

Méthode multiniveau algébrique pour les éléments finis d'arête

Ronan Perrussel
CEGELY / ICJ

24 Mai 2005

Formulation

Notre objectif est la résolution efficace de systèmes linéaires provenant de la discrétisation par les éléments finis d'arête de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E} \in V \text{ tel que : } a(\mathbf{E}, \mathbf{E}') = F(\mathbf{E}'), \quad \forall \mathbf{E}' \in V_0, \\ \text{avec } a(\mathbf{E}, \mathbf{E}') = \int_{\Omega} \delta \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}' + \int_{\Omega} \gamma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}'. \end{array} \right.$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et $V \subset \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$. Nous supposons δ et $\gamma > 0$.

Applications directes : magnétostatique, courants de Foucault ou équation des ondes en régime transitoire.

Souhait : application au régime harmonique.

Espace d'éléments finis

Deux espaces d'intérêt :

- ▶ l'espace d'éléments nodaux $\text{vect}((\phi_p^h)_{p=1\dots N_h})$ inclus dans $H^1(\Omega)$: Éléments finis P_1 -Lagrange. Degrés de liberté (DDL) : valeurs aux sommets du maillage.
- ▶ l'espace d'éléments d'arête $\text{vect}((\lambda_i^h)_{i=1\dots E_h})$ inclus dans $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$: Éléments de Nédélec d'ordre le plus bas. DDL : circulations le long des arêtes du maillage.

Propriétés importantes venant des espaces continus
($\text{grad}(H^1(\Omega)) \subset \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) + \text{Poincaré}$) :

$$\text{grad } \phi_p^h = \sum_{i=1}^{E_h} G_{ip}^h \lambda_i^h, \quad \forall p = 1 \dots N_h,$$

$$\ker(\text{rot}, \text{vect}((\lambda_i^h)_{i=1\dots E_h})) = \text{vect}((\text{grad } \phi_p^h)_{p=1\dots N_h}).$$

Principes multiniveau

Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, utilisant une représentation à plusieurs échelles du problème, dont la complexité dépend linéairement du nombre d'inconnues.

Pour les construire, deux outils complémentaires sont nécessaires :

- ▶ Un lisseur : pour éliminer la composante oscillante de l'erreur.
- ▶ Des opérateurs de transfert entre niveaux (souvent P et P^t): pour transférer efficacement la composante lisse de l'erreur du niveau fin au niveau grossier ou inversement.

Lisseur pour Maxwell

- ▶ Dans le cas de l'opérateur Laplacien, la composante oscillante de l'erreur coïncide avec les modes d'énergie élevée de l'erreur.
⇒ Jacobi relaxé ou Gauss-Seidel par points sont bien adaptés.

Lisseur pour Maxwell

- ▶ Dans le cas de l'opérateur Laplacien, la composante oscillante de l'erreur coïncide avec les modes d'énergie élevée de l'erreur.
⇒ Jacobi relaxé ou Gauss-Seidel par points sont bien adaptés.
- ▶ Dans le cas de l'opérateur rot rot, la dimension du noyau de rot est proportionnelle au nombre de noeuds (de dimension 1 pour grad).
Or, les composantes de ce noyau : $\text{vect}((\text{grad } \phi_p^h)_{p=1\dots N_h})$ peuvent être oscillantes mais sont d'énergie faible.
Les lisseurs classiques ne sont donc pas adaptés.

Lisseur pour Maxwell

- Proposition de R. Hiptmair: un lisseur hybride.

K matrice du système, b vecteur initial

Une itération de Gauss-Seidel en inconnues arête sur

$$Kx = b$$

$$\xi \leftarrow b - Kx \text{ (calcul du résidu)}$$

$$\rho \leftarrow (G^h)^t \xi \text{ (passage arête-noeud)}$$

$$\psi \leftarrow 0$$

Une itération de Gauss-Seidel en inconnues nodales

$$\text{sur } \Delta_h \psi = \rho$$

On retourne le vecteur lissé $x + G^h \psi$

$$\Delta_h = (G^h)^t K G^h$$

- Arnold, Falk et Winther ont proposé une alternative : regrouper les indices des arêtes incidentes en un même noeud.

Construction des opérateurs de transfert

- ▶ Si on dispose d'une hiérarchie de maillages emboîtés, c'est une méthode multigrille géométrique et P est simplement construit en utilisant l'inclusion des espaces éléments finis.
- ▶ Sinon, on dispose d'informations pour un unique niveau (fin) et on doit définir une stratégie algébrique pour construire P . La matrice grossière est assemblée par un produit de Galerkin :

$$A_H = P^t A_h P.$$

et on peut répéter la méthode récursivement.

Construction des opérateurs de transfert

Pour conserver une représentation simple du noyau de rot, on souhaite vérifier au niveau grossier :

$$\text{grad } \phi_n^H = \sum_{e=1}^{E_H} G_{en}^H \lambda_e^H, \quad \forall n = 1 \dots N_H.$$

où $(\phi_n^H)_{n=1 \dots N_H}$ est la base nodale grossière et $(\lambda_e^H)_{e=1 \dots E_H}$ est la base d'arête grossière.

