

Méthodes multiniveau algébriques pour les éléments d'arête

Application à l'électromagnétisme

Ronan Perrussel

Institut Camille Jordan - Centre de Génie Électrique de Lyon
Sous la direction de F. Musy (ICJ), L. Nicolas (CEGELY) et M. Schatzman (ICJ)

Soutenance de thèse - le 27 octobre 2005



Équations pour les phénomènes électromagnétiques

Point de départ

Modélisation numérique des phénomènes électromagnétiques.

- Le **système fondamental** des équations de Maxwell :

$$\text{Loi de Faraday : } \operatorname{rot} \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0, \quad (1a)$$

$$\text{Loi d'Ampère : } \operatorname{rot} \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} = \mathbf{J}, \quad (1b)$$

$$\text{Loi de Gauss magnétique : } \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1c)$$

$$\text{Loi de Gauss électrique : } \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (1d)$$

- Les **lois de comportement**, principalement d'origine phénoménologique :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \text{et} \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (2)$$

Écriture du problème et discrétisation

- Écriture “générique” des problèmes à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E} \text{ tel que :} \\ \text{rot } \nu \text{ rot } \mathbf{E} + \gamma \mathbf{E} = f, \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} = g \text{ sur } \Gamma_D \text{ et } \nu \text{ rot } \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \delta \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) \text{ sur } \Gamma_I. \end{array} \right. \quad (3)$$

ν toujours strictement positif, γ dépend de l'application envisagée : strictement positif, nul, partie imaginaire non nulle.

- Diverses techniques de discrétisation envisageables :
 - différences finies (répandues pour les phénomènes transitoires),
 - éléments de frontière,
 - éléments finis volumiques.

Orientation choisie : éléments finis volumiques spécifiques à l'électromagnétisme, les **éléments finis d'arête**.

Système linéaire à résoudre

- Le calcul de la solution amène à des systèmes linéaires de la forme :

$$Au = b, \text{ avec } A = S_\nu + M_\gamma + M_{\delta, \Gamma_I}, \quad (4)$$

$$(S_\nu)_{ij} = \int_{\Omega} \nu \operatorname{rot} \lambda_j^h \cdot \operatorname{rot} \lambda_i^h, \quad (M_\gamma)_{ij} = \int_{\Omega} \gamma \lambda_j^h \cdot \lambda_i^h,$$

$$(M_{\delta, \Gamma_I})_{ij} = \int_{\Gamma_i} \delta(\lambda_j^h \times \mathbf{n}) \cdot (\lambda_i^h \times \mathbf{n}).$$

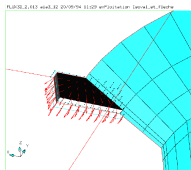
- Systèmes linéaires de **grande taille** mais creux.
- Systèmes linéaires symétriques; les autres propriétés dépendent essentiellement du paramètre γ .

Objectif de ce travail

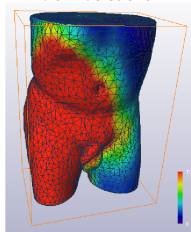
Déterminer des méthodes itératives de résolution multiniveau pour le système linéaire (4) :

- performantes,
- adaptées à l'opérateur $\operatorname{rot} \nu \operatorname{rot}$,
- sans interventions sur le code de calcul actuel : "boîte noire".

Applications envisagées



CND par courants
de Foucault.



Hyperthermie RF.

- Problème de **magnétostatique**. Introduction du potentiel vecteur magnétique : $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$.

$$\text{rot } \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{J}. \quad (5)$$

- Problème de **courants de Foucault**. Élimination des courants de déplacements.

$$\text{rot } \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} + \sigma \partial_t \mathbf{A} = \mathbf{J}_g. \quad (6)$$

- **Équation vectorielle des ondes**.

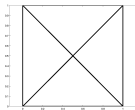
$$\text{rot } \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{E} + \epsilon \partial_t^2 \mathbf{E} + \sigma \partial_t \mathbf{E} = \langle \text{source} \rangle. \quad (7)$$

NB : régime harmonique avec $\mathbf{A} = \text{Re} \left(\hat{\mathbf{A}} \exp(i\omega t) \right)$.

Plan de l'exposé

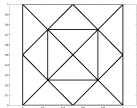
- 1 Méthodes multiniveau pour les équations de Maxwell
 - Principe des méthodes multigrille géométriques
 - Principe des méthodes multiniveau algébriques
- 2 Technique algébrique pour le calcul des opérateurs de prolongement
 - Formulation d'un problème de minimisation
 - Résolution du problème de minimisation
- 3 Fonctionnement de la méthode sur quelques exemples
 - Construction des différents éléments
 - Résultats
- 4 Conclusion

Principes généraux multigrille



- Méthode itérative de résolution de systèmes linéaires.
- Méthode multigrille géométrique classique fondée sur une **hiérarchie de maillages emboîtés**.
- Idée : Résolution sur la maillage le plus fin avec l'utilisation des grilles les plus grossières pour le calcul.
- Traitement de l'erreur :
 - partie oscillante - représentée et traitée sur le maillage le plus fin,
 - partie lisse - traitée sur le maillage grossier.

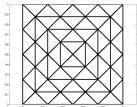
Principes généraux multigrille



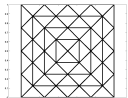
- Méthode itérative de résolution de systèmes linéaires.
- Méthode multigrille géométrique classique fondée sur une **hiérarchie de maillages emboîtés**.
- Idée : Résolution sur la maillage le plus fin avec l'utilisation des grilles les plus grossières pour le calcul.
- Traitement de l'erreur :
 - partie oscillante - représentée et traitée sur le maillage le plus fin,
 - partie lisse - traitée sur le maillage grossier.

