

# Résolution des systèmes linéaires provenant de la discrétisation des équations de Maxwell en régime harmonique par une méthode Galerkin Discontinu.

Ronan Perrussel

Équipe CAIMAN, INRIA Sophia Antipolis

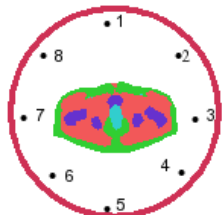
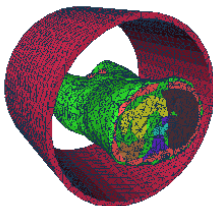
Le 29 Juin 2006

# Motivation

## Hyperthermie locale par ondes électromagnétiques

Traitement d'une tumeur cancéreuse par élévation locale de la température dans cette tumeur.

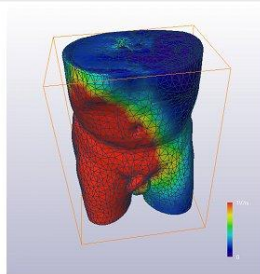
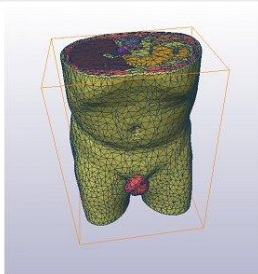
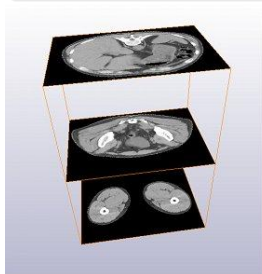
Moyen : utilisation d'un champ électromagnétique radio-fréquences ou micro-ondes.



# Motivation

## Planification thérapeutique

- 1 Segmentation des coupes scanners,
- 2 Maillage du corps,
- 3 Calcul électromagnétique et thermique + optimisation des paramètres.



# Calcul électromagnétique

- Équation aux dérivées partielles considérée :

$$\begin{cases} (i\omega\epsilon + \sigma)\mathbf{E} - \text{rot } \mathbf{H} = -\mathbf{J}_{\text{imp}}, \\ i\omega\mu\mathbf{H} + \text{rot } \mathbf{E} = 0. \end{cases}$$

- Autres caractéristiques :
  - milieu ouvert.
  - antennes : termes sources en courant, internes au domaine.
  - matériaux linéaires isotropes à fréquence donnée.
  - géométrie complexe (maillage non structuré) et milieu hétérogène.

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Formulation et discrétisation
- 3 Résolution et préconditionnement du système linéaire
- 4 Conclusion et perspectives

# Système d'équations considéré

## Problème de diffraction - champ total

$$\begin{cases} (i\omega G_0 + G'_0)\mathbf{W} + G_x \partial_x \mathbf{W} + G_y \partial_y \mathbf{W} + G_z \partial_z \mathbf{W} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ (M_{\Gamma_m} - G_n)\mathbf{W} = 0 & \text{sur } \Gamma_m, \\ (M_{\Gamma_a} - G_n)(\mathbf{W} - \mathbf{W}_{\text{inc}}) = 0 & \text{sur } \Gamma_a. \end{cases}$$

- Champ électromagnétique inconnu  $\mathbf{W}$  :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}$$

- Propriétés des différents milieux :

$$G_0 = \begin{pmatrix} \epsilon I_3 & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \mu I_3 \end{pmatrix} \text{ et } G'_0 = \begin{pmatrix} \sigma I_3 & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}.$$

## Système d'équations considéré

- Produits vectoriels avec les vecteurs  $\mathbf{e}_l$ ,  $l$  dans  $\{x, y, z\}$  :

$$G_l = \begin{pmatrix} O_{3 \times 3} & N_{\mathbf{e}_l} \\ N_{\mathbf{e}_l}^t & O_{3 \times 3} \end{pmatrix}.$$

- Produit vectoriel avec le vecteur  $\mathbf{n}$  :

$$G_{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} O_{3 \times 3} & N_{\mathbf{n}} \\ N_{\mathbf{n}}^t & O_{3 \times 3} \end{pmatrix} \text{ avec } N_{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{n}_z & -\mathbf{n}_y \\ -\mathbf{n}_z & 0 & \mathbf{n}_x \\ \mathbf{n}_y & -\mathbf{n}_x & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi définir  $G_{\mathbf{n}}^+$ ,  $G_{\mathbf{n}}^-$  et  $|G_{\mathbf{n}}|$  :

$$|G_{\mathbf{n}}| = \begin{pmatrix} N_{\mathbf{n}} N_{\mathbf{n}}^t & O_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & N_{\mathbf{n}}^t N_{\mathbf{n}} \end{pmatrix}$$

- Prise en compte des conditions aux limites :

$$M_{\Gamma_m} = \begin{pmatrix} O_{3 \times 3} & N_{\mathbf{n}} \\ -N_{\mathbf{n}}^t & O_{3 \times 3} \end{pmatrix} \text{ et } M_{\Gamma_a} = |G_{\mathbf{n}}|.$$

## Problème local

- Produit scalaire de la formulation forte et intégration sur un élément  $K$  du maillage  $\mathcal{T}_h$  pour obtenir :

$$\int_K (i\omega G_0 + G'_0) \mathbf{W} \cdot \bar{\mathbf{V}} dx + \int_K \sum_{l \in \{x,y,z\}} G_l \partial_l(\mathbf{W}) \cdot \bar{\mathbf{V}} dx = 0.$$

- Passage à l'opérateur adjoint, on fait apparaître le **flux principal**  $\Phi_{\partial K}$  :

$$\int_K (i\omega G_0 + G'_0) \mathbf{W} \cdot \bar{\mathbf{V}} dx - \int_K \mathbf{W} \cdot \sum_{l \in \{x,y,z\}} G_l \partial_l(\bar{\mathbf{V}}) dx + \int_{\partial K} \Phi_{\partial K}(\mathbf{W}) \cdot \bar{\mathbf{V}} ds = 0.$$