Cette relation est *implicite* pour le multigrille géométrique et on souhaite garder une représentation identique au niveau algébrique, c.-à-d. définir un graphe grossier dont la matrice d'incidence G^H sera utilisé dans cette relation.

Construction des opérateurs de transfert

On impose en outre que les espaces grossiers soient inclus dans les espaces fins :

$$\phi_n^H = \sum_{p=1}^{N_h} \alpha_{pn} \phi_p^h, \quad \forall n = 1 \dots N_H,$$

$$\lambda_e^H = \sum_{i=1}^{E_h} \beta_{ie} \lambda_i^h, \quad \forall e = 1 \dots E_H.$$

En regroupant les relations, on veut satisfaire :

$$G^h \alpha = \beta G^H.$$

G^h décrit le maillage initial, α matrice de prolongement nodal calculée préliminairement; $G^h \alpha = \chi$ est une quantité connue.

On s'intéresse à G^H et à la matrice de prolongement en arête β .

Formulation

- ▶ Idée provenant des techniques en éléments nodaux : minimisation d'énergie + contraintes sur le support (conservation des matrices creuses) et d'approximation.
- ▶ Nous considérons des sous-domaines de Ω se recouvrant $(\mathcal{U}_e)_{e=1\dots E_H}$ pour définir les supports.
- ▶ On souhaite résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\lambda_e^H)_{e=1\dots E_H} \text{ minimisant } \sum_{e=1}^{E_H} b(\lambda_e^H, \lambda_e^H) \text{ tel que :} \\ \text{grad } \phi_n^H = \sum_{e=1}^{E_H} G_{en}^H \lambda_e^H, \quad \forall n = 1 \dots N_H \\ \text{et } \text{supp}(\lambda_e^H) \subset \overline{\mathcal{U}_e}, \quad \forall e = 1 \dots E_H. \end{array} \right.$$

Idées pour le problème d'optimisation

- ▶ On définit des règles pour la construction du graphe grossier, c.-à-d. G^H , à partir de la connaissance de α ,
- ▶ À chaque arête fine d'indice i , on associe un sous-graphe du graphe grossier de matrice d'incidence noeud-arête $G^{H,i}$.
- ▶ Pour vérifier $\beta G^H = \chi$, la i -ème ligne de β , noté $\beta_{i\bullet}$, est la solution d'un problème de flot sur ce sous-graphe, c.-à-d. :

$$\beta_{i\bullet} G^{H,i} = \chi^i.$$

où χ^i regroupe certaines composantes de χ .