Principes généraux multigrille

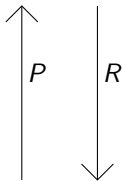
- Méthode itérative de résolution de systèmes linéaires.
- Méthode multigrille géométrique classique fondée sur une **hiérarchie de maillages emboîtés**.
- Idée : Résolution sur la maillage le plus fin avec l'utilisation des grilles les plus grossières pour le calcul.
- Traitement de l'erreur :
 - partie oscillante - représentée et traitée sur le maillage le plus fin,
 - partie lisse - traitée sur le maillage grossier.



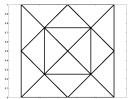
Méthode à deux grilles



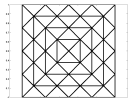
A_h, b_h, u_h, r_h



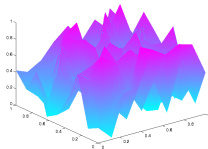
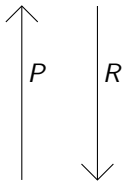
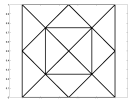
A_H, θ_H, r_H



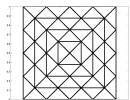
Méthode à deux grilles



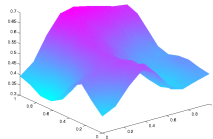
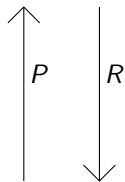
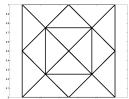
Pré-lissage