# Problème local

## Possible définition du flux principal

$$\Phi_{\partial K}(\mathbf{W}) = \begin{cases} I_{FK} S_F \llbracket \mathbf{W} \rrbracket + I_{FK} G_{n_F} \{ \mathbf{W} \} & \text{si } F \in \Gamma^0, \\ \frac{1}{2} (M_{F,K} \mathbf{W} + I_{FK} G_{n_F} \mathbf{W}) & \text{si } F \in \Gamma^m, \\ \frac{1}{2} (M_{F,K} + I_{FK} G_{n_F}) \mathbf{W} & \text{si } F \in \Gamma^a. \\ -\frac{1}{2} (M_{F,K} - I_{FK} G_{n_F}) \mathbf{W}_{\text{inc}} & \end{cases}$$

- Pour la face  $F$  intersection de  $K$  et  $\tilde{K}$  :

$$\llbracket \mathbf{W} \rrbracket = I_{FK} \mathbf{W}_K + I_{F\tilde{K}} \mathbf{W}_{\tilde{K}} \text{ et } \{ \mathbf{W} \} = \frac{1}{2} (\mathbf{W}_K + \mathbf{W}_{\tilde{K}}).$$

- Notation  $I_{FK}$  : prise en compte de l'orientation de l'élément  $K$  par rapport à la face  $F$ .

## Quelques flux numériques

- Pour le choix du **flux centré**,  $S_F = 0$  et sur les frontières :

$$M_{F,K} = \begin{cases} I_{FK} \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & N_{\mathbf{n}_F} \\ -N_{\mathbf{n}_F}^t & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} & \text{si } F \text{ appartient à } \Gamma^m, \\ |G_{\mathbf{n}_F}| & \text{si } F \text{ appartient à } \Gamma^a. \end{cases}$$

- Pour le choix du **flux décentré du premier ordre** :

$$S_F = \begin{pmatrix} \alpha_F^E N_{\mathbf{n}_F} N_{\mathbf{n}_F}^t & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \alpha_F^H N_{\mathbf{n}_F}^t N_{\mathbf{n}_F} \end{pmatrix}$$

avec  $\alpha_F^E = 1$  et  $\alpha_F^H = 1$  si le matériau est homogène. Pour  $F$  appartenant à  $\Gamma^m$  :

$$M_{F,K} = \begin{pmatrix} \eta_F N_{\mathbf{n}_F} N_{\mathbf{n}_F}^t & I_{FK} N_{\mathbf{n}_F} \\ -I_{FK} N_{\mathbf{n}_F}^t & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

## Quelques flux numériques

- Pour le choix de décentrement suivant l'une des variables uniquement → **méthode Galerkin Discontinu localisé** :

$$S_F = \tau_F h_F^{-1} \begin{pmatrix} N_{\mathbf{n}_F} N_{\mathbf{n}_F}^t & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

et pour  $F$  appartenant à  $\Gamma^m$  :

$$M_{F,K} = \begin{pmatrix} \eta_F h_F^{-1} N_{\mathbf{n}_F} N_{\mathbf{n}_F}^t & I_{FK} N_{\mathbf{n}_F} \\ -I_{FK} N_{\mathbf{n}_F}^t & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}.$$

## Choix du flux numérique adéquat

$k$  : Ordre des approximations polynomiales utilisées.

- Ordre de convergence asymptotique théorique de l'erreur en norme  $L^2$  pour **Maxwell elliptique** avec une solution régulière :

flux	centrée	decentrée	pénalisation du champ $\mathbf{E}$
champ $\mathbf{E}$	$k$	$k + 1/2$	$k + 1$
champ $\mathbf{H}$	$k$	$k + 1/2$	$k$

- Résultats disponibles pour le **problème harmonique** :
  - uniquement pour des problèmes de cavité,
  - résultats optimaux pour des méthodes de pénalisation intérieure et de type Galerkin Discontinu localisé.

## Résultats partiels en 2D

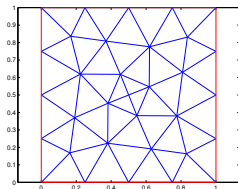
- Cas 2D. Onde transverse électrique :
  - $\mathbf{E}_z = \mathbf{H}_x = \mathbf{H}_y = 0$ ,
  - Travail dans le plan  $(O, x, y)$ , plus de dépendance suivant  $z$ .
- Peu de modifications dans l'écriture formelle. À noter néanmoins :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \\ \mathbf{H}_z \end{pmatrix} \text{ et } N_{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_y \\ \mathbf{n}_x \end{pmatrix}.$$

- Onde plane incidente dans le vide :

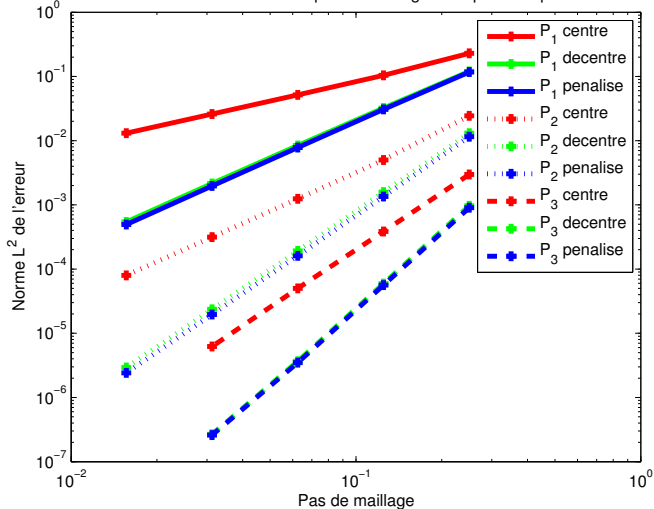
$$\exp(-\omega x)(0, 1, 1)^t.$$

- $\Omega = ]0; 1[^2$ ,  $\Gamma_a = \partial\Omega$  et  $\omega = 2\pi$ .
- Maillage initial non structuré puis raffinement uniforme.

