Université de Caen
EXAMEN DE COMMANDE : Automatique continue
DESS AEII
mercredi 18 février 2004 de 16h à 17h
CORRIGE CORRIGE CORRIGE CORRIGE CORRIGE CORRIGE CORRIGE CORRIGE

Seul un résumé des enseignements sur 4 pages manuscrites est autorisé.
Les téléphones portables même éteints ne sont pas autorisés. La note finale prendra en compte la qualité de la rédaction et des justifications des réponses.

1 Commande pour le rejet de perturbation

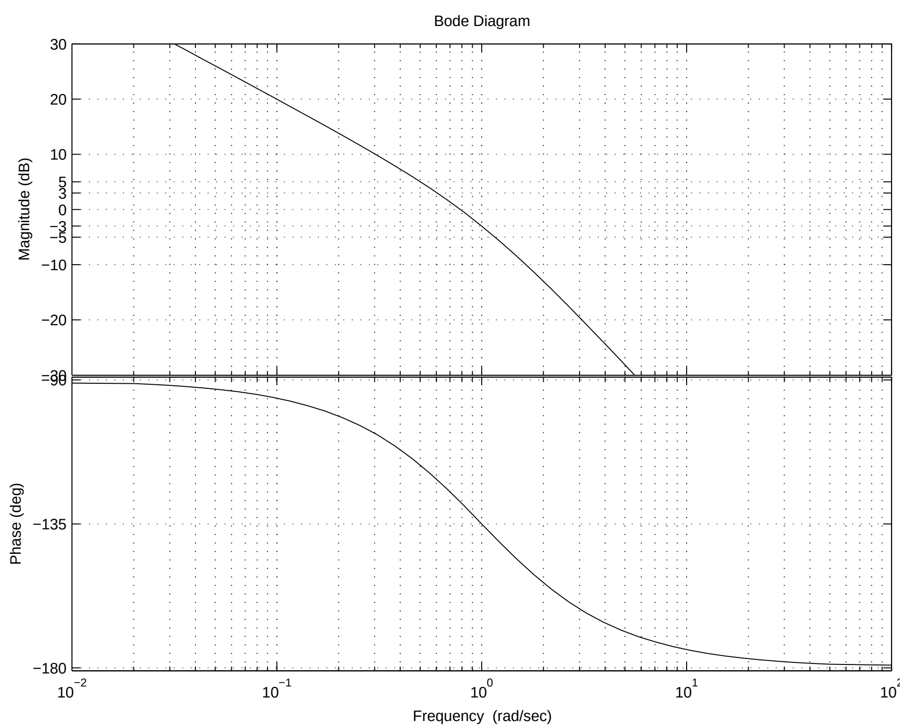

Figure 1: Diagramme de Bode de $G(p) = \dfrac{k_G}{p(\tau_G p + 1)}$

On considère le système $G(p)$ défini par :

$$Y(p) = G(p)U(p) \quad \text{et} \quad G(p) = \frac{k_G}{p(\tau_G p + 1)}$$

avec $k_G = 1$ et $\tau_G = 1\ s$.

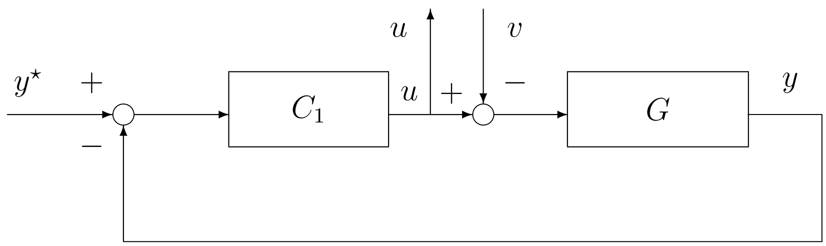

Figure 2: système bouclé avec un correcteur à un degré de liberté

1. **Etude du rejet de perturbation du système commandé par un correcteur proportionnel** :

$$U(p) = C_1(p)(Y^\star(p) - Y(p)) \quad C_1(p) = k_C$$

où $y^\star$ est le signal de consigne.

