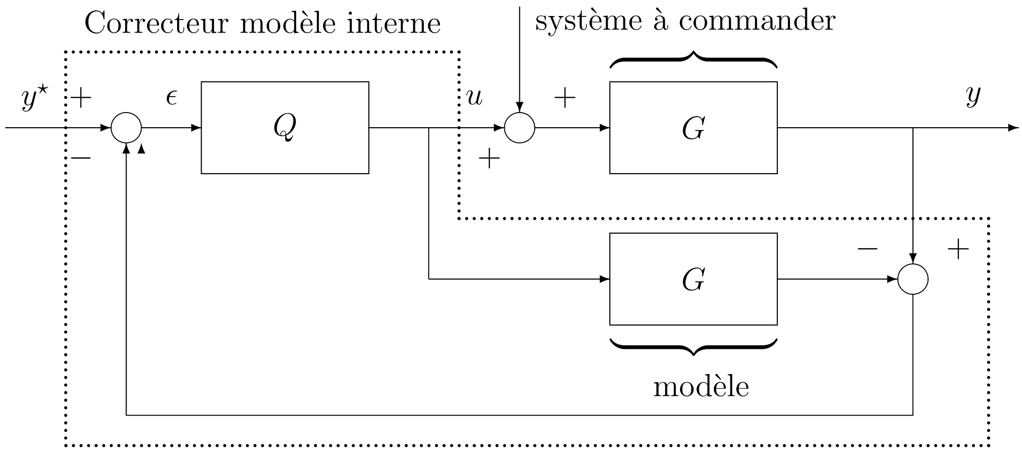

Figure 4: Structure d'un correcteur modèle interne

1. Les signaux de référence $y^\star$ considérés sont des échelons. La sortie doit tendre vers la valeur de l'échelon, sans erreur statique, avec un temps de montée de $0,1s$. L'évolution de la sortie en réponse à un signal de référence ne doit pas présenter un dépassement.

2. Les perturbations en échelon en entrée et en sortie du système sont rejetées.

3. Les amplitudes de commande doivent être raisonnables.

Questions

1. Parmi les structures de filtre $Q(p)$ suivantes, laquelle ou lesquelles choisiriez-vous pour remplir le cahier des charges. **Pour chaque possibilité, il faut justifier pourquoi elle peut être ou ne pas être choisie**.

   (a) $Q(p) = \frac{\tau_1 \tau_2}{k_G}$

   (b) $Q(p) = \frac{1}{k_G} \frac{\tau_1 p + 1}{\tau_a p + 1} \frac{\tau_2 p + 1}{(\tau_b p + 1)^2}$

   (c) $Q(p) = \frac{\tau_1 p + 1}{\tau_a p + 1}$

   (d) $Q(p) = \frac{1}{k_G} \frac{p + \frac{1}{\tau_1}}{p + \frac{1}{\tau_a}}$

(e) $Q(p) = \dfrac{1}{k_G}\dfrac{\tau_1 p + 1}{\tau_a p + 1}\dfrac{1}{\tau_b p + 1}$

(f) $Q(p) = \dfrac{p + \dfrac{1}{\tau_1}}{p + \dfrac{1}{\tau_1}}\dfrac{1}{\tau_b p + 1}$

(g) $Q(p) = \dfrac{1}{k_G}$

2. Déterminer les différents paramètres de la structure choisie pour $Q(p)$.

5 Amélioration de la poursuite par un correcteur PI

On considère un système à commander du troisième ordre :

$$Y(p) = G(p)U(p) \quad \text{et} \quad G(p) = \frac{8}{(p+1)^3}$$

par un correcteur PI à un degré de liberté défini par :

$$U(p) = C(p)(Y^\star(p) - Y(p)) \quad \text{où} \quad C(p) = k^c \frac{p+a}{p}$$

avec $k^c = 0.042$ et $a = 0.66$. On rappelle que : $T_{y^\star \to y}(p) = \dfrac{G(p)C(p)}{1 + G(p)C(p)}$.

A : Analyse de la poursuite par le correcteur PI

1. Donner une estimation du temps de réponse à un échelon de $T_{y^\star \to y}(p)$. Indice : Les racines du polynôme $p^4 + 3p^3 + 3p^2 + 1.336p + 0.222$ sont -1.58, $-0.50 \pm 0.30\sqrt{-1}$ et -0.41.

B : Amélioration du temps de réponse

On désire diminuer le temps de réponse en poursuite du système en boucle fermée. Pour cela, on considère dans cette section le correcteur suivant :

$$U(p) = C(p)(F(p)Y^\star(p) - Y(p)) \quad \text{où} \quad C(p) = k^c \frac{p+a}{p}$$

où $k^c = 0.042$ et $a = 0.66$ et où $F(p)$ est une fonction de transfert à déterminer.

1. Calculer la fonction de transfert de la référence vers la sortie $T_{y^\star \to y}(p)$ en fonction de $F(p)$.

2. En déduire une fonction de transfert $F(p)$ propre qui permet de compenser le pôle de la fonction de transfert $T_{y^\star \to y}(p)$ qui correspond à la dynamique la plus lente.