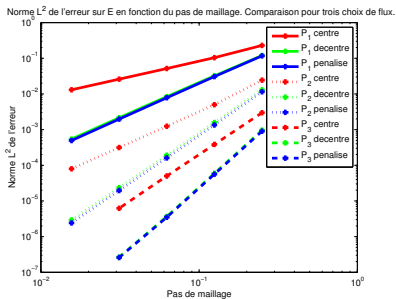


# Résultats partiels en 2D

Norme  $L^2$  de l'erreur sur E en fonction du pas de maillage. Comparaison pour trois choix de flux.



# Résultats partiels en 2D

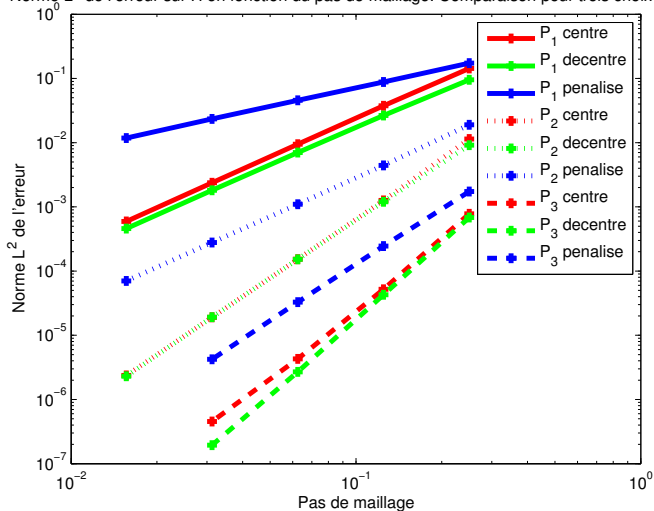


Champ **E**. Approximation de l'ordre de convergence.

	$P_1$	$P_2$	$P_3$
Centré	1.03	2.05	2.97
<b>E pénalisé</b>	<b>1.97</b>	<b>3.05</b>	<b>3.93</b>
Décentré	<b>1.93</b>	<b>3.03</b>	<b>3.95</b>

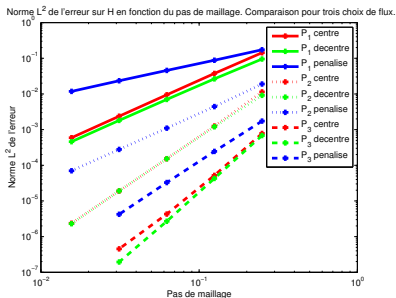
# Résultats partiels en 2D

Norme  $L^2$  de l'erreur sur H en fonction du pas de maillage. Comparaison pour trois choix de flux.





# Résultats partiels en 2D



Champ **H**. Approximation du l'ordre de convergence.

	$P_1$	$P_2$	$P_3$
Centré	1.98	3.05	3.58
<b>E</b> pénalisé	0.97	2.02	2.89
Décentré	1.93	2.99	3.93

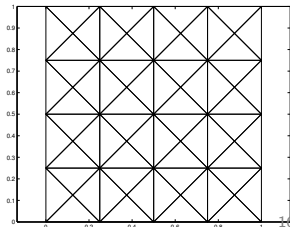
# Possibles difficultés avec les flux centrés?

- Calcul des **modes propres d'une cavité**.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver les } (\mathbf{E}, \mathbf{H}, \omega) \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) \times \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) \times \mathbb{C}^* \text{ tels que :} \\ i\omega\epsilon\mathbf{E} - \text{rot } \mathbf{H} = 0, \\ i\omega\mu\mathbf{H} + \text{rot } \mathbf{E} = 0, \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

- Utilisation d'un schéma à flux centrés :
  - apparition de **valeurs propres non physiques**,
  - multiplicité non respecté pour les sous-espaces propres.

- $\Omega = ]0; 1[, \epsilon = \mu = 1.$
- Utilisation d'une approximation  $P_1$ .  
Maillage en drapeau anglais.
- Analytiquement :  $\omega^2 = (n^2 + m^2)\pi^2.$



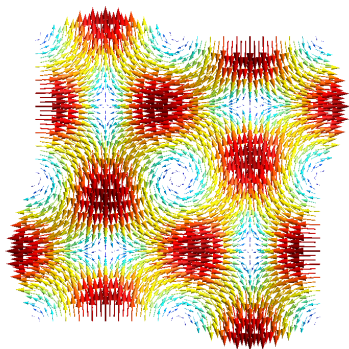
## Possibles difficultés avec les flux centrés?

	64	256	1024	1936
1	1.0085	1.0021	1.0005	1.0003
1	1.0085	1.0021	1.0005	1.0003
2	2.0429	2.0109	2.0027	2.0014
4	4.1295	4.0338	4.0085	4.0045
4	4.1295	4.0338	4.0085	4.0045
5	5.2364	5.0619	5.0157	5.0083
5	5.2364	5.0619	5.0157	5.0083
8	7.9372	8.1715	8.0434	8.0230
	8.5857	8.3390	8.4378	8.4532
9	9.5992	9.1682	9.0430	9.0228
9	9.5992	9.1682	9.0430	9.0228
	8.6581	9.0057	9.1087	9.1248
10	10.8060	10.2270	10.0583	10.0310
10	10.8060	10.2270	10.0583	10.0310

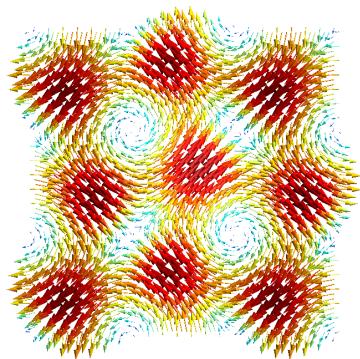
- Deux modes propres non physiques.
- Valeurs propres distinctes des valeurs propres physiques.

