Méthodes variationnelles pour les EDPs

Philippe MICHEL

15 octobre 2014

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

On considère le problème suivant :

Existe t'il des solutions de l'équation de transport (type "méca flotte") suivante ?

$$\text{(eq. principale)}\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t}n(t,x)+b(t,x)\nabla n(t,x)=0, \quad x\in\mathbb{R}^d, \quad t\in\mathbb{R} \\ n(0,x)=n_0(x) \end{array}\right. \tag{1.0.1}$$

Théorème 1.0.1 *Sous les hypothèses $b\in C^1$,*

$$\textit{(Hyp.)}\left\{\begin{array}{c} \|b(t,x)-b(t,y)\|\leq M(T,K)\|x-y\|, \quad (x,y)\in[-K,K]^d, \quad t\in[-T,T] \\ \|b(t,x)\|\leq C(T,K)(1+\|x\|), \quad (x,y)\in[-K,K]^d, \quad t\in[-T,T]. \end{array}\right. \tag{1.0.2}$$

et $n_0\in C^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$, il y a existence et unicité des solutions de (8.0.1). De plus, on a

$$n(t,X(t,y))=n_0(y), \quad \forall y\in\mathbb{R}^d, \quad \forall t\in\mathbb{R}, \tag{1.0.3}$$

avec

$$\textit{(eq. carac.)}\left\{\begin{array}{c} \frac{d}{dt}X(t,y)=b(t,X(t,y)), \quad t\in\mathbb{R} \\ X(0,y)=y. \end{array}\right. \tag{1.0.4}$$

De plus $(s,z)\mapsto X^{-1}(s,z)$ telle que $X(t,X^{-1}(t,z))=z$ est une fonction $C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ vérifiant

$$X^{-1}(t,[-M,M]^d)\subset[-M-|t|\|b\|_\infty, M+|t|\|b\|_\infty]^d, \quad \forall t\in\mathbb{R} \;\; et \;\; M>0.$$

Les solutions sont constantes le long des caractéristiques et pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$\inf_{y\in[-M-|t|\|b\|_\infty,M+|t|\|b\|_\infty]^d} n_0(y)\leq n(t,z)\leq \sup_{y\in[-M-|t|\|b\|_\infty,M+|t|\|b\|_\infty]^d} n_0(y), \quad \forall z\in[-M,M]^d, \tag{1.0.5}$$

Preuve du théorème d'existence-unicité de solutions fortes Soit n solution de (8.0.1), alors à y fixé

$$\frac{d}{dt}n(t,X(t,y)) = (\frac{\partial}{\partial t}n)n(t,X(t,y)) + \underbrace{\frac{d}{dt}X(t,y)}_{b(t,X(t,y))}(\nabla n)(t,X(t,y)) = 0,$$

donc $n(t,X(t,y)) = n(0,X(0,y)) = n_0(y)$. Par existence, unicité et régularité des solutions de (1.0.4),

$$n(s,z) = n_0(X^{-1}(s,z)),$$

avec $(s,z) \mapsto X^{-1}(s,z)$ fonction C^1 telle que $X(t,X^{-1}(t,z)) = z$ pour tout z,t. Par conséquent, on a existence, unicité et régularité des solutions de (8.0.1). $\square$

Question : Que dire lorsque n_0 et/ou b ne sont plus réguliers (C^0, L^1...) ? Quel sens donner à la dérivation dans (8.0.1) ? Existe t'il des solutions ?

Réponse : On travaille avec la dérivée faible (qui étend la dérivée forte) donc au sens des Distributions.

Question : En approchant n_0 et/ou b par des suites de fonctions régulières (C^1, C_0^∞...), la suite de solutions fortes approche t'elle la/une solution faible (8.0.1) ? peut on en extraire une sous suite convergente ?

Réponses : Densité, Convergence, Points d'accumulations : Travail sur la topologie.

1.1 Réponse : Solutions faibles, dérivée faibles

Définition 1.1.1 *[19]Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction intégrable sur tout compact de Ω : $L^1_{loc}(\Omega)$. On définit la distribution $T_f \in D'$ par :*

$$T_f(\phi) := \int_\Omega f(x)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Par conséquent

$$T_\cdot : f \in L^1_{loc}(\Omega) \mapsto T_f \in D'$$

injecte $L^1_{loc}(\Omega)$ dans D'.

Définition 1.1.2 *[19]Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. On définit la dérivée faible de $T \in D'$ par :*

$$T'(\phi) := -T(\phi'), \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

On note que pour $f \in C^1(\Omega)$, on a

$$T'_f(\phi) \underset{=}{def.} - \int_\Omega f(x)\phi'(x)dx \underset{=}{I.P.P.} \int_\Omega f'(x)\phi(x)dx = T_{f'}(\phi), \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Par conséquent, la dérivation faible étend la dérivation forte définie sur C^1 (et c'est la seule façon de l'étendre de manière continue) et vérifie $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D'$ alors $T_n \to^{D'} T$ implique $T'_n \to^{D'} T'$.

De la même manière, pour étendre le problème

$$\text{(eq. principale)} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n(t,x) + b(t,x)\nabla n(t,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R} \\ n(0,x) = n_0(x) \end{cases} \tag{1.1.6}$$

au sens faible, on va multiplier par ϕ l'équation forte, considérer que les solutions sont régulières pour CONSTRUIRE le problème au sens faible :

$$\iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} [\frac{\partial}{\partial t} n(t,x) + b(t,x)\nabla n(t,x)]\phi(t,x)dtdx = 0,$$

par I.P.P.

$$-\iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} [\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) + div(b(t,x)\phi(t,x))]n(t,x)dtdx + \int_{\mathbb{R}^d} n_0(x)\phi(0,x)dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^1(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^d)$$

On note que $C_0^1(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^d)$ aurait pu tout aussi bien être remplacé par $C_0^\infty(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^d)$ ou par tout autre espace pour lequel ϕ aurait été dérivable et bien définit en $x = 0$. Il faut faire un choix d'espace (dual) !

Par exemple, faire le choix de $C_0^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$

$$-\iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} [\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) + div(b(t,x)\phi(t,x))]n(t,x)dtdx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d),$$

ne permet pas de conserver de l'information sur la condition au bord.

Par exemple, faire le choix de $C_0^1(]-\infty,T]\times\mathbb{R}^d)$

$$-\iint_{[0,T]\times\mathbb{R}^d}[\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x)+div(b(t,x)\phi(t,x))]n(t,x)dtdx+\int_{\mathbb{R}^d}n_0(x)\phi(0,x)dx-\int_{\mathbb{R}^d}n(T,x)\phi(T,x)dx=0,$$
$$\forall\phi\in C_0^1(]-\infty,T]\times\mathbb{R}^d),$$

permet d'avoir de l'information au temps $t=T$ de la solution.

Il n'y a pas unicité du problème faible, il va dépendre du choix d'espace dual.

1.2 Réponse : approximation de condition initiale C^0 ou L^∞

Par intégration par partie si $n(t,x)$ est une solution forte de (8.0.1), on a pour tout $T>0$:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \Big[\frac{\partial}{\partial t} n(t,x) + b(t,x)\nabla n(t,x)\Big]\phi(t,x)dxdt = 0, \forall \phi \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d) \\ n(0,x) = n_0(x) \end{cases} \tag{1.2.7}$$

et donc

$$\text{(eq. faible C1)} \int_0^T\!\!\int_{\mathbb{R}^d} n(t,x)\Big[-\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) - \nabla(b(t,x)\phi(t,x))\Big]dxdt$$
$$= -\int_{\mathbb{R}^d} n_0(x)\phi(0,x)dx + \int_{\mathbb{R}^d} n(T,x)\phi(T,x)dx = 0, \forall \phi \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d). \tag{1.2.8}$$

Par intégration par partie si $n(t,x)$ est une solution forte de (8.0.1), on a

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \Big[\frac{\partial}{\partial t} n(t,x) + b(t,x)\nabla n(t,x)\Big]\phi(t,x)dxdt = 0, \forall \phi \in D(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d) \\ n(0,x) = n_0(x) \end{cases} \tag{1.2.9}$$

et donc

$$\text{(eq. faible)} \int_0^\infty\!\!\int_{\mathbb{R}^d} n(t,x)\Big[-\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) - \nabla(b(t,x)\phi(t,x))\Big]dxdt$$
$$-\int_{\mathbb{R}^d} n_0(x)\phi(0,x)dx = 0, \forall \phi \in D(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d), \tag{1.2.10}$$

Théorème 1.2.1 *Sous les hypothèses $b \in C^1$, (1.0.2) et $n_0 \in C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ (resp. $L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$), il y a existence et unicité des solutions de (1.2.8). De plus, on a*

$$n(t, X(t,y)) = n_0(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^d, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{1.2.11}$$

les solutions sont constantes le long des caractéristiques et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\inf_{y\in[-M-|t|\|b\|_\infty, M+|t|\|b\|_\infty]^d} n_0(y) \le n(t,z) \le \sup_{y\in[-M-|t|\|b\|_\infty, M+|t|\|b\|_\infty]^d} n_0(y), \quad \forall z \in [-M,M]^d, \tag{1.2.12}$$

et pour tout M,

$$n \in L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d) \bigcap C(\mathbb{R}, C(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})) \quad (\textit{resp. } C(\mathbb{R}, \underset{M\in\mathbb{N}^*}{\cap} L^1(]-M,M[^d, dx, \mathbb{R}))).$$

Preuve du théorème d'existence-unicité de solutions faibles **Existence.** Soit $M > 0$, alors par troncature et régularisation

$$n_0^j = n_0 \chi_{[-j,j]} * \rho_j \in D(\mathbb{R}^d) \underset{j\to\infty}{\overset{C(]-M,M[^d)\ (resp.\ L^1(]-M,M[^d))}{\longrightarrow}} n_0$$

On note n^j la solution forte (et par conséquent faible) de (8.0.1) ayant pour condition initiale n_0^j. Par linéarité, $n^j - n^l$ est la solution forte (et par conséquent faible) de (8.0.1) ayant pour condition initiale $n_0^j - n_0^l$ et par (1.2.12), on a

$$\sup_{z\in[-M,M]^d} \|n^j(t,z) - n^l(t,z)\| \leq \sup_{z\in[-M-|t|\|b\|_\infty, M+|t|\|b\|_\infty]^d} \|n_0^j(z) - n_0^l(z)\|,$$

donc $(n^j)_j$ est de cauchy dans $C([0,T];C(]-M,M[^d))$ (resp. dans tous les $C([0,T];L^p(]-M,M[^d))$, $1 \leq p \leq \infty$) donc est convergente :

$$n^j \underset{j\to\infty}{\overset{C([0,T];C(]-M,M[^d))\ (resp.\ C([0,T];L^p(]-M,M[^d)),\ 1\leq p\leq\infty)}{\longrightarrow}} n$$

et par passage à la limite dans

$$\text{(eq. faible C1)} \int_0^T\!\!\int_{\mathbb{R}^d} n^j(t,x)\Big[-\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) - \nabla(b(t,x)\phi(t,x))\Big]dxdt$$
$$= -\int_{\mathbb{R}^d} n_0^j(x)\phi(0,x)dx + \int_{\mathbb{R}^d} n^j(T,x)\phi(T,x)dx = 0, \forall\phi \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d). \quad (1.2.13)$$

on obtient bien n solution de (1.2.8).

