

# Méthode multiniveau algébrique pour les éléments finis d'arête

Ronan Perrussel  
CEGELY / ICJ

24 Mai 2005

# Formulation

Notre objectif est la résolution efficace de systèmes linéaires provenant de la discrétisation par les éléments finis d'arête de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E} \in V \text{ tel que : } a(\mathbf{E}, \mathbf{E}') = F(\mathbf{E}'), \quad \forall \mathbf{E}' \in V_0, \\ \text{avec } a(\mathbf{E}, \mathbf{E}') = \int_{\Omega} \delta \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}' + \int_{\Omega} \gamma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}'. \end{array} \right.$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  et  $V \subset \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ . Nous supposons  $\delta$  et  $\gamma > 0$ .

Applications directes : magnétostatique, courants de Foucault ou équation des ondes en régime transitoire.

Souhait : application au régime harmonique.

# Espace d'éléments finis

Deux espaces d'intérêt :

- ▶ l'espace d'éléments nodaux  $\text{vect}((\phi_p^h)_{p=1\dots N_h})$  inclus dans  $H^1(\Omega)$  : Éléments finis  $P_1$ -Lagrange. Degrés de liberté (DDL) : valeurs aux sommets du maillage.
- ▶ l'espace d'éléments d'arête  $\text{vect}((\lambda_i^h)_{i=1\dots E_h})$  inclus dans  $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$  : Éléments de Nédélec d'ordre le plus bas. DDL : circulations le long des arêtes du maillage.

Propriétés importantes venant des espaces continus  
( $\text{grad}(H^1(\Omega)) \subset \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) + \text{Poincaré}$ ) :

$$\text{grad } \phi_p^h = \sum_{i=1}^{E_h} G_{ip}^h \lambda_i^h, \quad \forall p = 1 \dots N_h,$$

$$\ker(\text{rot}, \text{vect}((\lambda_i^h)_{i=1\dots E_h})) = \text{vect}((\text{grad } \phi_p^h)_{p=1\dots N_h}).$$

# Principes multiniveau

Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, utilisant une représentation à plusieurs échelles du problème, dont la complexité dépend linéairement du nombre d'inconnues.

Pour les construire, deux outils complémentaires sont nécessaires :

- ▶ Un lisseur : pour éliminer la composante oscillante de l'erreur.
- ▶ Des opérateurs de transfert entre niveaux (souvent  $P$  et  $P^t$ ): pour transférer efficacement la composante lisse de l'erreur du niveau fin au niveau grossier ou inversement.

# Lisseur pour Maxwell

- ▶ Dans le cas de l'opérateur Laplacien, la composante oscillante de l'erreur coïncide avec les modes d'énergie élevée de l'erreur.  
⇒ Jacobi relaxé ou Gauss-Seidel par points sont bien adaptés.

# Lisseur pour Maxwell

- ▶ Dans le cas de l'opérateur Laplacien, la composante oscillante de l'erreur coïncide avec les modes d'énergie élevée de l'erreur.  
⇒ Jacobi relaxé ou Gauss-Seidel par points sont bien adaptés.
- ▶ Dans le cas de l'opérateur rot rot, la dimension du noyau de rot est proportionnelle au nombre de noeuds (de dimension 1 pour grad).  
Or, les composantes de ce noyau :  $\text{vect}((\text{grad } \phi_p^h)_{p=1\dots N_h})$  peuvent être oscillantes mais sont d'énergie faible.  
Les lisseurs classiques ne sont donc pas adaptés.

# Lisseur pour Maxwell

- Proposition de R. Hiptmair: un lisseur hybride.

$K$  matrice du système,  $b$  vecteur initial

*Une itération de Gauss-Seidel en inconnues arête sur*

$$Kx = b$$

$$\xi \leftarrow b - Kx \text{ (calcul du résidu)}$$

$$\rho \leftarrow (G^h)^t \xi \text{ (passage arête-noeud)}$$

$$\psi \leftarrow 0$$

*Une itération de Gauss-Seidel en inconnues nodales*

$$\text{sur } \Delta_h \psi = \rho$$

*On retourne le vecteur lissé  $x + G^h \psi$*

$$\Delta_h = (G^h)^t K G^h$$

- Arnold, Falk et Winther ont proposé une alternative : regrouper les indices des arêtes incidentes en un même noeud.