## Possibles difficultés avec les flux centrés?

- Représentation de deux modes propres physiques dans la zone où apparaissent les modes propres non physiques.



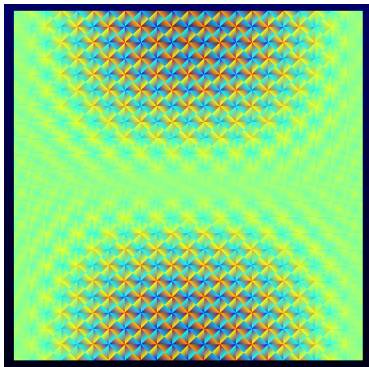
(a)  $\omega = 8\pi^2$



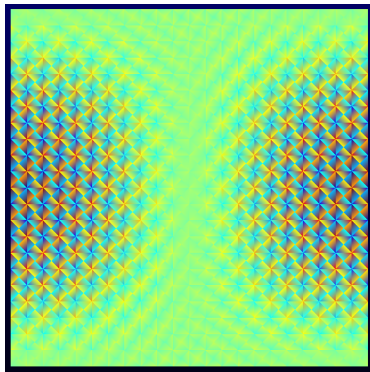
(b)  $\omega = 9\pi^2$

## Possibles difficultés avec les flux centrés?

- Composantes  $\mathbf{E}_x$  et  $\mathbf{E}_y$  du premier mode propre non physique.
- Variations spatiales très rapides, directement dépendantes de la configuration du maillage.



(c)  $\mathbf{E}_x$



(d)  $\mathbf{E}_y$

## Résumé sur le choix du flux numérique

- L'utilisation de flux décentrés du premier ordre fournit, sur l'exemple, les meilleurs ordres de convergence.
  - Problème vraisemblablement mal posé dans le cas d'un problème de cavité avec l'utilisation de flux centrés (cas  $P_1$ ). Influence sur les problèmes en domaine ouvert?
  - Les méthodes avec pénalisation sur le champ  $\mathbf{E}$  et avec flux décentrée du premier ordre fournissent une bonne approximation du problème spectral.
- ⇒ Éviter les méthodes utilisant des flux centrés au profit de méthodes avec des termes supplémentaires de pénalisation.

## Structure de la matrice obtenu

- Solution  $\mathbf{W}$  recherchée dans l'espace  $V_h \times V_h$  défini par :

$$V_h = \{ \mathbf{V} \in [L^2(\Omega)]^3 / \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{V}|_K \in \mathcal{P}(K) \}.$$

- Sommation sur tous les éléments  $K$  :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_h} (i\omega G_0 + G'_0) \mathbf{W} \cdot \bar{\mathbf{V}} dx - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{W} \cdot \sum_{l \in \{x,y,z\}} G_l \partial_l (\bar{\mathbf{V}}) dx \\ & + \sum_{F \in \Gamma^0} \int_F G_{n_F} \{ \mathbf{W} \} \cdot \llbracket \bar{\mathbf{V}} \rrbracket_F ds + \sum_{F \in \Gamma^0} \int_F S_F \llbracket \mathbf{W} \rrbracket_F \cdot \llbracket \bar{\mathbf{V}} \rrbracket_F ds \\ & + \sum_{F \in \Gamma^m \cup \Gamma^a} \int_F \left( \frac{1}{2} (M_{F,K} - I_{FK} G_{n_F}) \mathbf{W} \right) \cdot \bar{\mathbf{V}} ds \\ & = \sum_{F \in \Gamma^a} \int_F \left( \frac{1}{2} (M_{F,K} - I_{FK} G_{n_F}) \mathbf{W}_{\text{inc}} \right) \cdot \bar{\mathbf{V}} ds, \quad \forall \mathbf{V} \in V_h \times V_h. \end{aligned}$$

## Structure de la matrice obtenu

- Pour la résolution matricielle, on revient au **caractère mixte** du problème initial.
- La formulation faible s'écrit aussi sous la forme :

Trouver  $(\mathbf{E}_h, \mathbf{H}_h) \in V_h \times V_h$  tel que :

$$\begin{cases} a(\mathbf{H}_h, \tilde{\mathbf{H}}) + \overline{b(\tilde{\mathbf{H}}, \mathbf{E}_h)} = \sum_{F \in \Gamma^a} \int_F h_{\text{inc}} \cdot \tilde{\mathbf{H}} ds, \quad \forall \tilde{\mathbf{H}} \in V_h, \\ -b(\mathbf{H}_h, \tilde{\mathbf{E}}) + c(\mathbf{E}_h, \tilde{\mathbf{E}}) = \sum_{F \in \Gamma^a} \int_F g_{\text{inc}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} ds, \quad \forall \tilde{\mathbf{E}} \in V_h. \end{cases}$$