Unicité. Ainsi, si n et m sont deux solutions de (1.2.8) alors $n - m$ est solution de (1.2.8) avec une condition initiale nulle. Il suffit donc de traiter le cas de solutions de (1.2.8) avec $n_0 = 0$.

Lemme 1.2.2 *Sous les hypothèses du théorème, quelque soit $\psi \in C^1(\mathbb{R}^d)$ il existe $\phi \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ vérifiant*

$$\textit{(eq. principale duale)} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) + \nabla(b(t,x)\phi(t,x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R} \\ \phi(T,x) = \psi(x) \end{cases} \quad (1.2.14)$$

Par conséquent, si $n_0 = 0$ alors par (1.2.8) appliqué à la fonction ϕ du lemme précédent, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} n(T,x)\psi(x)dx = 0, \quad \forall\psi \in C^1(\mathbb{R}^d),$$

donc $n(T,.) = 0$ p.p. et ceci pour tout $T > 0$ donc n est la solution nulle. □

Chapitre 2

Notion de topologie

2.1 Définition de topologie

C'est la structure associée à la notion de convergence (de même que la structure de $\sigma-$algèbre est liée à l'intégration).

Définition 2.1.1 *[16, 3] Un ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une* **topologie** *si*
- $\Omega, \emptyset \in \mathcal{T}$
- *$\mathcal{T}$ est stable pour l'union quelconque.*
- *$\mathcal{T}$ est stable par intersections finies.*

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace topologique.
Les éléments d'une topologie sont des **ouverts***.*
Les complémentaires d'ouverts sont des **fermés***.*

Exemple 1 Topologies :
A) $\mathcal{T}_{discrète} = \mathcal{P}(\Omega)$ est la topologie discrète.
B) $\mathcal{T}_{grossière} = \{\emptyset, \Omega\}$ est la topologie grossière.
C) Soit $(\Omega, \|.\|)$ un espace métrique alors

$$\mathcal{T}_{\{\Omega,\|.\|,(\mathbb{R},|.|)\}} = \Big\{U \in \mathcal{P}(\Omega) \ : \ \forall x \in U \ \ \exists \epsilon_x > 0 \ tel\ que\ U \supset \{y \ : \ \|y - x\| < \epsilon\}\Big\}$$

est une topologie (dite métrique) et $(\Omega, \|.\|, \mathcal{T}_{\{\Omega,\|.\|,(\mathbb{R},|.|)\}})$ est un espace topologique.
D) Soit $A \subset \Omega$ et $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace topologique, $\mathcal{T}|_A = \{U \cap A \ : \ U \in \mathcal{T}\}$ est une topologie (la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur A).
E) Soit $f : \Omega \mapsto \Omega'$ une application et $(\Omega', \mathcal{T}')$ est un espace topologique, alors $f^{-1}(\mathcal{T}')$ est une topologie sur Ω.
F) $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux topologies sur Ω alors $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$ est une topologie sur Ω.
G) Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ alors $\mathcal{T} = \{\bigcup_{i \in I \ quelconque} \bigcap_{j \in J_i \quad finie} g_j, \quad g_i \in \mathcal{G}\}$ est la plus petite topologie contenant $\mathcal{G}$.

2.2 Définition de la notion de convergence

Définition 2.2.1 *[16, 3] Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x_n \in \Omega$, on dit que :*

A) $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ si $\forall O \in \mathcal{T} : x \in O\ \exists N > 0$ tel que $\forall n \geq N\ x_n \in O$.
B) x est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ si $\forall O \in \mathcal{T} : x \in O\ \forall N > 0\ \exists n \geq N\ x_n \in O$.

On peut traduire cela par :
A) "Quelque soit O ouvert contenant x, la suite est incluse dans O à partir d'un certain rang".
B) "Quelque soit O ouvert contenant x, O contient une infinité d'éléments de la suite".

Définition 2.2.2 *[16, 3] On dit que $\mathcal{T}$ est une topologie plus* **fine** *que $\mathcal{T}'$ si $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ (plus d'ouverts).*

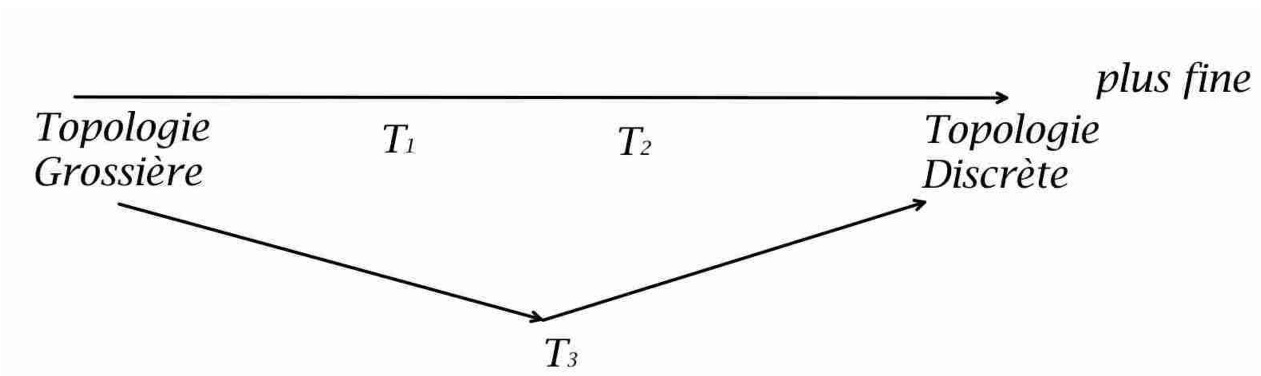

FIGURE 2.1 – La topologie grossière est la moins fine. La discrète est la plus fine. On ne peut pas toujours comparer les topologies.

On remarque que "moins une topologie contient d'ouverts, moins de conditions $\exists N > 0$ tel que $\forall n \geq N\ x_n \in O$ doivent être vérifiée", la convergence est donc d'autant plus facile à obtenir que la topologie est pauvre en ouvert.

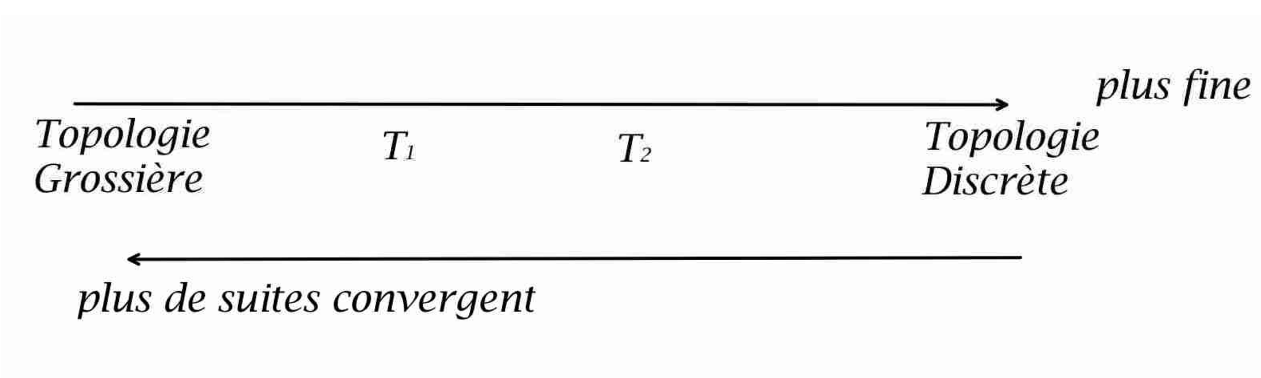

FIGURE 2.2 – La topologie grossière est la moins fine. La discrète est la plus fine. On ne peut pas toujours comparer les topologies.

Exemple 2 Topologies :
A) $\mathcal{T}_{discrète} = \mathcal{P}(\Omega)$ *: seules les suites constantes à partir d'un certain rang sont convergentes.*
B) $\mathcal{T}_{grossière} = \{\emptyset, \Omega\}$ *: toutes les suites sont convergentes vers n'importe quelle limite.*
C) Soit $(\Omega, \|.\|)$ *un espace métrique et*

$$\mathcal{T}_{\{\Omega,\|.\|,(\mathbb{R},|.|)\}} = \Big\{U \in \mathcal{P}(\Omega) \ : \ \forall x \in U \ \ \exists \epsilon_x > 0 \text{ tel que } U \supset \{y \ : \ \|y - x\| < \epsilon\}\Big\}$$

: la convergence se traduit par

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N \quad \|x_n - x\| \leq \epsilon.$$

On note que la convergence avec la topologie grossière n'est pas bonne, en effet, tout converge vers n'importe quoi.

Définition 2.2.3 *[16, 3] Un espace topologique* $(\Omega, \mathcal{T})$ *est dit* **séparé** *(de* **Hausdorff***)si pour tout couple* (x, y) *de points distincts de* Ω*, il existe un ouvert* U_x *contenant* x *et un ouvert* U_y *contenant* y *disjoints.*

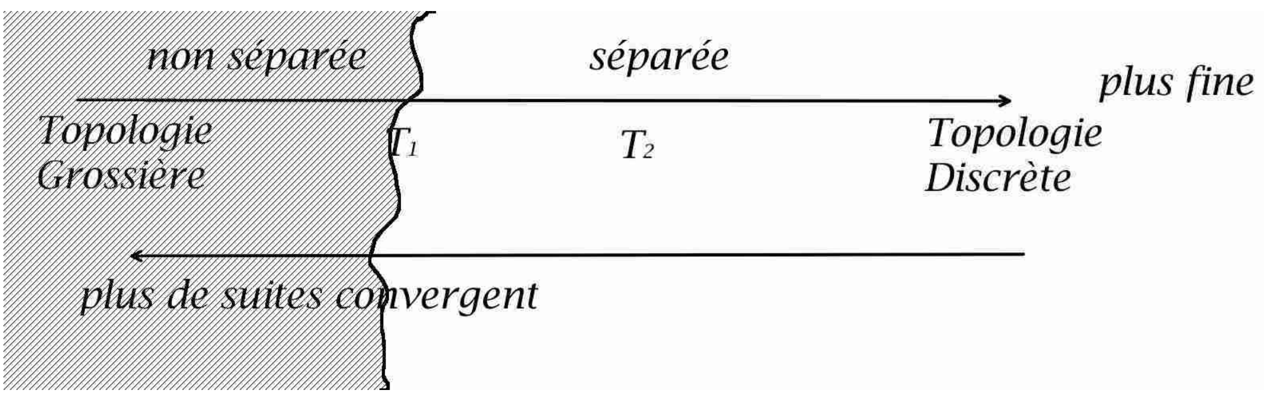

FIGURE 2.3 – On ne considère que les topologies séparées.