1 ou 2 itérations $\Rightarrow u_h^{i+1/3}$ A_h, b_h, u_h, r_h  A_H, θ_H, r_H 

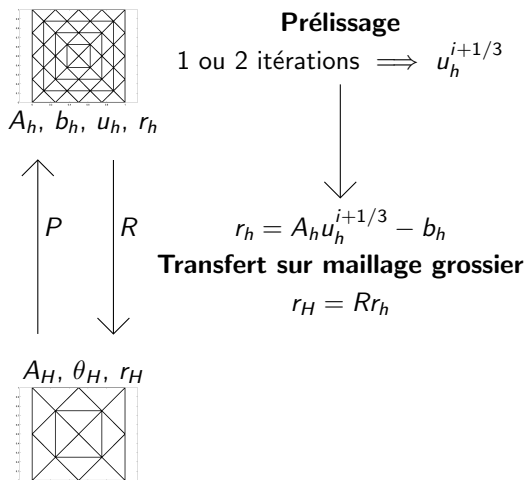
Méthode à deux grilles



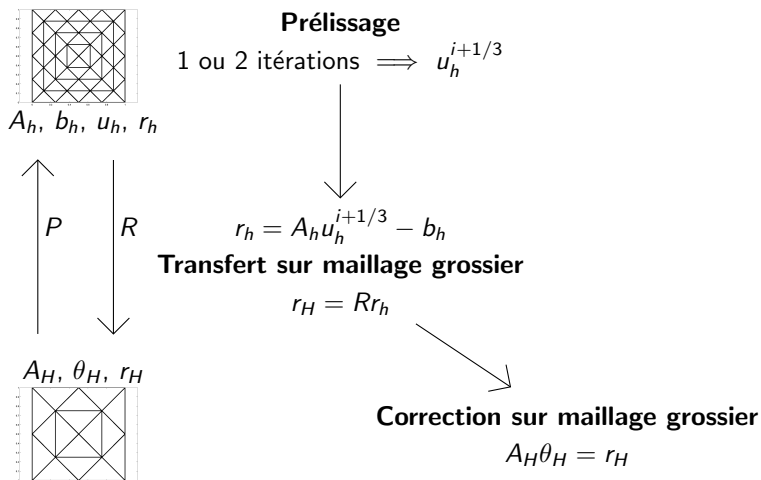
Préissage

1 ou 2 itérations $\Rightarrow u_h^{i+1/3}$ A_h, b_h, u_h, r_h  A_H, θ_H, r_H 

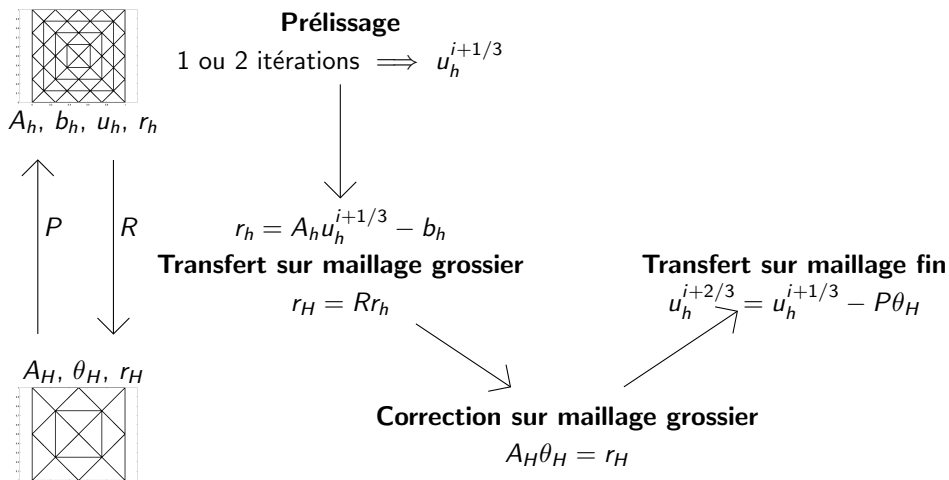
Méthode à deux grilles



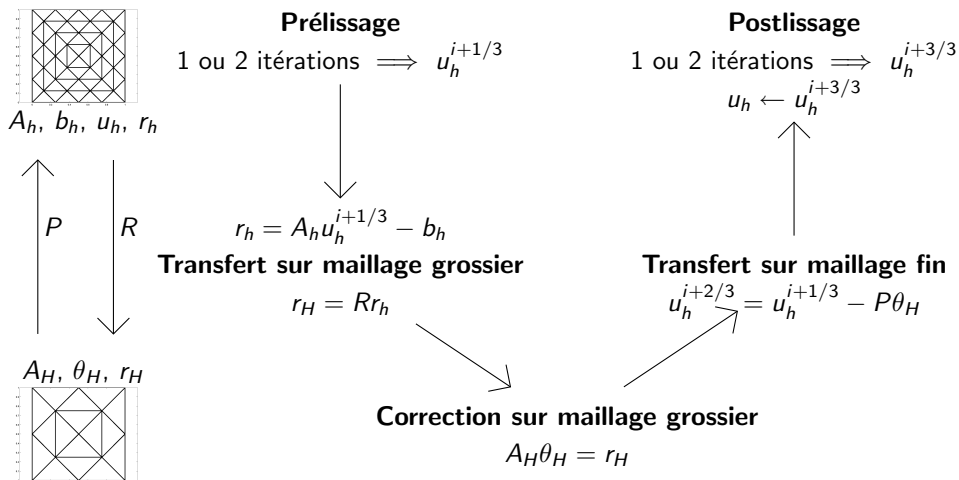
Méthode à deux grilles



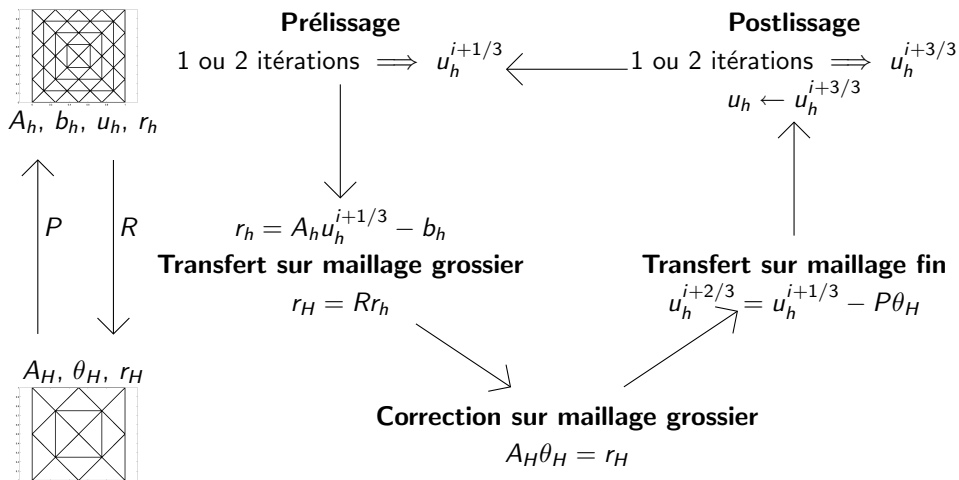
Méthode à deux grilles



Méthode à deux grilles



Méthode à deux grilles



Éléments requis par la méthode

Pour mettre en oeuvre les méthodes à deux grilles, 3 éléments sont requis :

- le lisseur : il atténue la partie oscillante de l'erreur au niveau fin.
- Les matrices de transfert P et R : R transfère la partie de l'erreur non traitée par le lisseur vers le niveau grossier et P transfère la correction du niveau grossier vers le niveau fin.
NB : Souvent $R = P^t$.
- La matrice A_H du problème au niveau grossier.

Si la matrice A_H devient grande, on peut appliquer de manière récursive la méthode à deux grilles et obtenir un algorithme multigrille.

Particularités pour les équations de Maxwell

Deux espaces d'éléments finis considérés :

- l'espace d'éléments **nodaux** $\mathcal{W}^0(\mathcal{T})$ inclus dans $H^1(\Omega)$: éléments finis P_1 -Lagrange. Degrés de liberté : valeurs aux sommets du maillage. Base associée $(\phi_p^h)_{p \in \{1, \dots, N^h\}}$.
- L'espace d'éléments **d'arête** $\mathcal{W}^1(\mathcal{T})$ inclus dans $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$: éléments de Nédélec d'ordre le plus bas. Degrés de liberté : circulations le long des arêtes du maillage. Base associée $(\lambda_i^h)_{i \in \{1, \dots, E^h\}}$.

Propriété importante venant des espaces continus $(\text{grad}(H^1(\Omega)) \subset \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega))$:

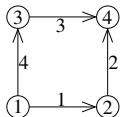
$$\text{grad } \phi_p^h = \sum_{i=1}^{E^h} G_{ip}^h \lambda_i^h, \quad \forall p \in \{1, \dots, N^h\}. \quad (8)$$



Particularités pour les équations de Maxwell

Deux espaces d'éléments finis considérés :

- l'espace d'éléments **nodaux** $\mathcal{W}^0(\mathcal{T})$ inclus dans $H^1(\Omega)$: éléments finis P_1 -Lagrange. Degrés de liberté : valeurs aux sommets du maillage. Base associée $(\phi_p^h)_{p \in \{1, \dots, N^h\}}$.
- L'espace d'éléments **d'arête** $\mathcal{W}^1(\mathcal{T})$ inclus dans $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$: éléments de Nédélec d'ordre le plus bas. Degrés de liberté : circulations le long des arêtes du maillage. Base associée $(\lambda_i^h)_{i \in \{1, \dots, E^h\}}$.