# Construction des opérateurs de transfert

- ▶ Si on dispose d'une hiérarchie de maillages emboîtés, c'est une méthode multigrille géométrique et  $P$  est simplement construit en utilisant l'inclusion des espaces éléments finis.
- ▶ Sinon, on dispose d'informations pour un unique niveau (fin) et on doit définir une stratégie algébrique pour construire  $P$ . La matrice grossière est assemblée par un produit de Galerkin :

$$A_H = P^t A_h P.$$

et on peut répéter la méthode récursivement.



# Construction des opérateurs de transfert

Pour conserver une représentation simple du noyau de rot, on souhaite vérifier au niveau grossier :

$$\text{grad } \phi_n^H = \sum_{e=1}^{E_H} G_{en}^H \lambda_e^H, \quad \forall n = 1 \dots N_H.$$

où  $(\phi_n^H)_{n=1 \dots N_H}$  est la base nodale grossière et  $(\lambda_e^H)_{e=1 \dots E_H}$  est la base d'arête grossière.

Cette relation est *implicite* pour le multigrille géométrique et on souhaite garder une représentation identique au niveau algébrique, c.-à-d. définir un graphe grossier dont la matrice d'incidence  $G^H$  sera utilisé dans cette relation.

# Construction des opérateurs de transfert

On impose en outre que les espaces grossiers soient inclus dans les espaces fins :

$$\phi_n^H = \sum_{p=1}^{N_h} \alpha_{pn} \phi_p^h, \quad \forall n = 1 \dots N_H,$$

$$\lambda_e^H = \sum_{i=1}^{E_h} \beta_{ie} \lambda_i^h, \quad \forall e = 1 \dots E_H.$$

En regroupant les relations, on veut satisfaire :

$$G^h \alpha = \beta G^H.$$

$G^h$  décrit le maillage initial,  $\alpha$  matrice de prolongement nodal calculée préliminairement;  $G^h \alpha = \chi$  est une quantité connue.

On s'intéresse à  $G^H$  et à la matrice de prolongement en arête  $\beta$ .

# Formulation

- ▶ Idée provenant des techniques en éléments nodaux : minimisation d'énergie + contraintes sur le support (conservation des matrices creuses) et d'approximation.
- ▶ Nous considérons des sous-domaines de  $\Omega$  se recouvrant  $(\mathcal{U}_e)_{e=1\dots E_H}$  pour définir les supports.
- ▶ On souhaite résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\lambda_e^H)_{e=1\dots E_H} \text{ minimisant } \sum_{e=1}^{E_H} b(\lambda_e^H, \lambda_e^H) \text{ tel que :} \\ \text{grad } \phi_n^H = \sum_{e=1}^{E_H} G_{en}^H \lambda_e^H, \quad \forall n = 1 \dots N_H \\ \text{et } \text{supp}(\lambda_e^H) \subset \overline{\mathcal{U}_e}, \quad \forall e = 1 \dots E_H. \end{array} \right.$$

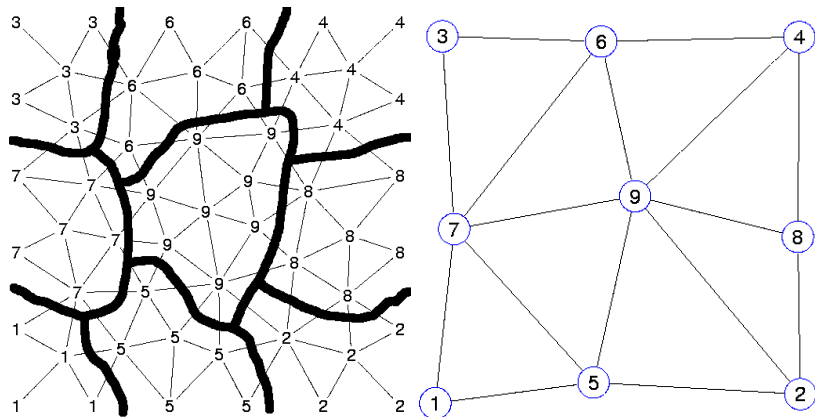
# Idées pour le problème d'optimisation

- ▶ On définit des règles pour la construction du graphe grossier, c.-à-d.  $G^H$ , à partir de la connaissance de  $\alpha$ ,
- ▶ À chaque arête fine d'indice  $i$ , on associe un sous-graphe du graphe grossier de matrice d'incidence noeud-arête  $G^{H,i}$ .
- ▶ Pour vérifier  $\beta G^H = \chi$ , la  $i$ -ème ligne de  $\beta$ , noté  $\beta_{i\bullet}$ , est la solution d'un problème de flot sur ce sous-graphe, c.-à-d. :