# Structure de la matrice obtenu

$$a(\mathbf{H}_h, \tilde{\mathbf{H}}) = \int_{\Omega_h} i\omega\mu \mathbf{H}_h \cdot \tilde{\mathbf{H}} dx + \sum_{F \in \Gamma^a} \int_F \left( \frac{1}{2} N_{\mathbf{n}_F}^t N_{\mathbf{n}_F} \mathbf{H}_h \right) \cdot \tilde{\mathbf{H}} ds$$

$$+ \sum_{F \in \Gamma^0} \int_F (\alpha_F^H N_{\mathbf{n}_F}^t N_{\mathbf{n}_F} \llbracket \mathbf{H}_h \rrbracket_F) \cdot \llbracket \tilde{\mathbf{H}} \rrbracket_F ds,$$

$$c(\mathbf{E}_h, \tilde{\mathbf{E}}) = \int_{\Omega_h} (i\omega\epsilon + \sigma) \mathbf{E}_h \cdot \tilde{\mathbf{E}} dx + \sum_{F \in \Gamma^a} \int_F \left( \frac{1}{2} N_{\mathbf{n}_F} N_{\mathbf{n}_F}^t \mathbf{E}_h \right) \cdot \tilde{\mathbf{E}} ds$$

$$+ \sum_{F \in \Gamma^0} \int_F \left( \alpha_F^E N_{\mathbf{n}_F} N_{\mathbf{n}_F}^t \llbracket \mathbf{E}_h \rrbracket_F \right) \cdot \llbracket \tilde{\mathbf{E}} \rrbracket_F ds$$

$$+ \sum_{F \in \Gamma^m} \frac{1}{2} \int_F (\eta_F N_{\mathbf{n}_F} N_{\mathbf{n}_F}^t \mathbf{E}_h) \cdot \tilde{\mathbf{E}} ds.$$

# Structure de la matrice obtenu

$$\begin{aligned}
 b(\mathbf{H}_h, \tilde{\mathbf{E}}) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{H}_h \cdot \left( \sum_{l \in \{x,y,z\}} N_l^t \partial_l(\tilde{\mathbf{E}}) \right) dx \\
 &- \sum_{F \in \Gamma^0} \int_F N_{\mathbf{n}_F} \{ \mathbf{H}_h \} \cdot \llbracket \tilde{\mathbf{E}} \rrbracket_F ds \\
 &- \sum_{F \in \Gamma^m} \int_F (l_{KF} N_{\mathbf{n}_F} \mathbf{H}_h) \cdot \tilde{\mathbf{E}} ds - \sum_{F \in \Gamma^a} \int_F \left( \frac{1}{2} l_{KF} N_{\mathbf{n}_F} \mathbf{H}_h \right) \cdot \tilde{\mathbf{E}} ds.
 \end{aligned}$$

## Structure de la matrice obtenue

- $(\mathbf{V}_i)_{1 \leq i \leq N_h}$  une base de  $V_h$ . Les vecteurs  $\underline{\mathbf{E}}$  et  $\underline{\mathbf{H}}$  contiennent les coefficients de  $\mathbf{E}_h$  et de  $\mathbf{H}_h$  dans cette base.

### Système linéaire obtenu

$$\begin{pmatrix} A & \overline{B}^t \\ -B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{H}} \\ \underline{\mathbf{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{Q}}^h \\ \underline{\mathbf{Q}}^e \end{pmatrix}.$$

- Utilisation de fonctions de bases réelles  
 $\implies \overline{B}^t = B^t.$

## Problème de type point-selle généralisé

- Système de type point-selle :

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ -B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{H}} \\ \underline{\mathbf{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{Q}}^h \\ \underline{\mathbf{Q}}^e \end{pmatrix}$$

- Forme symétrique :

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ B & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{H}} \\ \underline{\mathbf{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{Q}}^h \\ -\underline{\mathbf{Q}}^e \end{pmatrix}$$

Deux alternatives pour la résolution : approche **couplée** ou **découplée**.

# Résolution d'un problème de type point-selle généralisé

## Approche découplée

- Élimination par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{H}} \\ \underline{\mathbf{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{Q}}^h \\ \underline{\mathbf{Q}}^e + BA^{-1}\underline{\mathbf{Q}}^h \end{pmatrix}$$

$S = C + BA^{-1}B^t$ , complément de Schur.

- Résolution par une méthode itérative de :

$$i\omega S \underline{\mathbf{E}} = i\omega (\underline{\mathbf{Q}}^e + BA^{-1}\underline{\mathbf{Q}}^h).$$

- Remontée à  $\underline{\mathbf{H}}$  :

$$A \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{Q}}^h - B^t \underline{\mathbf{E}}.$$

Avantage si  $A$  est diagonale par blocs.

# Résolution d'un problème de type point-selle généralisé

- La plupart des techniques de préconditionnement pour le système complet se ramène à une résolution découplée.
- Deux résultats :
  - si  $P_d$  est la matrice diagonale par blocs :

$$P_d = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -S \end{pmatrix}.$$

$(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 1)$  est polynôme annulateur pour  $P_d^{-1}M$  et  $MP_d^{-1}$ .

- si  $P_t$  est la matrice triangulaire inférieure par blocs :

$$P_t = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -B & S \end{pmatrix}.$$

$(\lambda - 1)^2$  est polynôme annulateur pour  $P_t^{-1}M$  et  $MP_t^{-1}$ .

- Résultats indirectement intéressants car on utilise  $\hat{A}$  et  $\hat{S}$  des approximations de  $A$  et de  $S$ .

## Approximation du complément de Schur

- Résultat utilisé pour les méthodes Galerkin Discontinu sur le Laplacien et le problème de Stokes :

$$\hat{P}_t = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -B & \hat{S} \end{pmatrix},$$

le spectre de  $M\hat{P}_t^{-1}$  est égal à la réunion de 1 et du spectre de  $\hat{S}^{-1}S$ .

Si  $A$  diagonale par blocs, problématique identique pour les approches couplée et découplée :

chercher le bon  $\hat{S}$ .