Propriété importante venant des espaces continus $(\text{grad}(H^1(\Omega)) \subset \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega))$:

$$G^h = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{grad } \phi_p^h = \sum_{i=1}^{E^h} G_{ip}^h \lambda_i^h, \quad \forall p \in \{1, \dots, N^h\}. \quad (8)$$



Lisseur pour les équations de Maxwell

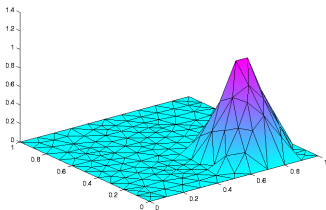
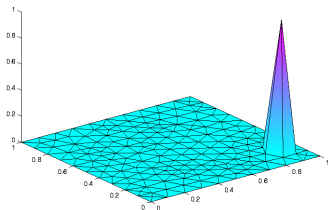
- Dans le cas de l'opérateur Laplacien, quelques itérations de Jacobi relaxée ou de Gauss-Seidel fournissent un lissage adapté.
- Dans le cas de l'opérateur $\text{rot } \nu \text{ rot}$, on constate que ces algorithmes ne traitent pas les composantes dans le noyau de l'opérateur rot alors que la dimension de ce sous-espace est proportionnelle au nombre de noeuds (la dimension du noyau pour grad est 1).
- Pour résoudre cette difficulté, Hiptmair (1997) a proposé un algorithme hybride qui ajoute au traitement classique sur le système global un **traitement spécifique pour le noyau de l'opérateur rot**.

Construction des opérateurs de transfert

Outre le lisseur, la méthode multiniveau repose sur la construction des différents niveaux. Au niveau grossier, l'espace d'approximation est décrit par une base de fonctions grossières $(w_n^H)_n$. On impose l'inclusion de l'espace d'approximation grossier dans l'espace fin, c'est-à-dire :

$$w_n^H = \sum_{p=1}^{N^h} P_{pn} w_p^h, \quad \forall n \in \{1, \dots, N^H\}.$$

P est la matrice de prolongement entre le niveau fin et le niveau grossier.



Construction des opérateurs de transfert

- Si on dispose d'une hiérarchie de maillages emboîtés, c'est la méthode multigrille géométrique et l'inclusion des espaces d'éléments finis sur les différents maillages est garantie par construction.
- Si l'on ne dispose pas de cette hiérarchie et que l'on connaît les informations pour un unique niveau (fin), on doit définir une **stratégie algébrique** pour construire P .

La matrice du système au niveau grossier est définie de la manière suivante :

$$A_H = P^t A_h P$$


et il n'est donc nécessaire que de calculer la matrice de prolongement P . On répète alors récursivement la procédure pour la méthode algébrique.

Particularités pour les équations de Maxwell

- Les espaces grossiers nodal et d'arête sont inclus dans les espaces fins :

$$\phi_n^H = \sum_{p=1}^{N^h} P_{pn}^{\text{nod}} \phi_p^h, \quad \forall n \in \{1, \dots, N^H\},$$

$$\lambda_e^H = \sum_{i=1}^{E^h} P_{ie}^{\text{are}} \lambda_i^h, \quad \forall e \in \{1, \dots, E^H\}.$$

- Pour utiliser les mêmes lisseurs que dans le cas géométrique, on souhaite vérifier au niveau grossier  :

$$\text{grad } \phi_n^H = \sum_{e=1}^{E^H} G_{en}^H \lambda_e^H, \quad \forall n \in \{1, \dots, N^H\}. \quad (9)$$

$(\phi_n^H)_{n=1\dots N^H}$ est la base nodale grossière et $(\lambda_e^H)_{e=1\dots E^H}$ est la base d'arête grossière.

Particularités pour les équations de Maxwell

La relation (9) est implicite pour le multigrille géométrique.

On souhaite la conserver pour les méthodes algébriques développées, c'est-à-dire définir un graphe grossier dont la matrice d'incidence G^H sera utilisée dans cette relation.

En regroupant les relations précédentes, on obtient **la relation de commutativité** :

$$P^{\text{are}} G^H = G^h P^{\text{nod}}.$$

G^h décrit le graphe fin, P^{nod} est la matrice de prolongement nodal calculée par des méthodes connues.

A définir ou calculer :

G^H et la matrice de prolongement en arête P^{are} .

Remarque sur le calcul de P^{nod}

Les méthodes multiniveau algébriques développées pour le Laplacien fournissent des opérateurs P^{nod} vérifiant les conditions requises par notre construction.

En particulier elles construisent une décomposition du domaine Ω en sous-domaines $(\Omega_n^H)_{n=1, \dots, N^H}$ se recouvrant telle que :

$$\text{supp } \phi_n^H \subset \overline{\Omega_n^H}$$

Cela revient à imposer des coefficients nuls dans la n -ième colonne de P^{nod} .

Graphe grossier et supports des fonctions

Après avoir calculé la matrice de prolongement P^{nod} :

- Définition d'un graphe grossier ou de manière équivalente de la matrice d'incidence arête-noeud grossière G^H .

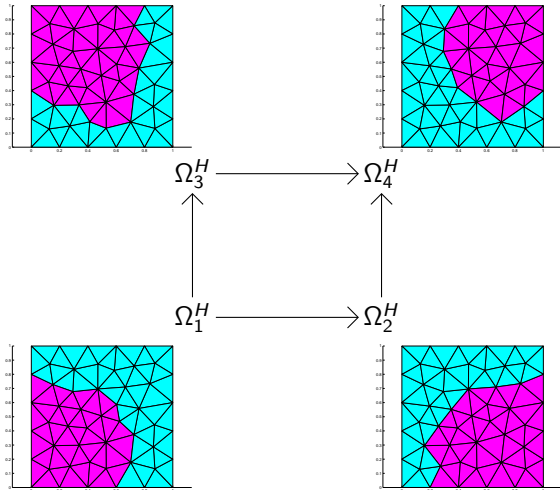
Pour une arête grossière d'extrémités les noeuds grossiers n et m , on s'assure que $\Omega_n^H \cap \Omega_m^H \neq \emptyset$.