Proposition 2.2.4 *Soit* $(\Omega, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $x_n \in \Omega$*, telle que :*
A) $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$
B) $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} y$
Alors $x = y$*.*

Preuve Il suffit de remarquer que si cela n'était pas le cas ($x \neq y$) : à partir d'un certain rang N_1 : $x_n \in U_x$ (pour $n \geq N_1$) et à partir d'un certain rang N_2 : $x_n \in U_y$ (pour $n \geq N_2$) avec U_x un ouvert contenant x et U_y un ouvert contenant y disjoints. Ce qui est absurde. □

2.3 Définition de la notion de densité et compacité

Définition 2.3.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,*
x est un point **intérieur** *à A si il existe $U \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U \subset A$.*
L'ensemble des points **intérieurs** *$\mathring{A}^{\mathcal{T}}$ de A, pour la topologie $\mathcal{T}$, est l'intérieur de A.*
Le complémentaire de l'intérieur est **l'extérieur**.
La **fermeture** *$\overline{A}^{\mathcal{T}}$ d'un ensemble A, pour la topologie $\mathcal{T}$, est l'ensemble des points tel que tout ouvert contenant x admet une intersection non vide avec A.*
L'ensemble A est **dense** *dans $(\Omega, \mathcal{T})$ si $\overline{A}^{\mathcal{T}} = \Omega$.*

Définition 2.3.2 *[16, 3] On dit que $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace topologique* **compact** *s'il est séparé et si tout recouvrement de Ω par des ouverts contient un sous recouvrement de cardinal fini (ou de manière équivalente si toute intersection vide de fermé admet une intersection vide de cardinal fini).*

Définition 2.3.3 *[16, 3] On dit que $A \subset \Omega$, où $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace topologique, est compact si $(A, \mathcal{T}|_A)$ est compact.*

Proposition 2.3.4 *Soit $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur Ω avec $\mathcal{T}_2$ plus fine que $\mathcal{T}_1$:*
A) A est **dense** *dans $(\Omega, \mathcal{T}_2) \Rightarrow A$ est* **dense** *dans $(\Omega, \mathcal{T}_1)$*
B) $(\Omega, \mathcal{T}_2)$ est **compact** *$\Rightarrow (\Omega, \mathcal{T}_1)$ est* **compact**

Preuve Soit $x \in \Omega$, puisque tout ouvert de $\mathcal{T}_2$ contenant x admet une intersection non vide avec A par densité de A, a fortiori tout ouvert de $\mathcal{T}_1$ $(\subset \mathcal{T}_2)$ contenant x admet une intersection non vide avec A et A est dense dans Ω pour la topologie $\mathcal{T}_2$. De la même manière, moins il y a d'ouverts plus la condition de sous recouvrement fini est facile à obtenir. □

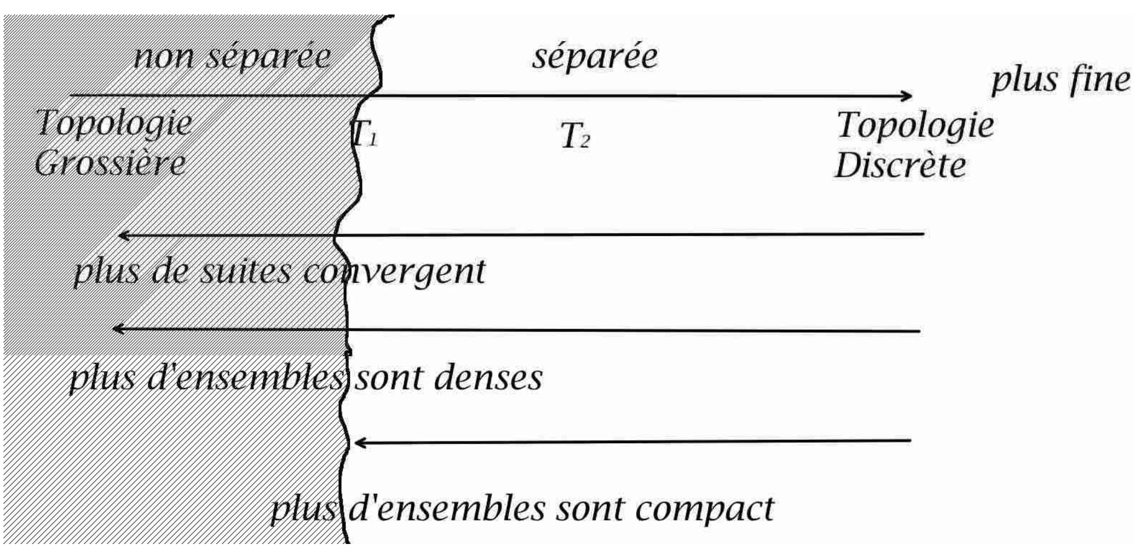

FIGURE 2.4 – Résumé sur les propriétés.

2.4 Notion de Continuité

Définition 2.4.1 *[16, 3] Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ et $(\Omega', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques alors on dit que f est* **continue** *en $x_0 \in \Omega$ si, étant donné un ouvert V' de $f(x_0)$ il existe un ouvert V de x_0 telle que $x \in V$ implique $f(x) \in V'$.*

$$f^{-1}(V') \subset V.$$

Définition 2.4.2 *[16, 3] Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ et $(\Omega', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques alors on dit que f est* **continue** *si elle l'est en tout point de Ω.*

$$f^{-1}(\mathcal{T}') \in \mathcal{T}.$$

On note

$$\mathcal{C}((\Omega, \mathcal{T}), (\Omega', \mathcal{T}'))$$

l'ensemble des applications continues de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(\Omega', \mathcal{T}')$.

Proposition 2.4.3 *[16, 3] Soit Ω un ensemble, $(\Omega', \mathcal{T}')$ un espace topologique et $(f_i)_{i \in I}$ un ensemble de fonctions de Ω dans Ω', alors il existe une topologie*

$$\mathcal{T}_{\{\Omega, (f_i)_{i \in I}, (\Omega', \mathcal{T}')\}}$$

la moins fine rendant continue les applications $(f_i)_{i \in I}$.

Proposition 2.4.4 *[16, 3] Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace topologique, Ω' un ensemble et $(f_i)_{i \in I}$ un ensemble de fonctions de Ω dans Ω', alors il existe une topologie*

$$\mathcal{T}_{\{(\Omega, \mathcal{T}), (f_i)_{i \in I}, \Omega'\}}$$

la plus fine rendant continue les applications $(f_i)_{i \in I}$.

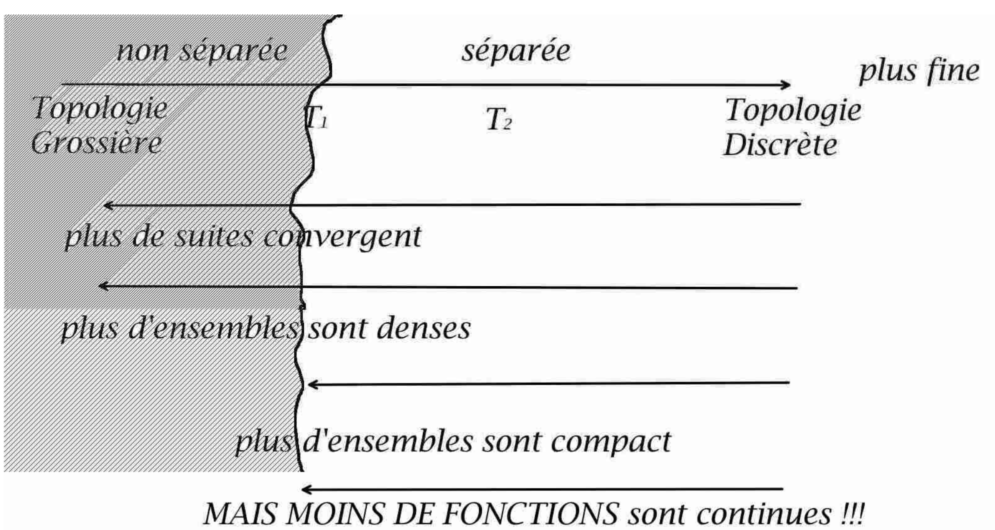

FIGURE 2.5 – Résumé sur les propriétés.

2.5 Topologie $faible$ et $faible^*$ pour des espaces vectoriels normés

Définition 2.5.1 *[16, 3] Soit $(\Omega, \|.\|, \mathcal{T}_{\|.\|})$ un espace vectoriel topologique normé : on appelle dual topologique de Ω l'ensemble $\Omega' = \mathcal{L}((\Omega, \mathcal{T}_{\|.\|})), (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}}))$ des applications linéaires continue de Ω dans $\mathbb{R}$ munies de leur topologie respective.*

On peut définir sur Ω' une norme

$$|||\phi||| = \sup_{x\in\Omega\,:\,\|x\|=1} |\phi(x)|$$

et donc une topologie associé à cette norme. De plus, on peut définir sur Ω la **topologie faible** $\mathcal{T}_{\{\Omega,\Omega',(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{R}})\}}$, *plus petite topologie sur Ω rendant continues les applications de Ω' :*

$$\mathcal{L}((\Omega, \mathcal{T}_{\|.\|})), (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})) \subset \mathcal{C}((\Omega, \mathcal{T}_{\{\Omega,\Omega',(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{R}})\}}), (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})).$$

Par conséquent, en utilisant le dual de Ω' (appelé bidual) $\Omega'' = \mathcal{L}((\Omega', \mathcal{T}_{|||.|||}), (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}}))$ l'ensemble des applications linéaires continues de Ω' dans $\mathbb{R}$ munies de leur topologie respective, on peut doter Ω' de la topologie faible. De sorte que sur Ω', trois topologies coexistent :

- *la* **topologie forte** $\mathcal{T}_{forte} = \mathcal{T}_{|||.|||}$.

- *la* **topologie faible** $\mathcal{T}_{faible} = \mathcal{T}_{\{\Omega',\Omega'',(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{R}})\}}$, *plus petite topologie rendant continues les applications de Ω'', i.e. linéaires continue de Ω' dans $\mathbb{R}$ munie de leur topologies métriques,*

- *la* **topologie faible-*** $\mathcal{T}_{faible^*} = \mathcal{T}_{\{\Omega',(i_x)_{x\in\Omega},(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{R}})\}}$, *plus petite topologie rendant continues les applications*

$$i_x : \phi \in \Omega' \mapsto \phi(x) \in \mathbb{R}$$

avec $x \in \Omega$.