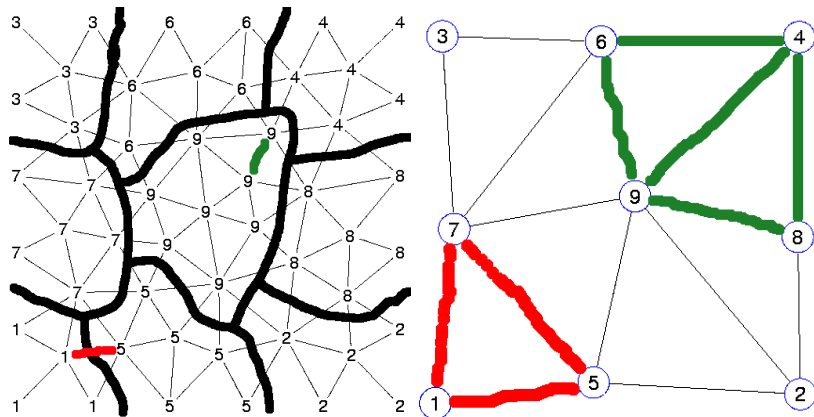
$$\beta_{i\bullet} G^{H,i} = \chi^i.$$

où  $\chi^i$  regroupe certaines composantes de  $\chi$ .

## Illustration d'un sous-graphe



## Illustration d'un sous-graphe



# Idées pour le problème d'optimisation

On connaît la forme de la solution :

$$(\beta_{i\bullet})^t \in (\beta_{i\bullet}^{\text{partic}})^t + \ker((G^{H,i})^t).$$

où :

- ▶  $\beta_{i\bullet}^{\text{partic}}$  est une solution particulière du problème de flot, déterminée grâce à un arbre couvrant du sous-graphe,
- ▶ le noyau de  $(G^{H,i})^t$  est engendré par les cycles indépendants du sous-graphe.

La contrainte assurée, les composantes dans le noyau de  $(G^{H,i})^t$  sont nos degrés de liberté pour la minimisation.

# Résolution du problème d'optimisation

On montre ainsi que le problème de minimisation se ramène à la résolution d'un système de la forme :

$$B^t D B \Gamma = -B^t D \tilde{\beta}^{\text{partic}},$$

où :

- ▶ les colonnes de  $B$  sont les vecteurs de base des noyaux des différentes matrices  $(G^{H,i})^t$ ,
- ▶  $\Gamma$  est le vecteur des composantes associées à ces vecteurs de base et donc le vecteur inconnu,
- ▶  $D$  est une matrice diagonale par blocs où les blocs diagonaux sont des problèmes locaux liés à la fonctionnelle d'énergie qui sert pour la minimisation,
- ▶  $\tilde{\beta}^{\text{partic}}$  est un vecteur contenant les données sur la solution particulière.



# Résolution du problème d'optimisation

- ▶ La fonctionnelle d'énergie choisie étant définie positive,  $B^tDB$  est symétrique définie positive et on résout par la méthode du gradient conjugué.
- ▶ Pour un bon choix de fonctionnelle d'énergie, restant proche de la forme bilinéaire du problème, le conditionnement de ce système est quasi-indépendant de la dimension globale du problème.
- ▶ Quelques itérations suffisent à obtenir une base grossière proche de l'optimal; une grande précision n'est pas nécessaire.

## Résultats et perspectives

- ▶ Validation, pour des maillages structurés en 2d ou en 3d avec des coefficients homogènes : on retrouve la matrice de prolongement que nous donnerait une méthode multigrille géométrique classique.  
Applications sur maillages structurés : Plus robuste qu'une interpolation classique avec des coefficients inhomogènes.
- ▶ Validation pour des maillages non structurés en 2d ou en 3d : le conditionnement de la matrice préconditionné est quasi-indépendant de la dimension globale du problème. La géométrie est resté simple (carré et cube); il faut des validations sur des géométries plus complexes.