- Une fonction d'arête grossière λ_e^H est associée à chaque arête grossière e et $\text{supp } \lambda_e^H \subset \overline{\Omega_n^H \cap \Omega_m^H}$.

Comme pour P^{nod} , cela revient à imposer des coefficients nuls dans la e -ième colonne de P^{are} .

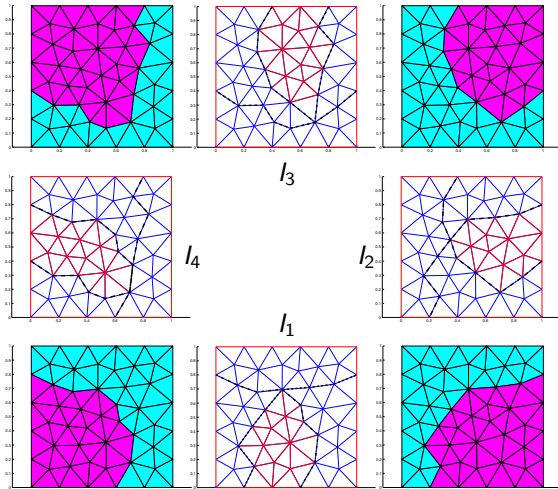
I_e : Ensemble contenant les indices des coefficients non nuls de la e -ième colonne de P^{are} .

Illustrations



$$G^H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Illustrations



$$G^H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Formulation finale

- Reitzinger et Schöberl (2000) ont proposé une technique pour construire algébriquement des matrices de prolongement nodal et d'arête vérifiant la relation de commutativité $P^{\text{are}} G^H = G^h P^{\text{nod}}$. Leur approche a été réalisée pour un opérateur de prolongement P^{nod} particulier qui conduit à une unique matrice P^{are} vérifiant la relation de commutativité.
- Nous avons souhaité étendre leur approche à d'autres constructions de l'opérateur P^{nod} . Plusieurs matrices P^{are} peuvent alors vérifier la relation de commutativité et on doit se doter de règles supplémentaires pour faire un choix judicieux.

Formulation finale

Idee provenant des techniques en éléments finis nodaux : contraintes sur le support (conservation de l'aspect creux des matrices) + minimisation d'une fonctionnelle d'énergie + contraintes d'approximation.

Problème de minimisation sous contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } P^{\text{are}} \text{ minimisant } \sum_{e=1}^{E^H} \beta_e^t K_e \beta_e, \\ \text{sous les contraintes : } P^{\text{are}} G^H = G^h P^{\text{nod}}. \end{array} \right.$$

- β_e : vecteur contenant les coefficients non-nuls de la e -ième colonne de P^{are} , c.-à-d. ceux indexés par I_e .
- K_e : matrice locale symétrique définie positive. L'ensemble de ces matrices définit la fonctionnelle d'énergie pour la minimisation.

Approches pour la résolution

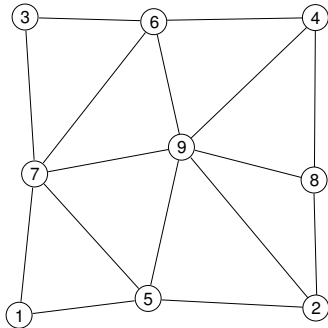
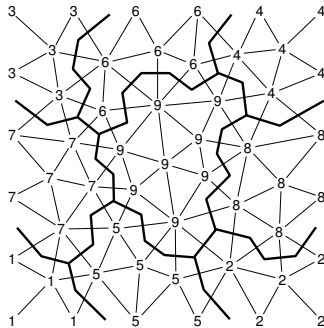
Plusieurs approches ont été envisagées pour la résolution du problème de minimisation sous contraintes :

- la première utilise des **multiplicateurs de Lagrange**. Elle a permis de valider le problème de minimisation sous contraintes; cependant elle est peu économique en terme de coût de calcul.
- La seconde, plus originale, s'appuie sur la **résolution d'une suite de problèmes sur des sous-graphes du graphe grossier** et a permis de réduire le coût de calcul.

Sous-graphes $\mathcal{S}^{H,i}$

$\mathcal{S}^{H,i}$: graphe défini pour toute arête fine i telle qu'il existe un indice e avec $i \in I_e$.

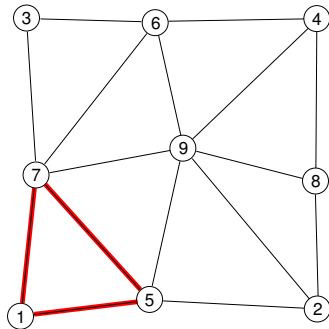
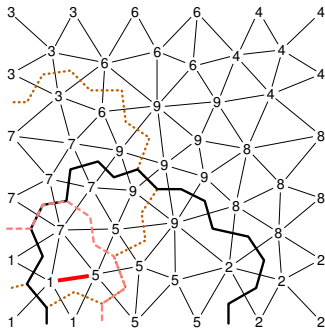
Il correspond au sous-graphe du graphe grossier obtenu en conservant uniquement les arêtes grossières d'indice e telles que $i \in I_e$.



Sous-graphes $\mathcal{S}^{H,i}$

$\mathcal{S}^{H,i}$: graphe défini pour toute arête fine i telle qu'il existe un indice e avec $i \in I_e$.

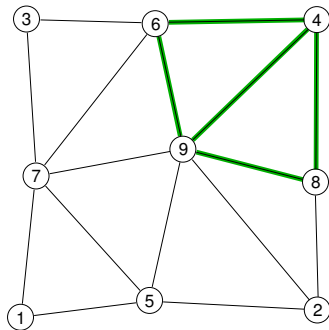
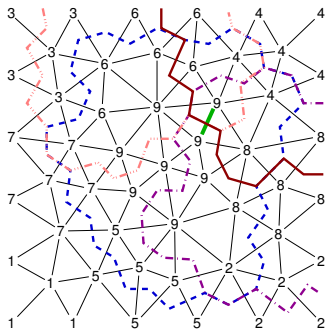
Il correspond au sous-graphe du graphe grossier obtenu en conservant uniquement les arêtes grossières d'indice e telles que $i \in I_e$.