## Résultats simples en suivant cette démarche

- Pour approcher  $S$ , utilisation d'un algorithme à deux niveaux :
  - une itération de Jacobi par blocs (1 bloc par élément) sur le système global,
  - projection sur l'espace d'éléments finis conformes inclus dans l'espace d'approximation  $V_h$ .
- **Résultats probants uniquement si l'on pénalise le champ  $\mathbf{E}$ .**

- $\Omega = ]0; 1[$ ,  
 $\Gamma_m = \partial\Omega$ .
- $\omega = 1.1\pi$ .
- GMRes(40).
- $\text{tol} = 10^{-6}$

- $\tau_F = 1/\pi$ .

	64	256	1024
Schur	(3, 35)	(4, 35)	(6, 15)
Complet	(4, 5)	(5, 5)	(6, 25)

- $\tau_F = 10/\pi$ .

	64	256	1024
Schur	(1, 36)	(2, 7)	(2, 24)
Complet	(1, 39)	(2, 13)	(2, 31)



## Discussion sur ces résultats

### Justification?

- Avec pénalisation sur le champ  $\mathbf{E}$ , convergence spectrale quasi-semblable pour les valeurs propres d'amplitude peu élevée avec la méthode d'éléments finis conformes.
- En particulier, nombre identique de modes propres discrets pour la valeur propre 0.

Ils vérifient  $N_{n_F}^t \llbracket \mathbf{E} \rrbracket_F = 0$ ,  $\forall F$  et  $\text{rot}(\mathbf{E})|_K = 0$ ,  $\forall K$ . Pour un maillage conforme, cet espace est :

$$\{\text{grad}(\phi) / \phi \in H_0^1(\Omega) \text{ et } \phi|_K \in P_{k+1}(K)\}.$$

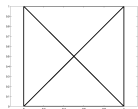
### Inconvénients.

- Utilisation d'éléments finis conformes du **même ordre**.
- Rien de concret avec l'utilisation de flux décentrés.

### Heuristique

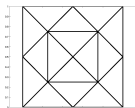
- Exploiter les résultats pour les éléments finis conformes.

# Principes généraux multigrille



- Méthode itérative de résolution de systèmes linéaires.
- Méthode multigrille géométrique classique fondée sur une **hiérarchie de maillages emboîtés**.
- Idée : Résolution sur la maillage le plus fin avec l'utilisation des grilles les plus grossières pour le calcul.
- Traitement de l'erreur :
  - partie oscillante - représentée et traitée sur le maillage le plus fin,
  - partie lisse - traitée sur le maillage grossier.

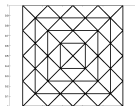
# Principes généraux multigrille



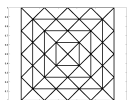
- Méthode itérative de résolution de systèmes linéaires.
- Méthode multigrille géométrique classique fondée sur une **hiérarchie de maillages emboîtés**.
- Idée : Résolution sur la maillage le plus fin avec l'utilisation des grilles les plus grossières pour le calcul.
- Traitement de l'erreur :
  - partie oscillante - représentée et traitée sur le maillage le plus fin,
  - partie lisse - traitée sur le maillage grossier.

# Principes généraux multigrille

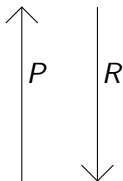
- Méthode itérative de résolution de systèmes linéaires.
- Méthode multigrille géométrique classique fondée sur une **hiérarchie de maillages emboîtés**.
- Idée : Résolution sur la maillage le plus fin avec l'utilisation des grilles les plus grossières pour le calcul.
- Traitement de l'erreur :
  - partie oscillante - représentée et traitée sur le maillage le plus fin,
  - partie lisse - traitée sur le maillage grossier.



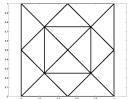
# Méthode à deux grilles



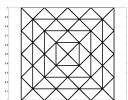
$A_h, b_h, u_h, r_h$



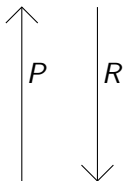
$A_H, \theta_H, r_H$



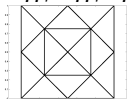
# Méthode à deux grilles



$A_h, b_h, u_h, r_h$

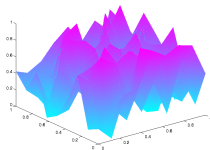


$A_H, \theta_H, r_H$

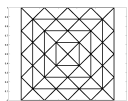


**Préissage**

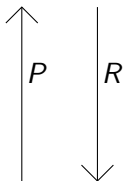
1 ou 2 itérations  $\Rightarrow u_h^{i+1/3}$