Proposition 2.5.2 *[16, 3] Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et $\Omega' = \mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications linéaires de Ω dans $\mathbb{R}$ alors*

$$\mathcal{T}_{grossière} \subset \mathcal{T}_{faible^*} \subset \mathcal{T}_{faible} \subset \mathcal{T}_{forte} \subset \mathcal{T}_{discrète}$$

Théorème 2.5.3 *[16, 3](Séparabilité et convergence faible*) Soit E un espace normé séparable, i.e. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}\ (dénombrable)} \subset E$ dense dans E. Alors*

$$d(\phi, \psi) = \sum_{x_n\neq 0} \frac{|\phi(x_n) - \psi(x_n)|}{\|x_n\|} \text{ est une distance sur } E',$$

telle que la topologie faible est la même que celle associée à cette distance : $(E', \mathcal{T}_{faible^*})$ est métrisable.*

Théorème 2.5.4 *[16, 3](Convexité et convergence faible) Soit E un espace normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant faiblement vers x dans E, alors pour toute fonction ϕ convexe et continue (pour la topologie forte) à valeur réelle, on a*

$$\phi(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \phi(x_n).$$

Théorème 2.5.5 *[16, 3](Banach-Alaoglu) Soit E un espace normé. L'ensemble $B_C = \{f \in E' : |||f||| \leq C\} \subset E$ (dual fort) avec $C > 0$ est un compact faible* de E'.*

2.6 Comparaison avec le théorème d'Ascoli sur les fonctions continues et espace $\mathcal{C}((\Omega,\mathcal{T}),(\Omega',\mathcal{T}'))$

Espace $C((\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{R}}),(L^q(\mathbb{R},dx,\mathbb{R}),\mathcal{T}_{L^q}))$.

L'espace $C((\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{R}}),(L^q(\mathbb{R},dx,\mathbb{R}),\mathcal{T}_{L^q}))$ est l'espace des fonctions

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto (t \mapsto f(x,t)) \in L^q(\mathbb{R},dx,\mathbb{R})$$

c'est à dire

$$\forall x_0\ \forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[\ \int |f(t,x_0)-f(t,x)|^q dt < \epsilon,$$

ce qui revient à : pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to x_0} \int |f(t,x_0)-f(t,x)|^q dt = 0.$$

Proposition 2.6.1 *L'espace $C((\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{R}}),(L^q(\mathbb{R},dx,\mathbb{R}),\mathcal{T}_{L^q}))$ avec $1 \leq q < \infty$, munie de la norme*

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int |f(t,x)|^q dt\right)^{1/q},$$

est un espace vectoriel normé complet : espace de Banach, i.e., toute suite de Cauchy est convergente. Le résultat reste vraie lorsque q est infini, il faut alors prendre le sup essentiel.

Théorème 2.6.2 *[16, 3](Ascoli) Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ un espace topologique métrique compact et $(\Omega',\mathcal{T}')$ un espace munie de sa topologie métrique.*

$$B \subset \mathcal{C}((\Omega,\mathcal{T}),(\Omega',\mathcal{T}')),$$

est d'adhérence compacte si et seulement si elle vérifie :
I) ("Bornée" : compacité)

$$\forall x \in \Omega,\quad A(x) = \overline{\{f(x),\quad f \in B\}}^{T'} \text{ est compacte.}$$

II) ("A variation bornée" : équicontinuité)

$$\forall x \in \Omega,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists V \in \mathcal{V}(\{x\})\ :\ \sup_{f\in B,\quad y\in V} d(f(x),f(y)) \leq \epsilon.$$

Chapitre 3

Fonctions mesurable, Mesures et Espaces $L^p(\Omega, \mu, \Omega')$

Définition 3.0.3 *[15, 1] Un ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une σ-**algèbre/field** si*
- $\Omega \in \mathcal{F}$
- il est stable pour le complémentaire
- il est stable pour l'union (donc pour l'intersection) dénombrable.

C'est la structure liée à l'intégration. Les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés des ensembles mesurables.

Définition 3.0.4 *[15, 1] Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesuré, une application $\mu : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}_+ \cup \infty$, est une mesure et $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesurable si :*
1) $\mu(\emptyset) = 0$,
2) $(A_n)_n \subset \mathcal{F}$: $\mu(\coprod_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ ($\sigma-$ additive),
3) $\sigma-$finie $\mu(\Omega_n) < \infty$ et $\bigcup_n \Omega_n = \Omega$.
On définit l'intégrale pour les ensembles mesurables

$$\int_\Omega \chi_A(x)\ \mu(dx) = \mu(A),$$

puis par linéarité et limite croissante de fonction positive : Ω' est un espace de Banach :

$$\int_\Omega \lim_n \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}(x)\ \mu(dx) = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mu(A_k), \quad (\alpha_k)_k \subset \Omega', \quad \alpha_k \geq 0,$$

et pour les fonctions telles que $\int_\Omega \|f\|(x)\ \mu(dx) < \infty$: $L^1(\Omega, \mu, \Omega')$

$$\int_\Omega .\ \mu(dx) \quad : \ f \in L^1(\Omega, \mu, \Omega') \mapsto \int_\Omega f(x)\ \mu(dx) \in \Omega'$$

Définition 3.0.5 *[15, 5] Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesurable et $(\Omega', \leq, \|.\|)$ un espace topologique normé munie d'une relation d'ordre, on note $L^p(\Omega, \mu, \Omega')$ pour $p \in [1, \infty[$, l'ensemble des fonctions $f : \Omega \mapsto \Omega'$ telles que $\int_\Omega \|f\|^p(x)\ \mu(dx) < \infty$. Une fonction f est dans $L^\infty(\Omega, \mu, \Omega')$ s'il existe $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mu(\mathcal{N}) = 0$ et $\sup_{x \in \Omega/\mathcal{N}} \|f\|(x) < \infty$ (on parle de sup essentiel).*

3.1 Exemples.

Proposition 3.1.1 *[15, 5] L'espace $L^p(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$ avec $1 \leq p < \infty$, munie de la norme*

$$\|f\| = (\int |f(t)|^p dt)^{1/p},$$

est un espace vectoriel normé complet : espace de Banach, i.e., toute suite de Cauchy est convergente. Le résultat reste vraie lorsque p est infini, il faut alors prendre le sup essentiel.

Espace $L^p(\mathbb{R}, dx, L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R}))$.

L'espace $L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions de puissance p intégrables (ou essentiellement bornées lorsque $q = \infty$). L'espace $L^p(\mathbb{R}, dx, L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R}))$ est l'espace des fonctions f telles que

$$\int \|f\|^p(x) dx < \infty,$$

c'est à dire $\int (\int |f(t,x)|^q dt)^{p/q} dx < \infty$ (et $supess$ pour p ou $q = \infty$). Donc par exemple, $f \in L^p(\mathbb{R}, dx, L^p(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R}))$ si $\int \int |f(t,x)|^p dt dx < \infty$, ce qui est équivalent à $f \in L^p(\mathbb{R}^2, dx, \mathbb{R})$ pour $p \in [1, \infty[$ (et $supess$ pour $p = \infty$).

Proposition 3.1.2 *L'espace $L^p(\mathbb{R}, dx, L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R}))$ avec $1 \leq p, q < \infty$, munie de la norme*

$$\|f\| = (\int (\int |f(t,x)|^q dt)^{p/q} dx)^{1/p},$$

est un espace vectoriel normé complet : espace de Banach, i.e., toute suite de Cauchy est convergente. Le résultat reste vraie lorsque p et/ou q est infini, il faut alors prendre le sup essentiel.

3.2 Espace $L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$ $1 < q < \infty$

L'espace $L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions de puissance q intégrables.

Proposition 3.2.1 *[15, 5](Holder) On a*

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \quad p, q, r \geq 1$$

et

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^{\theta}_{L^p(\Omega)}\|g\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}, \quad p, q, r \geq 1 \quad \theta \in [0,1]$$

donc $L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega) \subset \bigcap_{s \in [p,q]} L^s(\Omega)$.

Proposition 3.2.2 *[15, 5](Résultat de dualité lorsque $1 < p < \infty$) L'espace $L^p(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$ munie de la topologie associé à la norme $\|f\| = (\int |f(t)|^p dt)^{1/p}$, a pour espace dual : $L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$ avec $1/p + 1/q = 1$. Toute application linéaire continue de $L^p(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ munie de leur topologie "canonique" est de la forme*

$$T : f \in L^p(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R}) \mapsto \int g(x)f(x)dx$$

avec $g \in L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$ où $1/p + 1/q = 1$. De plus, on a

$$\sup_{f \in L^p(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R}),\ (\int |f|^p(x))^{1/p} = 1} |\int g(x)f(x)dx| = (\int |f|^q(x))^{1/q}.$$

On note que le bidual de $L^p(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$ est lui même.

Par conséquent, sur $L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$, deux topologies coexistent :

- la **topologie forte** $\mathcal{T}_{forte} = \mathcal{T}_{|||.|||}$, celle associée à la norme $(\int |.|^q dx)^{1/q}$.

- la **topologie faible** $\mathcal{T}_{faible} = \mathcal{T}_{\{L^q(\mathbb{R},dx,\mathbb{R}), "L^p(\mathbb{R},dx,\mathbb{R})", (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})\}}$, plus petite topologie rendant continues les applications de $L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})'$, i.e. linéaires continues de $L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ munie de leur topologies métriques,

- la **topologie faible-*=topologie faible** $\mathcal{T}_{faible^*} = \mathcal{T}_{\{L^q(\mathbb{R},dx,\mathbb{R}), (i_g)_{g \in L^p(\mathbb{R},dx,\mathbb{R})}, (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})\}}$, plus petite topologie rendant continues les applications

$$i_g : T \in L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R}) \mapsto T(g) = \int g(x)T(x)dx \in \mathbb{R},$$

avec $g \in L^p(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$.

Proposition 3.2.3 *[15, 5] La topologie* **topologie faible-*** *est séparée et métrisable (car $L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$ est séparable).*

3.2.1 Convergence faible, faible-*

$\mathcal{T}_{forte}$ $\Longrightarrow$	$\mathcal{T}_{faible} = \mathcal{T}_{faible^*}$
$f_n \overset{n\to\infty}{\to} f$ $\int \lvert f_n(x) - f(x)\rvert^q dx \underset{n\to\infty}{\to} 0$	$f_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} f$ $\forall g \in L^p(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R}) : \int (f_n(x) - f(x))g(x)dx \underset{n\to\infty}{\to} 0$
Compacité forte Kolmogoroff - Uniformement Bornée - A variation Bornée - Pas de perte de masse à l'infini	Compacité faible * Banach Aologlu - Uniformement Bornée

Table 3.1 – Topologie, Convergence et Compacité : L^p ($p \in]1 : \infty[$

Théorème 3.2.4 *[15, 5](Kolmogoroff) Pour qu'une partie $B \subset L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$ soit compact fort dans $L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$ il faut et il suffit qu'elle soit fermé et vérifie les trois hypothèses :*
I) **"Bornée"** *: $\sup_{f\in B} \int |f(x)|^p dx < \infty$*
II) **"Sans perte de masse à l'infini"** *: $\forall \epsilon > 0\ \exists K$ compact de $\mathbb{R}$ tel que $\sup_{f\in B} \int_{^cK} |f(x)|^p dx < \epsilon$*
III) **"A variation bornée"** *: $\forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0$ tel que $\sup_{\{|h|\leq \eta,\quad f\in B\}} \int |f(x+h) - f(x)|^p dx < \epsilon$.*

Par conséquent, dès qu'il existe $g \in L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$ tel que

$$|f_n|(x) \leq g(x) \quad et \quad |\frac{d}{dx} f_n(x)| \leq g(x),$$

alors on peut extraire une sous suite convergente (forte) de f_n dans $L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$.