Sous-graphes $\mathcal{S}^{H,i}$

$\mathcal{S}^{H,i}$: graphe défini pour toute arête fine i telle qu'il existe un indice e avec $i \in I_e$.

Il correspond au sous-graphe du graphe grossier obtenu en conservant uniquement les arêtes grossières d'indice e telles que $i \in I_e$.



Problèmes de flot

- Nous avons montré que résoudre $P^{\text{are}} G^H = G^h P^{\text{nod}}$ est équivalent à résoudre sur chaque sous-graphe $\mathcal{S}^{H,i}$ un problème de flot :

$$(G^{H,i})^t P_i^{\text{are}} = (G^h P^{\text{nod}})_i.$$

- **À déterminer** : P_i^{are} vecteur contenant les composantes de la i -ème ligne de P^{are} indexées par les indices des arêtes de $\mathcal{S}^{H,i}$.
- **Information connue** : $(G^h P^{\text{nod}})_i$, vecteur contenant les composantes de la i -ème ligne de $G^h P^{\text{nod}}$ indexées par les indices des noeuds de $\mathcal{S}^{H,i}$.

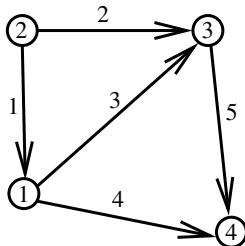
Résolution des problèmes de flot

Forme de la solution du problème de flot :

$$P_i^{\text{are}} = (P_i^{\text{are}})' + (P_i^{\text{are}})''.$$

où :

- $(P_i^{\text{are}})'$ est une solution particulière du problème de flot, déterminée grâce à un **arbre couvrant** du sous-graphe,
- $(P_i^{\text{are}})''$ appartient au noyau de $(G^{H,i})^t$ qui est engendré par les **cycles indépendants** du sous-graphe.



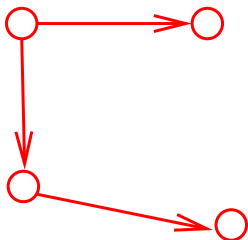
Résolution des problèmes de flot

Forme de la solution du problème de flot :

$$P_i^{\text{are}} = (P_i^{\text{are}})' + (P_i^{\text{are}})''.$$

où :

- $(P_i^{\text{are}})'$ est une solution particulière du problème de flot, déterminée grâce à un **arbre couvrant** du sous-graphe,
- $(P_i^{\text{are}})''$ appartient au noyau de $(G^{H,i})^t$ qui est engendré par les **cycles indépendants** du sous-graphe.



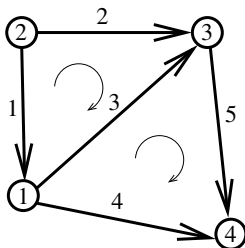
Résolution des problèmes de flot

Forme de la solution du problème de flot :

$$P_i^{\text{are}} = (P_i^{\text{are}})' + (P_i^{\text{are}})''.$$

où :

- $(P_i^{\text{are}})'$ est une solution particulière du problème de flot, déterminée grâce à un **arbre couvrant** du sous-graphe,
- $(P_i^{\text{are}})''$ appartient au noyau de $(G^{H,i})^t$ qui est engendré par les **cycles indépendants** du sous-graphe.



Système linéaire pour la minimisation

Après détermination des solutions particulières, le problème de minimisation se ramène à la résolution d'un système de la forme :

$$B^t D B \Gamma = -B^t D \widetilde{P}^{\text{are}},$$

où :

- Γ est le vecteur dont les composantes sont les coefficients des $(P_i^{\text{are}})''$ dans les bases des noyaux de $(G^{H,i})^t$,
- la matrice B regroupe les vecteurs de base de ces noyaux,
- la matrice D est diagonale par blocs où les blocs diagonaux sont les matrices K_e qui définissent la fonctionnelle d'énergie,
- le vecteur $\widetilde{P}^{\text{are}}$ regroupe les solutions particulières $(P_i^{\text{are}})'$ des problèmes de flot.

Propriétés du système linéaire

- Les matrices K_e étant définie positive, B^tDB est symétrique définie positive et l'on peut résoudre par la méthode du gradient conjugué.
- Dépendant du choix des K_e , le conditionnement de D peut être fortement dépendant de la dimension globale du problème.
- Cependant, si D est la matrice identité, le conditionnement de B^tB est faible et indépendant de la dimension globale du problème.

On note en outre qu'une grande précision n'est pas nécessaire pour la résolution de ce système puisque ce n'est qu'un travail préparatoire à la résolution du système initial.

La solution retenue, quelle que soit la précision, vérifie toujours la relation de commutativité.