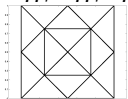
# Méthode à deux grilles



$A_h, b_h, u_h, r_h$

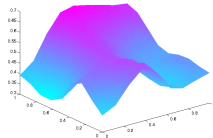


$A_H, \theta_H, r_H$

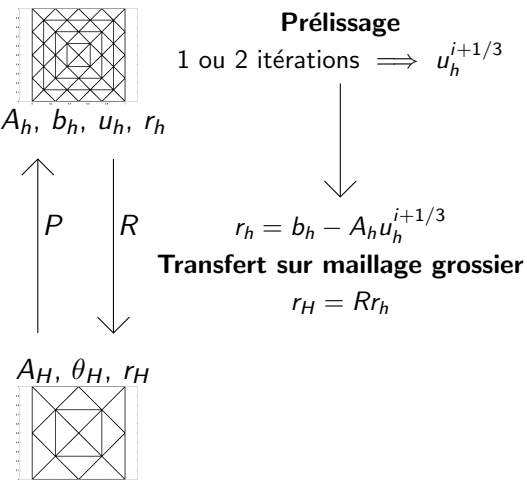


**Préissage**

1 ou 2 itérations  $\Rightarrow u_h^{i+1/3}$

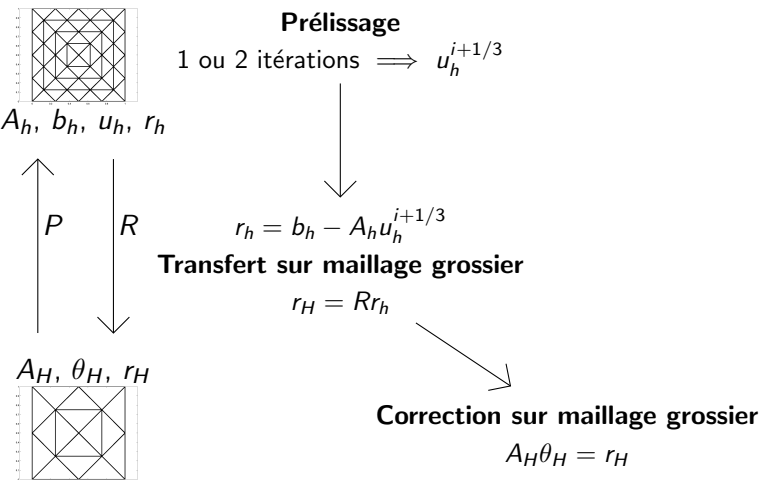


# Méthode à deux grilles

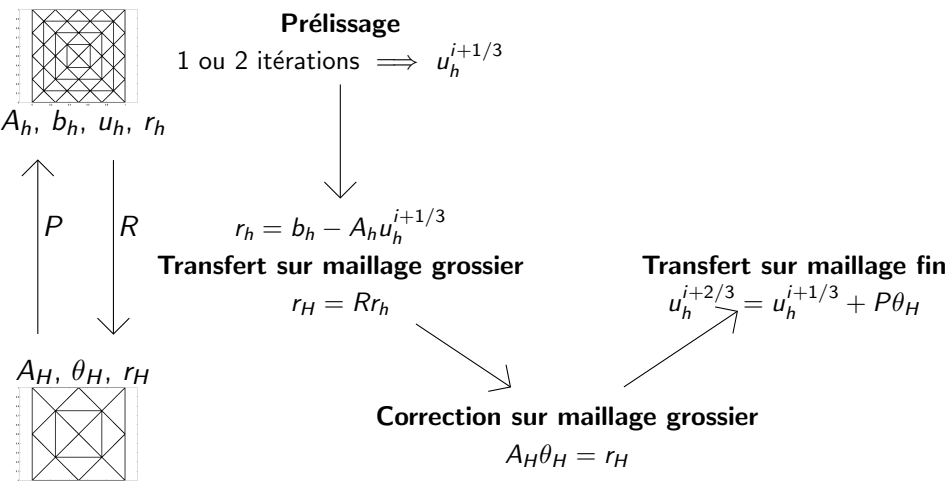




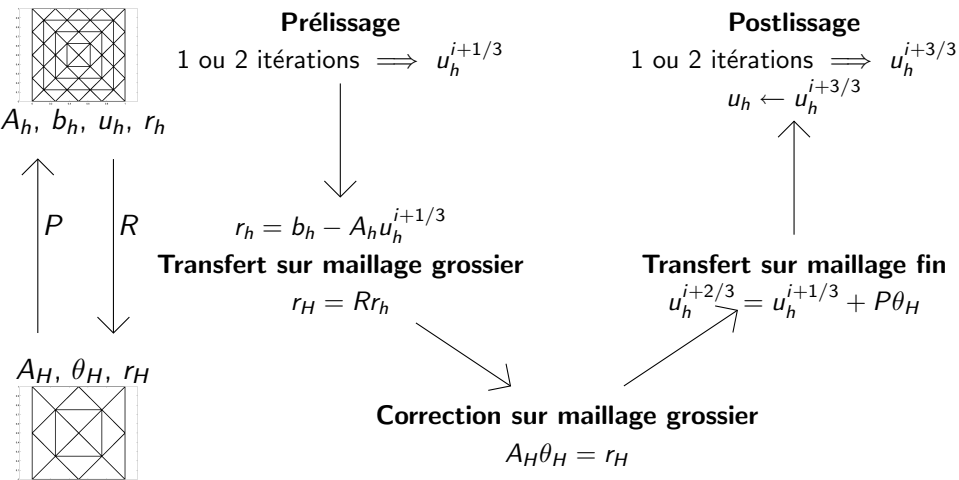
# Méthode à deux grilles



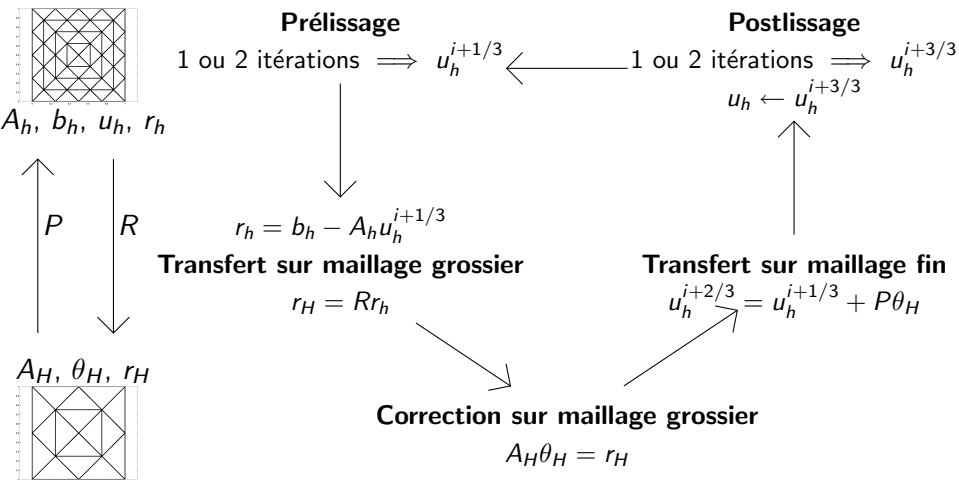
# Méthode à deux grilles



# Méthode à deux grilles



# Méthode à deux grilles



# Lisseurs pour les éléments finis conformes et Maxwell

- Cas de l'opérateur Laplacien : quelques itérations de Jacobi relaxée ou de Gauss-Seidel fournissent un lissage adapté.
- Cas de l'opérateur rot  $\nu$  rot : les algorithmes classiques ne traitent pas les composantes dans le noyau de l'opérateur rot alors que la dimension de ce sous-espace est directement proportionnelle à la taille du problème discret (la dimension du noyau pour grad est 1).
- Pour résoudre cette difficulté, algorithme hybride de Hiptmair (1997) :
  - Lissage **spécifique pour le noyau de l'opérateur rot**.
  - Lissage classique sur le système global.

## Lissage spécifique pour le “noyau” de rot

- Caractérisation des modes propres discrets pour  $\omega = 0$ .  
Si les coefficients  $\alpha_F^H$ ,  $\alpha_F^E$  et  $\eta_F$  sont tous différents de 0 :

$$N_{\mathbf{n}_F}^t \llbracket \mathbf{E}_h \rrbracket_F = 0, \quad \forall F \in \Gamma^0 \cup \Gamma^m \in \text{ et } \text{rot}(\mathbf{E}_h)|_K = 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h,$$

$$N_{\mathbf{n}_F} \llbracket \mathbf{H}_h \rrbracket_F = 0 \quad \forall F \in \Gamma^0 \text{ et } \text{rot}(\mathbf{H}_h)|_K = 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

$\implies$  construction d'un opérateur de restriction à ce sous-espace.

- En 2D et sur un maillage conforme, cet espace est :

$$\{\text{grad}(\phi) / \phi \in H_0^1(\Omega) \text{ et } \phi|_K \in P_{k+1}(K)\} \times \{1\}.$$

## Lissage spécifique pour le “noyau” de rot

- Sur ce sous-espace 2D, le problème se ramène à la résolution de deux problèmes découplés de forme bilinéaire :

$$\tilde{a}(1, 1) = i\omega \int_{\Omega_h} \mu dx,$$

$$\tilde{c}(\phi_h, \tilde{\phi}_h) = \int_{\Omega_h} (i\omega\epsilon + \sigma) \text{grad } \phi_h \cdot \text{grad } \tilde{\phi}_h dx.$$

⇒ une **itération de Gauss-Seidel symétrique** utilisé pour lisser l'erreur sur ce sous-espace.

## Lissage pour le système global

Cas des systèmes de type point-selle :