Illustration d'un sous-graphe

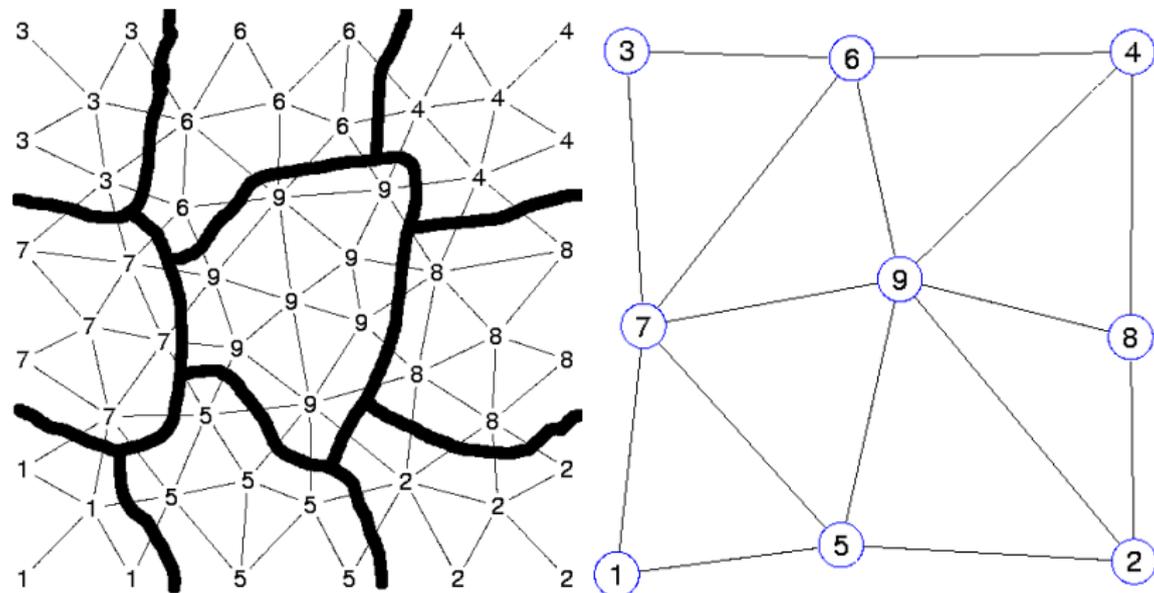
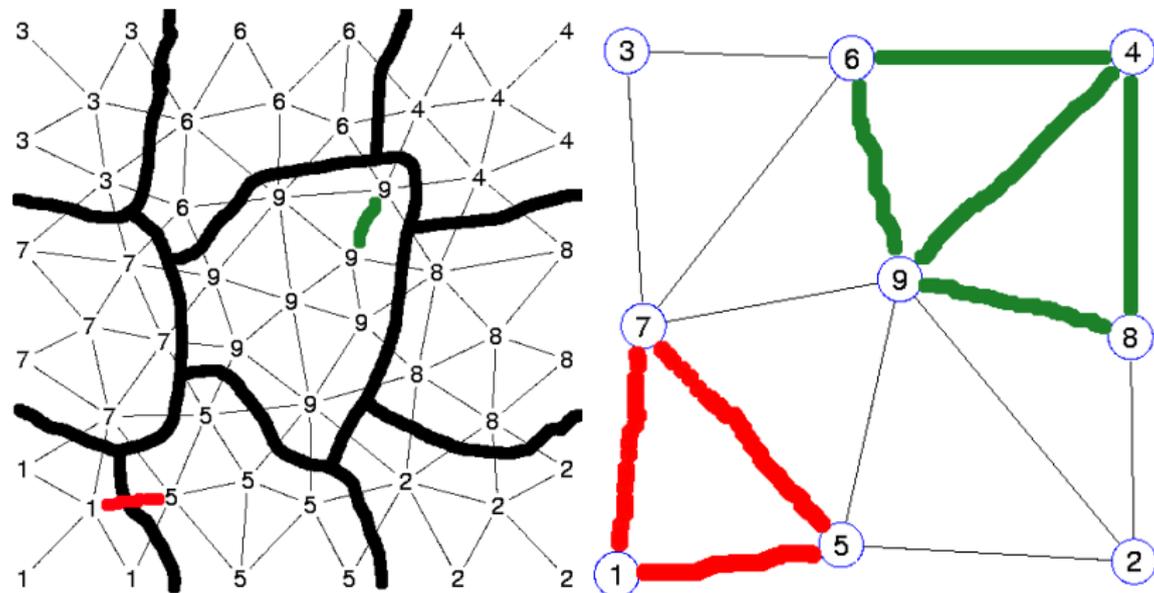


Illustration d'un sous-graphe



Idées pour le problème d'optimisation

On connaît la forme de la solution :

$$(\beta_{i\bullet})^t \in (\beta_{i\bullet}^{\text{partic}})^t + \ker((G^{H,i})^t).$$

où :

- ▶ $\beta_{i\bullet}^{\text{partic}}$ est une solution particulière du problème de flot, déterminée grâce à un arbre couvrant du sous-graphe,
- ▶ le noyau de $(G^{H,i})^t$ est engendré par les cycles indépendants du sous-graphe.

La contrainte assurée, les composantes dans le noyau de $(G^{H,i})^t$ sont nos degrés de liberté pour la minimisation.

Résolution du problème d'optimisation

On montre ainsi que le problème de minimisation se ramène à la résolution d'un système de la forme :

$$B^t D B \Gamma = -B^t D \tilde{\beta}^{\text{partic}},$$

où :

- ▶ les colonnes de B sont les vecteurs de base des noyaux des différentes matrices $(G^{H,i})^t$,
- ▶ Γ est le vecteur des composantes associées à ces vecteurs de base et donc le vecteur inconnu,
- ▶ D est une matrice diagonale par blocs où les blocs diagonaux sont des problèmes locaux liés à la fonctionnelle d'énergie qui sert pour la minimisation,
- ▶ $\tilde{\beta}^{\text{partic}}$ est un vecteur contenant les données sur la solution particulière.

Résolution du problème d'optimisation

- ▶ La fonctionnelle d'énergie choisie étant définie positive, B^tDB est symétrique définie positive et on résout par la méthode du gradient conjugué.
- ▶ Pour un bon choix de fonctionnelle d'énergie, restant proche de la forme bilinéaire du problème, le conditionnement de ce système est quasi-indépendant de la dimension globale du problème.
- ▶ Quelques itérations suffisent à obtenir une base grossière proche de l'optimal; une grande précision n'est pas nécessaire.

Résultats et perspectives

- ▶ Validation, pour des maillages structurés en 2d ou en 3d avec des coefficients homogènes : on retrouve la matrice de prolongement que nous donnerait une méthode multigrille géométrique classique.
Applications sur maillages structurés : Plus robuste qu'une interpolation classique avec des coefficients inhomogènes.
- ▶ Validation pour des maillages non structurés en 2d ou en 3d : le conditionnement de la matrice préconditionné est quasi-indépendant de la dimension globale du problème. La géométrie est resté simple (carré et cube); il faut des validations sur des géométries plus complexes.