Théorème 3.2.5 *[15, 5](Banach-Alaoglu) L'ensemble $B = \{f \in L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R}) \ : \ (\int |f(x)|^q dx)^{1/q} \leq 1\}$ est un compact faible* de $L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$. Par conséquent, dès qu'une suite est* **bornée** *dans $L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$, on peut en extraire une sous suite faible* convergente.*

Proposition 3.2.6 *[15, 5]*
Si $\|f_n\|_{L^q(\mathbb{R},dx,\mathbb{R})} \leq C$ et Supp$f_n \subset K$ (K compact), alors $f_n \overset{p.p.}{\underset{n\to\infty}{\to}} f \quad \Rightarrow f_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} f$.
Soit une suite $(f_n)_n \subset L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$, alors $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f \quad \Rightarrow$ il existe une sous suite $f_{n_k} \overset{p.p.}{\underset{n\to\infty}{\to}} f$.
Soit une suite $(f_n)_n \subset L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$,

$$f_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup^*} f \quad \Rightarrow \sup_n (\int |f_n(x)|^q dx)^{1/q} < \infty \quad et \quad (\int |f(x)|^q dx)^{1/q} \leq \liminf_{n\to\infty} (\int |f_n(x)|^q dx)^{1/q}$$

Soit une suite $(f_n)_n \subset L^q(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$ et $(g_n)_n \subset L^p(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$

$$f_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup^*} f \quad et \quad g_n \underset{n\to\infty}{\to} g \Rightarrow \int f_n(x) g_n(x) dx \underset{n\to\infty}{\to} \int f(x) g(x) dx$$

3.3 Espaces $L^1(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})/L^\infty(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$

L'espace $L^1(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions intégrables, $L^\infty(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées.

Proposition 3.3.1 *[15, 5](Résultat dualité : $L^1(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})' = L^\infty(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$)*
L'espace $L^1(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$ munie de la topologie associé à la norme $\|f\| = (\int |f(t)|dt)$, a pour espace dual : $L^\infty(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$. Toute application linéaire continue de $L^1(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ munie de leur topologie "canonique" est de la forme

$$T : f \in L^1(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R}) \mapsto \int g(x)f(x)dx$$

avec $g \in L^\infty(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$. De plus, on a

$$\sup_{f\in L^1(\mathbb{R},dx,\mathbb{R}),\ (\int |f|^1(x))^{1/p}=1} |\int g(x)f(x)dx| = supess|g|.$$

ATTENTION le bidual de $L^1(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$ n'est pas lui même.

Par conséquent, sur $L^\infty(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R}) = (L^1(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R}))'$, pour l'instant, on a :

- la **topologie forte** $\mathcal{T}_{forte} = \mathcal{T}_{\||.\||}$, celle associée à la norme ($suppess|.|$).

- la **topologie faible-*** $\mathcal{T}_{faible^*} = \mathcal{T}_{\{L^\infty(\mathbb{R},dx,\mathbb{R}),(i_g)_{g\in L^1(\mathbb{R},dx,\mathbb{R})},(\mathbb{R},\mathcal{T}_\mathbb{R})\}}$, plus petite topologie rendant continues les applications

$$i_g : T \in L^\infty(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R}) \mapsto T(g) = \int g(x)T(x)dx \in \mathbb{R},$$

avec $g \in L^1(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$.

Par conséquent, sur $L^1(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$, pour l'instant, on a :

- la **topologie forte** $\mathcal{T}_{forte} = \mathcal{T}_{\||.\||}$, celle associée à la norme (intégrale $|.|$).

- la **topologie faible** $\mathcal{T}_{faible} = \mathcal{T}_{\{L^1(\mathbb{R},dx,\mathbb{R}),(i_g)_{g\in L^\infty(\mathbb{R},dx,\mathbb{R})},(\mathbb{R},\mathcal{T}_\mathbb{R})\}}$, plus petite topologie rendant continues les applications

$$i_g : T \in L^1(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R}) \mapsto T(g) = \int g(x)T(x)dx \in \mathbb{R},$$

avec $g \in L^\infty(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$.

3.3.1 Mesures de Radon

Définition 3.3.2 *On note $C_K((\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}}), (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}}))$ l'espace des fonctions continue de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ dans lui même à support compact : nulle en dehors d'un compact. Le dual de $C_K((\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}}), (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}}))$ est*

$$C'_K = \mathcal{M}_{Radon}(\mathbb{R})$$

: l'espace des mesures de Radon sur $\mathbb{R}$.

On note que

$$C_K \subset L^1 \Rightarrow (L^1)' = L^\infty \subset \mathcal{M}_{Radon},$$

avec une injection triviale : $i : g \mapsto \int .g(x)dx \in \mathcal{M}_{Radon}$.

Théorème 3.3.3 *[21] Le dual de L^∞ est un espace de mesures finiement additive.*

Preuve Soit $T \in (L^\infty)'$ alors

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g), \quad \forall f, g \in L^\infty$$

et

$$|T(f_n)| \leq C suppess(|f_n|).$$

Donc, pour tout $B \in \mathcal{F}$ ($\sigma-$Algèbre) de référence :

$$\mu_T : B \in \mathcal{F} \mapsto T(\chi_B)$$

est une application vérifiant :
1) $\mu_T(\emptyset) = 0$ et pour tout N de mesure de Lebesgue nulle $T(N) = 0$; $\mu_T(\Omega) < \infty$,
2) Soit $A, B \in \mathcal{F}$: $\mu_T(A \coprod B) = T(\chi_{A \coprod B}) = T(\chi_A + \chi_B) = T(\chi_A) + T(\chi_B)$,

Il n'y a pas ici de σ- additivité. Soit f essentiellement bornée alors, on pose

$$A_i^n(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \in [-\|f\|_\infty + \|f\|_\infty(\frac{i}{n}); -\|f\|_\infty + \|f\|_\infty(\frac{i+1}{n})] \right\}, \quad i = 0...2n-1$$

$$|T(f) - \sum_{i=0}^{2n-1} (-\|f\|_\infty + \|f\|_\infty(\frac{i}{n}))\mu_T(A_i^n(f))| \leq C/n$$

et donc $T(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{2n-1}(-\|f\|_\infty + \|f\|_\infty(\frac{i}{n}))\mu_T(A_i^n(f)) := \int f(x)\mu_T(dx)$, intégrale de Radon associé à une "mesure" finiement addivite.

3.3.2 Résumé : Sur $L^\infty(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$

$\mathcal{T}_{forte}$ $\Longrightarrow$	$\mathcal{T}_{faible}$ $\Longrightarrow$	$\mathcal{T}_{faible^*}$
$f_n \overset{n\to\infty}{\to} f$ $\sup_x \lvert f_n(x) - f(x)\rvert \overset{n\to\infty}{\to} 0$	$f_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} f$ $\forall \nu$ (mesure finiement additive) : $\int (f_n(x) - f(x))\nu(dx) \overset{n\to\infty}{\to} 0$	$f_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup^*} f$ $\forall g \in L^1 : \int (f_n(x) - f(x))g(x)dx \overset{n\to\infty}{\to} 0$
Compacité forte Ascoli (Dans $C^0(Compact)$) - Uniformement Bornée - A variation Bornée	Compacité faible ? ?	Compacité faible * Banach Aologlu - Uniformement Bornée $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists \mu_x$ (mesure de Young) : $\forall G \in C^0 \ : \ G(f_n) \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup^*} \quad x \mapsto \int G(y)\mu_x(dy)$

TABLE 3.2 – Topologie, Convergence et Compacité : L^∞

Proposition 3.3.4 *Soit une suite $(f_n)_n \subset L^\infty(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$,*

$$f_n \underset{n\to\infty}{\overset{p.p.}{\to}} f \quad \Leftarrow f_n \underset{n\to\infty}{\to} f \quad \Rightarrow f_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} f \quad \Rightarrow f_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup^*} f.$$

Soit une suite $(f_n)_n \subset L^\infty(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$,

$$f_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup^*} f \quad \Rightarrow \sup_n (supess|f_n(x)|) < \infty \quad et \quad (supess|f(x)|) \leq \liminf_{n\to\infty} (supess|f_n(x)|)$$

Soit une suite $(f_n)_n \subset L^\infty(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$ et $(f_n)_n \subset L^1(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$

$$f_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup^*} f \quad et \quad g_n \underset{n\to\infty}{\to} g \Rightarrow \int f_n(x) g_n(x)dx \underset{n\to\infty}{\to} \int f(x)g(x)dx.$$

Théorème 3.3.5 *[15, 5](Banach-Alaoglu) L'ensemble $B = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R}) \ : \ supess|f| \leq 1\}$ est un compact faible* de $L^\infty(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$.*

Par conséquent, dès qu'une suite est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$, on peut en extraire une sous suite faible* convergente. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une mesure μ_x (dite mesure de Young) telle que

$$\forall G \in \mathcal{C}((\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathbb{R}), (\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathbb{R})) \ : \ G(f_n) \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup^*} \quad x \mapsto \int G(y)\mu_x(dy)$$

3.3.3 Résumé : Sur $L^1(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$

$\mathcal{T}_{forte}$ $\Longrightarrow$	$\mathcal{T}_{faible}$ $\Longrightarrow$	$\mathcal{T}_{faible^*}$ en injectant L^1 dans les mesures de Radon
$f_n \overset{n\to\infty}{\to} f$ $\sup_x \lvert f_n(x) - f(x)\rvert \overset{n\to\infty}{\to} 0$	$f_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} f$ $\forall g \in L^\infty : \int (f_n(x) - f(x))g(x)dx$	$f_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup^*} f$ $\forall g \in C^0_K : \int (f_n(x) - f(x))g(x)dx \overset{n\to\infty}{\to} 0$
Compacité forte Kolmogoroff - Uniformement Bornée - A variation Bornée - Pas de perte de masse en l'infini	Compacité faible Pettis - Uniformement Bornée - Pas de concentration de la masse	Compacité faible * Banach Aologlu - Uniformement Bornée

TABLE 3.3 – Topologie, Convergence et Compacité

Proposition 3.3.6 *[15, 5] Soit une suite $(f_n)_n \subset L^1(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$ et $(g_n)_n \subset L^\infty(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$*

$$f_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup^*} f \quad \Rightarrow \sup_n(\int |f_n(x)|dx) < \infty \quad et \quad (\int |f(x)|dx) \leq \liminf_{n\to\infty}(\int |f_n(x)|dx)$$

$$f_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} f \quad et \quad g_n \underset{n\to\infty}{\to} g \Rightarrow \int f_n(x)g_n(x)dx \underset{n\to\infty}{\to} \int f(x)g(x)dx$$

Soit une suite $(f_n)_n \subset L^1(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$, alors $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f \quad \Rightarrow$ il existe une sous suite $f_{n_k} \overset{p.p.}{\underset{n\to\infty}{\to}} f$.