(a) Calculer $T_{y^\star \to y}$ et $T_{v \to y}$.

$$T_{y^\star \to y}(p) = \frac{G(p)C_1(p)}{1 + G(p)C_1(p)} = \frac{k_G k_C}{\tau_1 p^2 + p + k_G k_C}$$

et

$$T_{v \to y}(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)C_1(p)} = \frac{k_G}{\tau_1 p^2 + p + k_G k_C}$$

(b) Des perturbations v en échelon, en entrée du système, sont-elles rejetées ? Justifier en quelques mots.
non car $T_{v \to y}(0) \neq 0$

(c) La poursuite d'échelon de référence est-elle assurée ?
oui car $T_{y^\star \to y}(1) = 1$

(d) A partir du diagramme de Bode de $G(p)$ (figure 1), déterminer la valeur de k_C qui assure une marge de phase de 45 degrés et une marge de gain supérieur à 6 dB.

Pour $\omega_c = 1\ rad/s$, $\arg(G(j\omega_c) = 135$ degrés. Comme $|G(j\omega_c)| = -3$ dB, $k_C = 10^{\frac{3}{20}} = 1.4125$. La marge de gain est infinie car $\arg(G(j\omega_c) > -180$ degrés.

(e) Pour un signal de réference en échelon, calculer le temps du premier maximum ainsi que le dépassement en % de la sortie pour k_C déterminé dans la question précédente.

Le polynome caractéristique est donné par $p^2 + \frac{1}{\tau_1}p + \frac{k_G k_C}{\tau_1}$. D'où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_G k_C}{\tau_1}} = 1.19$ rad/s et $\xi = \frac{1}{2sqrt\tau_1 k_G k_C} = 0.42$:

$$D_1 = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 23\%$$

et

$$t_m = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} = 2.9\ s$$

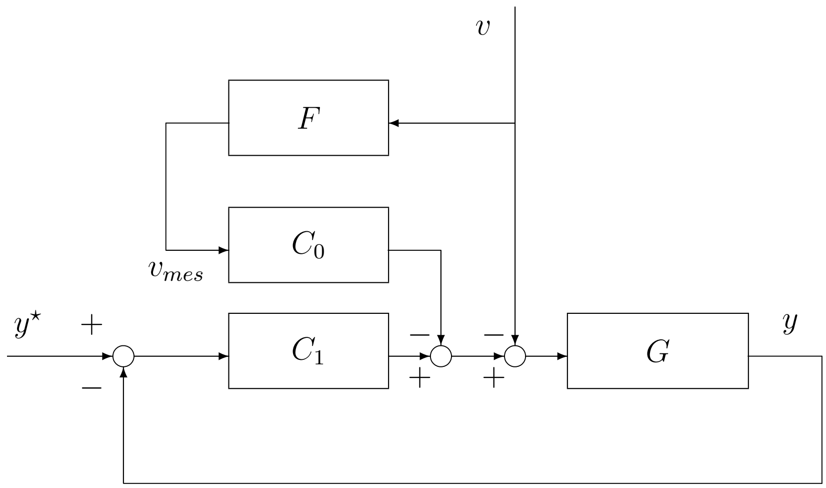

Figure 3: système bouclé par un correcteur avec mesure de la perturbation

2. **Rejet de perturbation mesuré** On suppose qu'une mesure v_{mes} du signal de perturbation v est disponible :

$$V_{mes}(p) = F(p)V(p) \quad \text{avec} \quad F(p) = \frac{1}{\tau_{cap}p + 1}$$

où $\tau_{cap} = 10\,s$. Pour assurer le rejet de perturbation, le correcteur est maintenant défini par:

$$U(p) = C_1(p)(Y^\star - Y(p)) - C_0(p)V_{mes}(p)$$

où

- $C_1(p) = 1$;
- $C_0(p)$ est une fonction de transfert à déterminer.

(a) Calculer la fonction de transfert $T_{v\to y}(p)$ en fonction de $C_0(p)$.

$$T_{v\to y}(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)C_1(p)}(1 + C_0(p)F(p)) = \frac{k_G}{\tau_1 p^2 + p + k_G k_C}(1 + C_0(p)F(p))$$

(b) Quelle condition doit satisfaire $C_0(p)$ pour assurer le rejet de la perturbation d'entrée v ?