Définition des Ω_n^H et de G^H

- Partition des noeuds du graphe (initialement du maillage) :

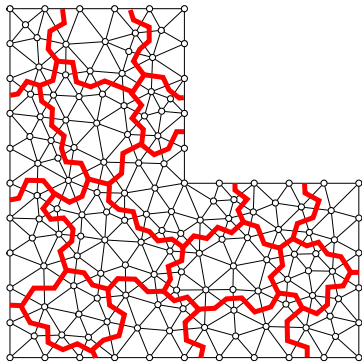
$$\{1, \dots, N^h\} = \bigcup_{n=1}^{N^h} H_n.$$

Définition de sous-domaines $(\tilde{\Omega}_n^H)_{n=1, \dots, N^h}$:

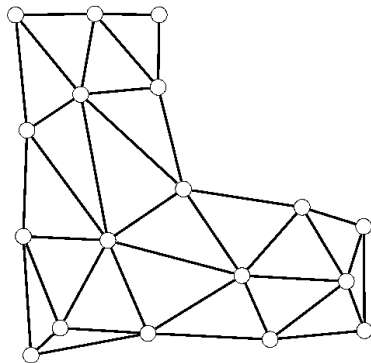
$$\tilde{\Omega}_n^H = \bigcup_{p \in H_n} \text{supp}(\phi_p^h).$$

- Création d'une arête grossière e d'extrémité n, m ssi $\tilde{\Omega}_n^H \cap \tilde{\Omega}_m^H \neq \emptyset$.
- Sous-domaine Ω_n^H défini en étendant $\tilde{\Omega}_n^H$ à ces plus proches voisins. Sans ce recouvrement, on ne dispose pas de degrés de liberté pour la minimisation et on retombe sur la méthode de Reitzinger et Schöberl (méthode RS).

Définition des Ω_n^H et de G^H

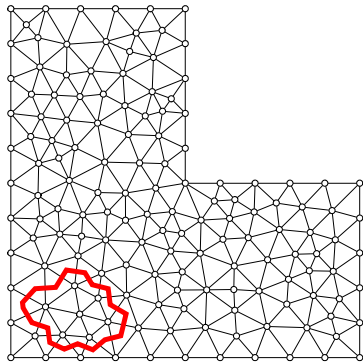


Graphe initial

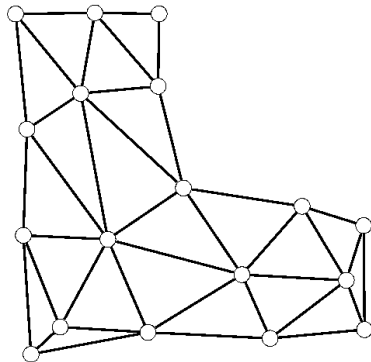


Représentation du graphe grossier

Définition des Ω_n^H et de G^H

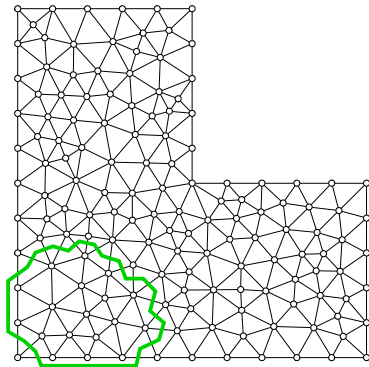


Graphes initial

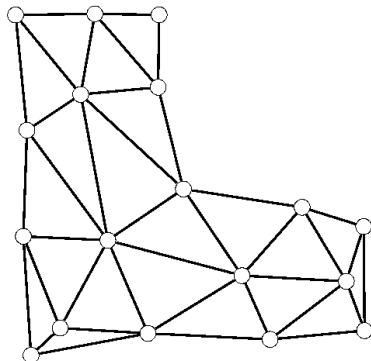


Représentation du graphes grossier

Définition des Ω_n^H et de G^H



Graphe initial



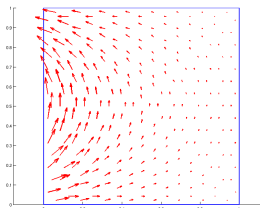
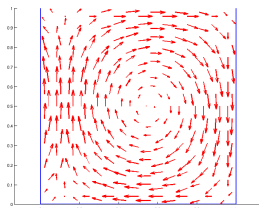
Représentation du graphe grossier

Choix pour les matrices K_e

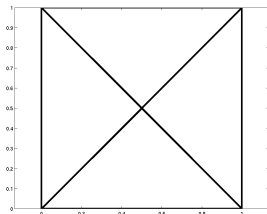
- Matrices extraites de la matrice globale K du problème; ce choix est noté K dans les tableaux de résultats,
- Matrices extraites de S_ν , la partie provenant de la discrétisation de $\int_{\Omega} \nu \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}'$; ce choix est noté S_ν dans les tableaux de résultats.
- Matrices toutes égales à l'identité; ce choix est noté Id.

Problèmes étudiés 2D

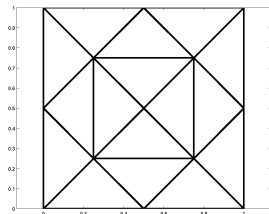
- $\Omega =]0; 1[{}^2$.
- Composante tangentielle du champ imposée sur le bord gauche avec $\mathbf{E}_y = \sin(2\pi y)$. Sur le reste de la frontière : $(\text{rot } \mathbf{E}) \times \mathbf{n} = 0$.
- Coefficient constant sur le domaine avec les équations suivantes :
 - Simple essai : $\text{rot rot } \mathbf{E} + \mathbf{E} = 0$.
 - Cavité en régime harmonique : $\text{rot rot } \mathbf{E} - \omega^2 \mathbf{E} = 0$ avec $\omega = 1.5\pi$.


 $\gamma = 1$

 γ avec $\omega = 1.5\pi$

Maillages utilisés



Maillage initial τ_0^h



Premier raffinement τ_1^h

Pour les maillages τ_i^h , i indique le nombre de raffinement.

NB : Les méthodes algébriques opèrent comme si le maillage était non structuré.

Résolution du système linéaire de minimisation

	τ_2^h	τ_3^h	τ_4^h	τ_5^h	τ_6^h	τ_7^h
Taille SL minimisation	62	253	1016	4081	16355	65479
Taille SL initial	100	392	1552	6176	24640	98432

Table: Nombre d'inconnues pour le système linéaire de minimisation et le système linéaire initial — 2D, maillages structurés.

Le nombre d'inconnues pour la minimisation représente à peu près les 2/3 du nombre d'inconnues du système à résoudre.