Théorème 3.3.7 *(Dunford-Pettis) Soit $B \subset L^1(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$, telle que*

$$(Equi\text{-}intégrabilité\ ) \left\{ \begin{array}{ll} a) & \sup_{f\in B} \int |f|(x)dx < \infty, \\ et & \\ b) & \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ : \underset{f\in B, \quad A\in\mathcal{F} \,:\, \int_A dx<\delta}{\sup} \int |f|(x)dx < \epsilon, \end{array} \right.$$

alors B est un <u>compact faible</u> de L^1.

Théorème 3.3.8 *[15, 5](Banach-Alaoglu) Soit $B \subset L^1(\mathbb{R}, dx, \mathbb{R})$, telle que*

$$\sup_{f\in B} \int |f|(x)dx < \infty,$$

alors $(\mu_f)_{f\in B} \subset \mathcal{M}_{Radon}$ avec $\sup_{f\in B} |||\mu_f||| = \sup_{f\in B} \int_\Omega |\mu_f(dx)| \leq \sup_{f\in B} \int |f|(x)dx < \infty$ et donc B est un <u>compact faible</u> de $\mathcal{M}_{Radon}$ et de toute suite bornée de L^1 on peut en extraire une sous suite convergente faible * dans $\mathcal{M}_{Radon}$.*

3.4 Extention $L^p(([0,T],\mathcal{T}),X)$ avec X espace de Hilbert

Proposition 3.4.1 *[13] Si $V = L^2(([0,T],\mathcal{T}),X)$ avec X espace de Hilbert alors*

$$V' = L^2(([0,T],\mathcal{T}),X').$$

Le résultat reste vrai pour si $V = L^p(([0,T],\mathcal{T}),X)$ avec X espace de Banach reflexif, i.e. $X'' = X$, alors

$$V' = L^q(([0,T],\mathcal{T}),X') \quad avec \quad 1/p + 1/q = 1, \quad q \in [1,\infty[.$$

Proposition 3.4.2 *[13](Lions-Aubin) Soit $T > 0$, X espace de Hilbert, $p \in]1,\infty[$ et $(f_n)_n \subset L^p(([0,T],\mathcal{T}),X)$* **bornée**, *telle que*

I) **"Bornée"** *: $(f_n)_n$ bornée dans $L^p(([0,T],\mathcal{T}),K)$ avec l'injection $i : K \hookrightarrow X$ compacte*

II) **"A variation bornée"** *: $(\frac{\partial}{\partial t} f_n)_n$ bornée uniformément dans $L^p(([0,T],\mathcal{T}),K')$*

ALORS on peut extraire une sous suite convergente dans $L^p(([0,T],\mathcal{T}),X)$.

3.5 En langage probabiliste

On note $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P}_r)$ un espace probabilisé, et (X_n) une suite de variables aléatoires

Définition 3.5.1 *Une suite $(X_n)_n$ converge :*
a) "p.s" vers X : corresponds à $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{p.p.}{\rightarrow}} X$
b) "L^1" vers X : corresponds à $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P}_r)}{\rightarrow}} X$
c) "c.p." (en probabilité) vers X : corresponds à $\sup_{\epsilon>0} \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_r(\Delta_\epsilon^n) = 0$ avec $\Delta_\epsilon^n = \{\omega \ : \ |X_n - X|(\omega) > \epsilon\}$.

En injectant les fonctions mesurables dans l'espace des mesures bornées sur $\mathbb{R}$:

$$i : X \hookrightarrow A \mapsto \mathcal{P}_r(X^{-1}(A)).$$

on a des convergences associées à des topologies (rendant continues certaines classes de fonctions)
e) $\mu_{X_n} \underset{n\to\infty}{\overset{cv.\ vaguement}{\rightarrow}} \mu_X$ si $\int \phi(x)\mu_{X_n}(dx) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \int \phi(x)\mu_X(dx)$ pour tout $\phi \in C_K$.
f) $\mu_{X_n} \underset{n\to\infty}{\overset{cv.\ faiblement}{\rightarrow}} \mu_X$ si $\int \phi(x)\mu_{X_n}(dx) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \int \phi(x)\mu_X(dx)$ pour tout $\phi \in C_0$.
g) $\mu_{X_n} \underset{n\to\infty}{\overset{cv.\ etroitement}{\rightarrow}} \mu_X$ si $\int \phi(x)\mu_{X_n}(dx) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \int \phi(x)\mu_X(dx)$ pour tout $\phi \in C_b$.
Nb : la convergence étroite est la convergence en Loi.

Proposition 3.5.2 *On a*

$$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P}_r)}{\rightarrow}} X \ \underset{sous\ hypo.\ de\ domination}{\overset{pour\ une\ sous\ suite}{\substack{\Rightarrow\\ \Leftarrow}}} \ X_n \underset{n\to\infty}{\overset{p.p.}{\rightarrow}} X \ \underset{pour\ une\ sous\ suite}{\substack{\Rightarrow\\ \Leftarrow}} \ X_n \underset{n\to\infty}{\overset{cv.\ proba.}{\rightarrow}} X \ \overset{avec\ équi\text{-}intégrabilité}{\Rightarrow} \ X_n \underset{n\to\infty}{\overset{L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P}_r)}{\rightarrow}} X$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_{X_n} \underset{n\to\infty}{\overset{cv.\ etroitement}{\rightarrow}} \mu_X \ \underset{\mu_{X_n}(\mathbb{R})\to\mu_X(\mathbb{R})}{\substack{\Rightarrow\\ \Leftarrow}} \ \mu_{X_n} \underset{n\to\infty}{\overset{cv.\ faiblement}{\rightarrow}} \mu_X \ \Rightarrow \ \mu_{X_n} \underset{n\to\infty}{\overset{cv.\ vaguement}{\rightarrow}} \mu_X$$

De plus $\mathcal{M}_c = \{\mu$ mesures positives : $\mu(\mathbb{R}) \le c\}$ est un compact pour la topologie faible (=topologie vague).

Chapitre 4

Distributions et Espaces de Sobolev

4.1 Espaces de fonctions tests et Duaux topologiques

Définition 4.1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$.*

L'espace $C_0(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.
L'espace $C_c(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues à support compact.
L'espace $C_b(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues bornées.

L'espace $D(\Omega)$ est l'espace des fonctions $C_c^\infty(\Omega)$ (infiniment dérivables à supports compacts).
L'espace $S(\Omega)$ est l'espace des fonctions infiniment dérivables à décroissance rapide de toutes ses dérivées.

Définition 4.1.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$.*

L'espace $C_0'(\Omega) = \mathcal{M}_{Radon}$ est l'espace des mesures de Radon.
L'espace $C_c'(\Omega)$ est un espace de mesures contenant les mesures de Radon.
L'espace $C_b'(\Omega)$ est un espace de mesures contenue dans les mesures de Radon.

L'espace $D'(\Omega)$ est l'espace des distributions.
L'espace $S'(\Omega)$ est l'espace des distributions tempérées.

On peut, par exemple, munir ces duaux de la topologie $faible - *$, et donc

Définition 4.1.3 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}, T \subset D'$, $T_n \underset{n\to\infty}{\overset{D'}{\to}} T$ si $T_n(\phi) \underset{n\to\infty}{\to} T(\phi), \quad \forall \phi \in D(\Omega)$.*
On note que $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{L^p}{\rightharpoonup^*}} f \quad OU \quad f_n \underset{n\to\infty}{\overset{C_0}{\rightharpoonup^*}} f \Rightarrow T_{f_n} \underset{n\to\infty}{\overset{D'}{\to}} T_f$.

4.2 Extension de la notion de dérivée : Dérivée faible

Définition 4.2.1 *[19]Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $T \in D'(\Omega)$ (forme linéaire continue sur $D(\Omega)$), on défini la dérivée faible*

$$T' : \phi \mapsto -T(\phi')$$

On remarque que toute distribution est infiniement dérivable au sens des distributions (sens faible).

Proposition 4.2.2 *[19] Soit une suite $(T_n)_{n\in[0,N]} \subset D'(\Omega)$ convergeant au sens des distributions vers $T \in D'$ alors pour tout $k \geq 0$: $T_n^{(k)}$ converge vers $T^{(k)}$.*

Définition 4.2.3 *[19]Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $f \in L^p(\Omega)$, par abus on dit que $f' \in L^q(\Omega)$ s'il existe $g \in L^q(\Omega)$ tel que*

$$T_g = (T_f)'$$

Proposition 4.2.4 *[19]Les espaces $C^k(\Omega)$ (resp. $L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$) s'injecte dans $D'(\Omega)$ via*

$$i : f \in C^k(\Omega) \hookrightarrow T_f : \phi \mapsto \int_\Omega f(x)\phi(x)dx$$

l'injection est continue et compacte, i.e., pour tout borné $B \subset C^k(\Omega)$ (resp. $L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$) : $\overline{\{T_f \ : \ f \in B\}}^{\mathcal{T}_{D'}}$ est compact. De plus, si $k \geq 1$,

$$\forall f \in C^k(\Omega), \quad \forall j \leq k \ : \ T_{f^{(j)}} = (T_f)^{(j)}$$

La dérivée faible est donc une extension (en fait la seule possible) continue de la dérivée forte !

Proposition 4.2.5 *[19](Formule des sauts) Soit une suite de réels $(a_n)_{n\in[0,N]}$ strictement croissante et $f_n \in C^1(]a_n, a_{n+1}[) \cap C([a_n, a_{n+1}])$ alors*

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{N} \chi_{]a_n,a_{n+1}[}(x) f_n(x)$$

admet pour dérivée faible

$$(T_f)' = T_g + \sum_{n=0}^{N} (f_n(a_n) - f_{n-1}(a_n))\delta_{a_n},$$

avec $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{N} \chi_{]a_n,a_{n+1}[}(x) f_n'(x)$.

4.3 Espaces de Sobolev

Définition 4.3.1 *[5, 8]Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. On note, lorsque $m \geq 0$,*

$$W^{p,m}(\Omega) = \Big\{ f \in L^p(\Omega) \ \ \forall k \leq m \ : \ f^{(k)} \in L^p(\Omega) \Big\},$$

avec l'abus $f' \in L^p(\Omega)$ s'il existe $g \in L^p(\Omega)$ tel que $T_g = (T_f)'$. On peut définir

$$\|f\|_{W^{p,m}(\Omega)} = \sum_{k=0}^{m} \|f^{(k)}\|_{L^p(\Omega)},$$

une norme faisant de $W^{p,m}(\Omega)$ un espace de Banach. Lorsque $p = 2$, on note $H^m = W^{2,m}$, sur lequel on peut définir un produit scalaire

$$(f, g)_{H^m(\Omega)} = \sum_{k=0}^{m} (f^{(k)}, g^{(k)})_{L^2(\Omega)},$$

faisant de $H^m(\Omega)$ un espace de Hilbert.