- lisseur s'appuyant sur une approche découplée,
- **lisseur de type Vanka.**

Principe du lisseur de type Vanka :

- Partition des indices de  $\underline{\mathbf{E}} \in \mathbb{R}^n$  :  $(V_i)_{i=1, \dots, N_{el}}$ ,
- Construction des ensembles  $(W_i)_{i=1, \dots, N_{el}}$  d'indices de  $\underline{\mathbf{H}} \in \mathbb{R}^m$  de la manière suivante :

$$\forall i \in \{1, \dots, N_{el}\}, \forall j \in \{1, \dots, m\}, (j \in W_i) \Leftrightarrow (\exists k \in V_i, B_{jk} \neq 0).$$

- $n_i = \#(V_i)$ ,  $m_i = \#(W_i)$ . Localement :

$$P_i : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad Q_i : \mathbb{R}^{m_i} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Opérateur de prolongement des espaces locaux vers l'espace global.



# Lissage pour le système global

Principe du lisseur de type Vanka :

- Matrice du problème local :

$$M_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i^t \\ B_i & -C_i \end{pmatrix}$$

où  $A_i = P_i^t A P_i$ ,  $B_i = Q_i^t B P_i$  et  $C_i = Q_i^t C Q_i$ .

$N_{el}$  systèmes de type point-selle de dimension réduite.

- Une itération du lisseur.  $r$  résidu initial,  $g$  en sortie :

$$g \leftarrow 0$$

Pour  $i = 1 : N_{el}$

$$e_i \leftarrow P_i(r - Mg)$$

$$y_i \leftarrow M_i^{-1} e_i$$

$$g \leftarrow g + P_i^t y_i$$

Fin

## Résultats numériques

- Problème : le même que pour l'étude de l'ordre d'interpolation, excepté  $\omega = \pi$ .
- GMRes(10) préconditionné par un algorithme deux grilles avec :
  - une itération de pré-lissage (global + spécifique),
  - une itération de post-lissage (global + spécifique).
- $\text{tol} = 10^{-6}$

	32	128	512	2048
décentré	(1, 9)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
pénalisé <b>E</b>	(4, 7)	(4, 8)	(4, 7)	(4, 7)

Nombre d'itérations (quasi-)constant pour obtenir la convergence.  
 À confirmer avec plus de deux grilles.

# Bilan

- Difficultés rencontrées ou attendues avec l'utilisation de flux numériques centrés.  
⇒ orientation vers l'utilisation de flux numériques décentrés.
- Préconditionnement possible en considérant un système de type point-selle généralisé.
- Développement d'idées calquées sur les résultats obtenus en éléments finis conformes.

# Perspectives

- Validation plus extensive des propriétés des algorithmes en 2D.
- Utilisation en cas de non-conformité du maillage et/ou d'ordre polynomial variable.
- Association à des méthodes de décomposition de domaine.
- Extension vers des approches multiniveau algébriques.
- Transposition de ces techniques sur le cas 3D.