Résolution du système linéaire de minimisation

Résolution du problème de minimisation avec une méthode de gradient conjugué non préconditionné.

	τ_2^h	τ_3^h	τ_4^h	τ_5^h	τ_6^h	τ_7^h
K	24	19	12	12	12	12
S_ν	14	12	12	12	12	12
Id	3	1	1	1	1	1

Table: Nombre d'itérations pour la résolution du système linéaire de minimisation (division du résidu par 10^3) — 2D, maillages structurés.

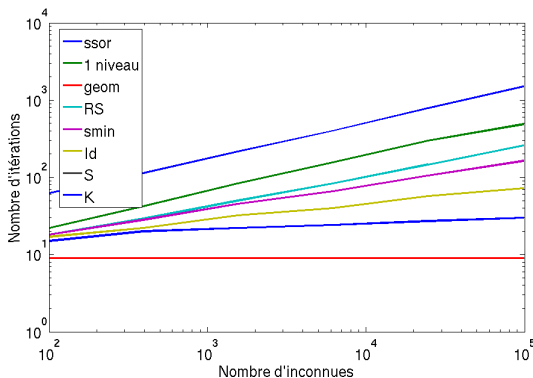
- Résultats donnés uniquement au niveau le plus fin.
- Nombre d'itérations indépendant de la dimension globale du système.

Résolution du système linéaire initial - Cas 1

- Gradient conjugué préconditionné avec une méthode multiniveau utilisant le lisseur de Hiptmair.
- Critère d'arrêt : division par 10^{10} de la norme du résidu.

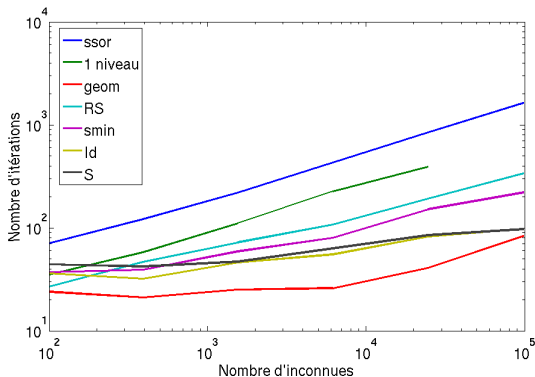
geom : multigrille géométrique. ssor : Gauss-Seidel symétrique.

smin : utilise uniquement les solutions particulières des problèmes de flot.



Résolution du système linéaire initial - Cas 2

- Détérioration générale des résultats avec $\gamma = -(1.5\pi)^2$.
- Les résultats des méthodes multiniveau développées demeurent meilleures que la méthode RS.



Problème étudié 3D

- Discrétisation d'un problème de courants de Foucault en régime temporel dans le cube unité. La discrétisation temporelle est réalisée par un schéma Euler implicite.
- Paramètres : $\gamma = \sigma$ avec σ conductivité électrique et $\nu = \Delta t / \mu$ avec Δt le pas de temps et μ la perméabilité relative. Avec les paramètres choisis, cela donne $\gamma = 10^4$ et $\nu = 20\pi$.
- Le maillage est non structuré, on impose juste le diamètre maximal h_{\max} pour les éléments du maillage.

Résolution du système linéaire de minimisation

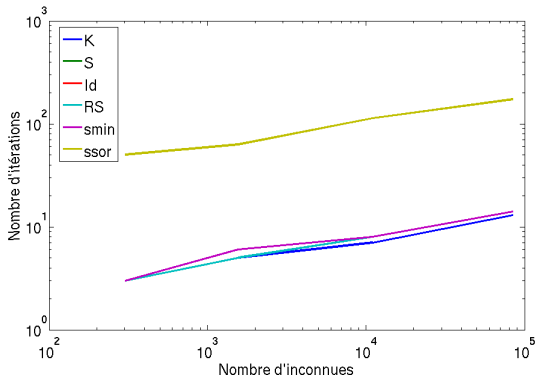
	$h_{\max}=0.4$	0.2	0.1	0.05
Taille SL initial	302	1559	11037	84403
Taille SL minimisation	447	2910	25540	209087
Itérations GC K	4	8	13	26
Itérations GC S_ν	5	11	13	22
Itérations GC Id	3	5	5	6

Ici, l'algorithme du gradient conjugué est arrêté dès que la norme du résidu a été divisé par 10.

Hormis pour l'identité, le nombre d'itérations est dépendant de la dimension globale du problème.

Résolution du système initial

Pas de différences entre les différentes approches multiniveau.



Bilan

- Description d'un cadre et d'une méthodologie pour la construction d'opérateurs de prolongement vérifiant la relation de commutativité.
- Proposition d'un processus de minimisation pour optimiser ce choix.
- Comportement quasi-optimal dans les cas les plus simples.

Perspectives

Première étape

Résoudre des problèmes réalistes 3D et pour cela implémenter un code de calcul rapide et robuste.

Améliorations envisageables

- Introduction d'autres techniques de construction de graphe grossier.
Exemple : utilisation de l'agglomération d'éléments pour définir une topologie grossière.
- Dans des cas difficiles, optimisation de bases déjà construites.
Exemple : bases provenant des méthodes multigrilles géométriques.

Perspectives

Spécificités pour l'équation vectorielles des ondes

- Utilisation de lisseurs spécifiques aux équations d'ondes.
Proposition de point de départ : développement réalisé autour de GMRES pour l'équation de Helmholtz.
- Couplage avec des méthodes de décomposition de domaines.
Proposition de point de départ : méthode de Schwarz sans recouvrement avec coefficient de transmission optimisé pour l'équation des ondes.
- Prise en compte de conditions aux limites pour la modélisation en milieu ouvert plus compliquées telles P.M.L. ou formulations intégrales.