Définition 4.3.2 *[5, 8]Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. On note*

$$W^{p,-m}(\Omega) = \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} a_{i,j} (T_{f_j})^{(i)}, \quad N \geq 1, \quad (a_{i,j})_{i=1\ldots N,\, j=1\ldots m} \subset \mathbb{R}, \quad (f_j)_{j=1}^{N} \subset L^p(\Omega) \Big\}.$$

Définition 4.3.3 *[5, 8]Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. On note $W_0^{p,m}(\Omega) = \overline{D}^{\mathcal{T}_{W^{p,m}}}$, sous espace de Banach de $W^{p,m}(\Omega)$. On note que $W^{p,-m}(\Omega) = (W_0^{p',m})'$.*

Densité des fonctions régulières

Proposition 4.3.4 *[5, 8]Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ alors les fonctions de $D(\Omega)$ sont denses dans*

$$\overline{D}^{\mathcal{T}_{L^p}} = L^p(\Omega), \quad p \in [1, \infty[$$
$$\overline{D}^{\mathcal{T}_{W^{p,m}}} = W^{p,m}(\Omega), \quad p \in [1, \infty[,$$
$$\overline{D}^{\mathcal{T}_{D'}} = D'(\Omega),$$
$$\overline{D}^{C_K} = C_K(\Omega), \quad \overline{D}^{C_0} = C_0(\Omega),$$

MAIS pas dans L^∞ ni dans $C(\Omega)$. Pour s'en convaincre, prendre l a fonction $f = 1_\Omega$ alors pour tout éléments de $D(\Omega)$, on a $\|f - 1\|_\infty \geq 1$.

Toncature et régularisation. Méthode : Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $p \in [1, \infty[$,

$$\text{Convergence Dominée implique} \ : \ f_n = f|_{[-n,n]} \underset{n\to\infty}{\overset{L^p}{\to}} f$$

$$\text{Convergence Dominée implique} \ : \ \sum_{k=1}^{m} \chi_{I_n^m} \int_{I_n^m} f_n(x)dx \underset{m\to\infty}{\overset{L^p}{\to}} f_n, \quad I_n^m =]-n+2*(k-1)n/m, -n+2*kn/m[$$

$$\text{Conv.Dominée implique} \ : \ \sum_{k=1}^{m} \chi_{I_n^m} * \rho_j \int_{I_n^m} f_n(x)dx \in D \underset{m\to\infty}{\overset{L^p}{\to}} f_n, \quad \rho_j(.) = j\rho(.j) \quad \rho \in D, \text{ positive et } \int \rho = 1.$$

4.4 Intégration par parties et opérateur de Trace

Définition 4.4.1 *[5, 8]Soit Ω un ouvert C^1 de $\mathbb{R}^N$, on note*

$$\gamma_0 : f \in C(\bar{\Omega}) \mapsto f|_{\partial(\bar{\Omega})} \in C(\partial(\bar{\Omega})),$$

de plus si $f, g \in C^1(\Omega) \bigcap C(\bar{\Omega})$ alors

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} g(x) dx = \int_{\partial(\bar{\Omega})} \gamma_0(fg)(s) n_i(s) d\sigma(s) - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} g(x) dx$$

avec $n_i(s) =$ normale sortante à $\partial(\bar{\Omega})$ produit scalaire avec e_i (direction de la dérivation).

Proposition 4.4.2 *[5, 8]Soit Ω un ouvert C^1 de $\mathbb{R}^N$ alors on peut étendre l'opérateur de restriction au bord à des applications "moins" régulières*

$$\gamma_0 : f \in W^{p,1}(\Omega) \mapsto \gamma_0(f) \in L^p(\partial(\bar{\Omega})),$$

telle que $\gamma_0(f) = f|_{\partial(\bar{\Omega})}$ dès que $f \in W^{p,1}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. De plus, on a l'inégalité de trace

$$\|\gamma_0(f)\|_{L^p(\partial(\bar{\Omega}))} \leq C(U, p, N) \|f\|_{W^{p,1}(\Omega)}.$$

Proposition 4.4.3 *[5, 8]Soit Ω un ouvert C^1 de $\mathbb{R}^N$ alors pour tout $f \in W^{p,1}(\Omega)$ et $\phi \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$,*

$$\int_{\Omega} \phi(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) dx = \int_{\partial(\bar{\Omega})} \gamma_0(f)(s) \phi(s) n_i(s) d\sigma(s) - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x) dx.$$

Proposition 4.4.4 *[5, 8]Pour $p \geq 1$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors :*
1) pour $N > mp$ et $q \in [p, Np/(N - mp)]$, on a l'injection continue

$$i : f \in W^{p,m}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N).$$

Ce résultat reste vrai sur un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^N$, l'injection est de plus compacte pour $q \in [1, Np/(N - mp)[$ et

$$\|.\|_{L^q} \leq C_{N,p,\Omega} \|.\|_{W^{p,1}(\Omega)}. \quad \textit{Glagliardo-Nirenberg-Sobolev}$$

2) On a

$$i : f \in W^{N,1}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b(\mathbb{R}^N) \cap_{q \geq N} L^q(\mathbb{R}^N).$$

3) pour $p > N$ alors

$$i : f \in W^{p,1}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b(\mathbb{R}^N).$$

3) pour $m > E(N/p)$ alors

$$i : f \in W^{p,m}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^j(\mathbb{R}^N),$$

pour tout $j < m - E(N/p)$. Ce résultat reste vrai sur un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^N$ (l'espace d'arrivé est $C_b^j(\overline{\Omega})$), l'injection est de plus compacte.
4) pour $q \in [1, N/(N - 1)[$, on a l'injection compacte

$$i : f \in \mathcal{M}_{Radon}(\Omega) \hookrightarrow W^{q,-1}(\Omega).$$

avec Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^N$.

Chapitre 5

Applications

5.1 Transport linéaire avec champ et condition initiale irréguliers

Par intégration par partie si $n(t,x)$ est une solution forte de

$$\text{(eq. principale)} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n(t,x) + b(t,x)\nabla n(t,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R} \\ n(0,x) = n_0(x) \end{cases} \tag{5.1.1}$$

avec champs de vecteur et condition initiale réguliers, on a :

$$\begin{cases} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \Big[\frac{\partial}{\partial t} n(t,x) + b(t,x)\nabla n(t,x)\Big]\phi(t,x)dxdt = 0, \forall \phi \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d) \\ n(0,x) = n_0(x) \end{cases} \tag{5.1.2}$$

et donc

$$\text{(eq. faible)} \int_0^\infty\!\!\int_{\mathbb{R}^d} n(t,x)\Big[-\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) - \nabla(b(t,x)\phi(t,x))\Big]dxdt$$
$$= -\int_{\mathbb{R}^d} n_0(x)\phi(0,x)dx = 0, \forall \phi \in D(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d). \tag{5.1.3}$$

Théorème 5.1.1 *Sous les hypothèses $b \in L^\infty([\mathbb{R}, W^{1,1}(\mathbb{R}^d))$ et $n_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$, il y a existence de solutions $L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ de (1.2.9).*

On remarque que l'on perd l'unicité ici.

Preuve
Par densité de fonctions $b \in C^1$, (1.0.2) dans $L^1([-T,T];W^{1,1}(\mathbb{R}^d))$ on peut (troncature et régularisation) approcher b par une suite

$$b_j \in C^1 \ et \ (1.0.2) \ \underset{j\to\infty}{\overset{L^1([-T,T];W^{1,1}(\mathbb{R}^d))}{\rightarrow}} b.$$

On en déduit l'existence de la suite $(n_j)_j$ de solutions faibles (1.2.8) donc de (1.2.10) pour la suite de champ de vecteur $(b_j)_j$ et vérifiant donc

$$\|n_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})} \leq \|n_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})}.$$

La suite est bornée $L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ donc converge faible* (en prenant une sous suite) vers $n \in L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ (Banach Alaoglu)

$$n_j \underset{n\to\infty}{\overset{L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})}{\rightharpoonup^*}} n$$

Or $b_j\nabla\phi$ et $\phi\nabla b_j$ converge $L^1([-T,T];L^1(\mathbb{R}^d))$ donc

$$\nabla(b_j(t,x)\phi(t,x)) \underset{j\to\infty}{\overset{L^1([-T,T];L^1(\mathbb{R}^d))}{\rightarrow}} \nabla(b(t,x)\phi(t,x)),$$

et par la proposition 3.3.4 :

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d} n_j(t,x)\Big[-\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x)-\nabla(b_j(t,x)\phi(t,x))\Big]dxdt \underset{j\to\infty}{\rightarrow} \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d} n(t,x)\Big[-\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x)-\nabla(b(t,x)\phi(t,x))\Big]dxdt.$$

Par conséquent n est solution de (1.2.10). □

5.2 Chimiotaxie : Equations cinétiques

$$\text{(eq. principale)}\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}n(t,x,\zeta)+\zeta\nabla_x n(t,x,\zeta)+K[n](t,x,\zeta)=0, \quad x\in\mathbb{R}^d, \quad t\in\mathbb{R}, \quad \zeta\in B \\ n(0,x,\zeta)=n_0(x,\zeta) \\ K[f](t,x,\zeta)=\int_B k(t,x,\zeta',\zeta)f(t,x,\zeta)d\zeta'-\int_B k(t,x,\zeta,\zeta')f(t,x,\zeta')d\zeta' \end{cases} \tag{5.2.4}$$

Cette fois ci, x est la position et ζ le vecteur vitesse. L'opérateur

$$\frac{\partial}{\partial t}n(t,x,\zeta)+\zeta\nabla_x n(t,x,\zeta)\mapsto \text{ phase de "run" : déplacement dans la direction } \zeta$$

$$K[f](t,x,\zeta)\mapsto \text{ changement de direction avec une certaine probabilité } k(t,x,\zeta,\zeta')$$

On note

$$k_T:=\int_B k(t,x,\zeta',\zeta)d\zeta'$$

Hypothèse I $k(t,x,\zeta,\zeta')\in[\underline{k},\overline{k}]\subset]0,\infty[$ pour tout t,x,ζ,ζ'.