$T_{v\to y}(0) = 0$ soit $1 + C_0(0)F(0) = 0$ soit $C_0(0) = \frac{-1}{F(0)}$

(c) On décide de choisir pour $C_0(p)$ un gain constant. Déterminer sa valeur pour assurer le rejet de perturbation.

(d) Quel est approximativement le temps de rejection de perturbation ?

$$T_{v\to y}(p) = \frac{-k_G\tau_{cap}}{\tau_1}\frac{p}{(\tau_{cap}p + 1)(p^2 + \frac{1}{\tau_1}p + \frac{k_G k_C}{\tau_1})}$$

La dynamique la plus lente correspond au pôle du premier ordre : le temps de rejet sera donc de l'ordre de 30 s

(e) On considère maintenant la fonction de transfert :

$$C_0(p) = k_0 \frac{\tau_3 p + 1}{\tau_2 p + 1}.$$

Choisir k_0 pour assurer le rejet de perturbation. On choisit $\tau_3 = \tau_{cap}$ et $\tau_2 = 0.01\,s$ pour assurer un rejet de perturbation en échelon avec une dynamique inférieure à $10\,s$. Justifier ce choix.

Pour assurer la rejection, il faut que $k_0 = -1$. A ce moment-là

$$T_{v \to y}(p) = \frac{-k_G \tau_2}{\tau_1} \frac{p}{p^2 + \dfrac{1}{(\tau_2 p + 1)(p^2 + \frac{1}{\tau_1} p + \frac{k_G k_C}{\tau_1})}}$$

2 Commande d'un double intégrateur

On considère le système $G(p)$ défini par :

$$Y(p) = G(p)U(p) \quad \text{et} \quad G(p) = k_G \frac{p+b}{p^2}$$

avec $k_G = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $b = 1$.

1. Tracer le diagramme de Bode asymptotique de $G(p)$
2. Peut-on commander ce système par un correcteur PI :

$$U(p) = k \frac{p+a}{p}$$

   pour assurer un temps de réponse :

   (a) $t_r = 300\ s$?

   (b) $t_r = 0.3\ s$?

   Justifier en quelques mots.

3 Le jeu des correspondances

On donne

1. le diagramme de Bode de deux correcteurs (figure 4) ;
2. les modules de la fonction de transfert $T_{v \to \epsilon} = GS$ pour les deux systèmes bouclés obtenus avec les deux correcteurs précédents mais pas forcement dans le même ordre (figure 5) ;
3. le rejet de perturbation d'entrée en échelon pour les deux systèmes bouclés obtenus avec les deux correcteurs précédents mais pas forcement dans le même ordre (figure 6).

Indiquer quel correcteur correspond à quelle fonction de transfert et quel correcteur correspond à quelle réponse temporelle. **Les réponses devront être justifiées.**

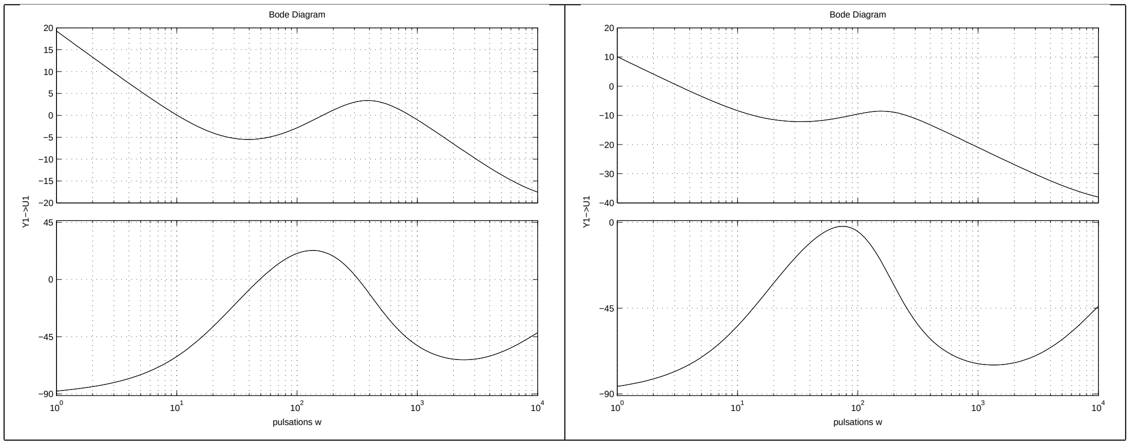

Figure 4: Diagramme de Bode du correcteur 1 (gauche) et du correcteur 2 (droite)

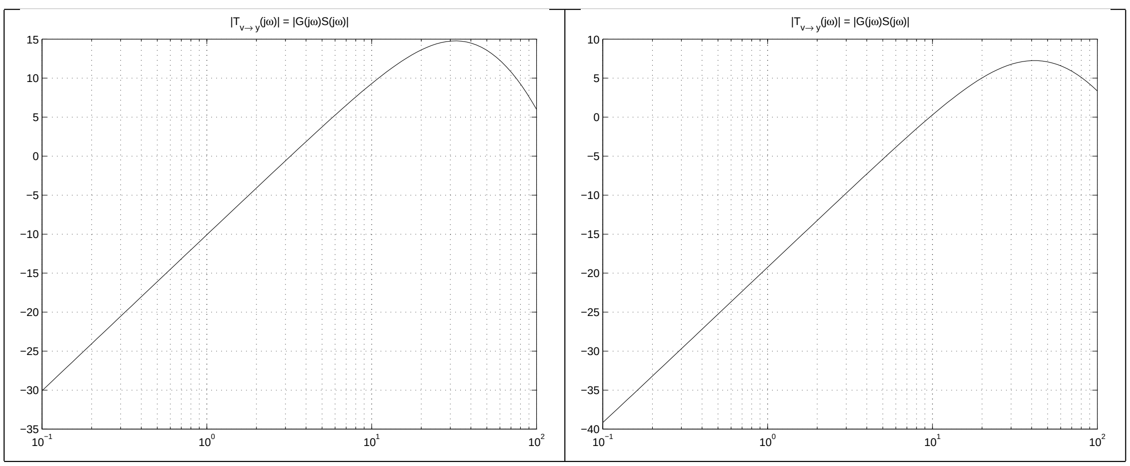

Figure 5: Module de $T_{v\to y}$ numéro 1 (gauche) et numéro 2 (droite)

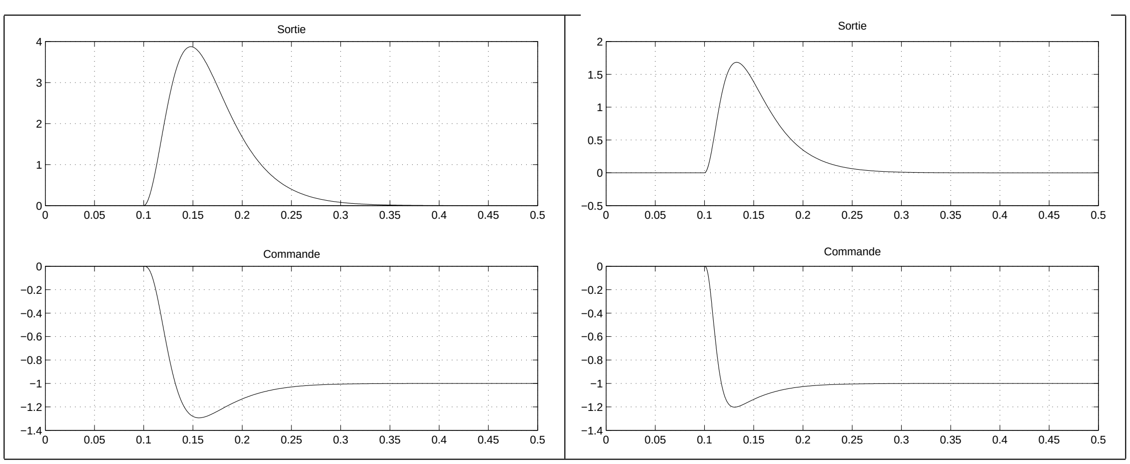

Figure 6: Rejet de perturbation numéro 1 (gauche) et numéro 2 (droite)