Théorème 5.2.1 *Sous les hypothèses I et $n_0\in L^1(\mathbb{R}^d\times B)$ (resp. $L^1_+(\mathbb{R}^d\times B)$) : il existe une unique solution n de (8.0.2) appartenant à l'espace de Banach*

$$E:=C(\mathbb{R}_+,L^1(\mathbb{R}^d\times B)) \quad (\textit{resp. } E_+:=C(\mathbb{R}_+,L^1_+(\mathbb{R}^d\times B))).$$

Preuve
Etape 1. L'équation de transport, à g fixé dans E (resp E_+), admet une unique solution (caractéristiques)

$$\text{(eq. principale)}\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}n(t,x,\zeta)+\zeta\nabla_x n(t,x,\zeta)+k_T(t,x,\zeta)n(t,x,\zeta)=G(t,x,\zeta), \quad x\in\mathbb{R}^d, \quad t\in\mathbb{R}, \quad \zeta\in B \\ n(0,x,\zeta)=n_0(x,\zeta) \end{cases} \tag{5.2.5}$$

avec $G(t,x,\zeta):=\int_B k(t,x,\zeta,\zeta')g(t,x,\zeta')d\zeta'$ vérifiant :

$$n(t,x,\zeta)=n_0(x-t\zeta,\zeta)e^{-\int_0^t k_T(s,x-\zeta t,\zeta)ds}+\int_0^t G(s,x-(t-s)\zeta,\zeta)e^{-\int_s^t k_T(w,x-\zeta t,\zeta)dw}ds \tag{5.2.6}$$

Etape 2. On considère l'opérateur $S:ge^{\lambda t}\in E_T$ (*resp.* $E_{T,+}$) $\mapsto ne^{\lambda t}\in E_T$ (*resp.* $E_{T,+}$) avec $\lambda\in\mathbb{R}$, $T>0$ et

$$E_T:=C([0,T],L^1(\mathbb{R}^d\times B)) \quad (\textit{resp. } E_{T,+}:=C([0,T],L^1_+(\mathbb{R}^d\times B))).$$

Alors, on a

$$S(ge^{\lambda t})-S(\tilde{g}e^{\lambda t})=me^{\lambda t},$$

avec m solution de (par linéarité)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}m(t,x,\zeta)+\zeta\nabla_x m(t,x,\zeta)+k_T(t,x,\zeta)m(t,x,\zeta)=G(t,x,\zeta)-\tilde{G}(t,x,\zeta), \quad x\in\mathbb{R}^d, \quad t\in\mathbb{R}, \quad \zeta\in B \\ m(0,x,\zeta)=0. \end{cases} \tag{5.2.7}$$

En intégrant entre 0 et T, on trouve

$$\frac{d}{dt}\iint|m(t,x,\zeta)e^{\lambda t}|dxd\zeta+\iint[k_T(t,x,\zeta)-\lambda]|m(t,x,\zeta)e^{\lambda t}|dxd\zeta \leq \overline{k}Vol(B)\iint|g(t,x,\zeta)e^{\lambda t}-\tilde{g}(t,x,\zeta)e^{\lambda t}|dxd\zeta.$$

On pose $u(t) := \iint|m(t,x,\zeta)e^{\lambda t}|dxd\zeta$ alors

$$\frac{d}{dt}u(t)+[Vol(B)\underline{k}-\lambda]u(t) \leq \overline{k}Vol(B)\|ge^{\lambda\cdot}-\tilde{e}^{\lambda\cdot}\|_{E\ (resp\ E_+)}$$

et donc

$$\frac{d}{dt}(u(t)e^{[Vol(B)\underline{k}-\lambda]t}) \leq \overline{k}Vol(B)e^{[Vol(B)\underline{k}-\lambda]t}\|(ge^{\lambda\cdot}-\tilde{g}e^{\lambda\cdot}\|_{E\ (resp\ E_+)}.$$

En intégrant entre 0 et T, on a

$$u(T) \leq \frac{\overline{k}Vol(B)}{[Vol(B)\underline{k}-\lambda]}(1-e^{-[Vol(B)\underline{k}-\lambda]T})\|ge^{\lambda\cdot}\|_{E\ (resp\ E_+)}$$

par conséquent

$$\|S(ge^{\lambda\cdot})-S(\tilde{g}e^{\lambda\cdot})\|_{E_T\ (resp\ E_{T,+})} \leq \frac{\overline{k}Vol(B)}{[Vol(B)\underline{k}-\lambda]}(1-e^{-[Vol(B)\underline{k}-\lambda]T})\|ge^{\lambda\cdot}-\tilde{g}e^{\lambda\cdot}\|_{E_T\ (resp\ E_{T,+})}.$$

Ainsi, l'opérateur S vérifie, en prenant $\overline{k}Vol(B)/[Vol(B)\underline{k}-\lambda]=1$, i.e. $Vol(B)\underline{k}-\lambda=\overline{k}Vol(B)$:

$$\|S(ge^{\lambda\cdot})-S(\tilde{g}e^{\lambda\cdot})\|_{E_T\ (resp\ E_{T,+})} \leq \underbrace{(1-e^{-[Vol(B)\underline{k}-\lambda]T})}_{=c_T<1}\|ge^{\lambda\cdot}-\tilde{g}e^{\lambda\cdot}\|_{E_T\ (resp\ E_{T,+})},$$

c'est à dire : S est contractant dans E_T (resp $E_{T,+}$) espace de Banach. Il existe une unique solution n à (point fixe de Banach [10, 20])

$$S(ne^{\lambda\cdot}) = ne^{\lambda}$$

et donc n est solution, unique, de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}n(t,x,\zeta)+\zeta\nabla_x n(t,x,\zeta)+k_T(t,x,\zeta)n(t,x,\zeta)=\int_B k(t,x,\zeta,\zeta')n(t,x,\zeta')d\zeta',\ x\in\mathbb{R}^d,\ t\in\mathbb{R},\ \zeta\in B \\ n(0,x,\zeta)=n_0(x,\zeta) \end{cases}$$

□

Corollaire 5.2.2 *Sous les hypothèses I et $n_0 \in L^1(\mathbb{R}^d\times B)$ (resp. $L^1_+(\mathbb{R}^d\times B)$) la solution n de (8.0.2) vérifie :*
1) Conservation de la masse :

$$\iint n(t,x,\zeta)dxd\zeta = \iint n_0(x,\zeta)dxd\zeta, \quad t\geq 0$$

2) Contraction :

$$\frac{d}{dt}\iint|n(t,x,\zeta)|dxd\zeta \leq 0, \quad t\geq 0$$

3) lorsque $k(t,x,\zeta,\zeta')=\sigma_S(\zeta,\zeta')/M(\zeta)$ avec $M>0$ et σ_S symétrique alors

$$\|n/M^{\frac{p-1}{p}}\|_{L^p(\mathbb{R}^d\times B)} \leq \|n_0/M^{\frac{p-1}{p}}\|_{L^p(\mathbb{R}^d\times B)}, \quad \forall t\geq 0, \forall p\in[1,\infty].$$

Preuve
Point 1 et 2. Direct, il suffit d'intégrer (resp. $*signe(n)$ et intégrer).

Point 3. On multiplie l'équation principale par $\frac{n^{p-1}(t,x,\zeta)}{M^{p-1}(\zeta)}$

$$\left\{\begin{array}{c} (\frac{\partial}{\partial t}n(t,x,\zeta)+\zeta\nabla_x n(t,x,\zeta)+K[n](t,x,\zeta))*\frac{n^{p-1}}{M^{p-1}}=0, \quad x\in\mathbb{R}^d, \quad t\in\mathbb{R}, \quad \zeta\in B \\ n(0,x,\zeta)=n_0(x,\zeta) \\ K[f](t,x,\zeta)=\int_B k(t,x,\zeta',\zeta)f(t,x,\zeta)d\zeta'-\int_B k(t,x,\zeta,\zeta')f(t,x,\zeta')d\zeta' \end{array}\right. \tag{5.2.8}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{1}{p}(\frac{\partial}{\partial t}\frac{n^p}{M^{p-1}}+\zeta\nabla_x\frac{n^p}{M^{p-1}})+K(t,x,\zeta)=0, \quad x\in\mathbb{R}^d, \quad t\in\mathbb{R}, \quad \zeta\in B \\ \frac{n^p}{M^{p-1}}(0,x,\zeta)=\frac{n_0^p}{M^{p-1}}(0,x,\zeta) \\ K(t,x,\zeta)=\int_B \sigma_S(\zeta',\zeta)\frac{n^p}{M^p}(t,x,\zeta)d\zeta'-\int_B \sigma_S(\zeta,\zeta')\frac{n^{p-1}}{M^{p-1}}(t,x,\zeta)\frac{n}{M}(t,x,\zeta')d\zeta' \end{array}\right. \tag{5.2.9}$$

Or pour q tel que $1/p+1/q=1$ (i.e. $q(p-1)=p$) on a

$$\frac{n}{M}(t,x,\zeta')\frac{n^{p-1}}{M^{p-1}}(t,x,\zeta)\leq\frac{1}{p}(\frac{n}{M})^p(t,x,\zeta')+\frac{1}{q}(\frac{n}{M})^{q(p-1)}(t,x,\zeta)=\frac{1}{p}(\frac{n}{M})^p(t,x,\zeta')+\frac{1}{q}(\frac{n}{M})^p(t,x,\zeta)$$

En intégrant, on trouve (en utilisant la symétrie de σ_S)

$$\frac{1}{p}(\frac{d}{dt}\iint\frac{n^p}{M^{p-1}}dxd\zeta)+\iint(\int\sigma_S(\zeta',\zeta)d\zeta')(\frac{n}{M})^p(t,x,\zeta)dxd\zeta\leq\iint(\int\sigma_S(\zeta',\zeta)d\zeta')(\frac{n}{M})^p(t,x,\zeta)dxd\zeta$$

donc $\frac{d}{dt}\iint\frac{n^p}{M^{p-1}}dxd\zeta\leq 0$ et le point 3. est démontré. □

Chapitre 6

Equations de renouvellement

Equations de transport

Théorème 6.0.3 *Sous les hypothèses*

$$A_1. \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}),$$
$$A_2. \quad n_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$
$$A_3. \quad f(0) = n_0(0), \quad (\frac{d}{dt}f)(0) = (\frac{d}{dx}n_0)(0),$$

il existe une unique solution forte de l'équation

$$\text{(eq. principale)} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}n(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}n(t,x) = 0, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \\ n(t,0) = f(t), \\ n(0,x) = n_0(x). \end{cases} \tag{6.0.1}$$

De plus, on a

$$n(t,x) = \begin{cases} f(t-x), & x \leq t \\ n_0(x-t), & x \geq t. \end{cases} \tag{6.0.2}$$

et n est aussi solution de l'équation au sens faible

$$\iint_{\mathbb{R}_+^2} n(t,x)[-\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}\phi(t,x)]dtdx = \int_{\mathbb{R}_+} n_0(x)\phi(0,x)dx + \int_{\mathbb{R}_+} f(t)\phi(t,0)dt, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2). \tag{6.0.3}$$

---

1) Montrer que $m(t,x) := \begin{cases} f(t-x), & x \leq t \\ n_0(x-t), & x \geq t. \end{cases}$ est solution au sens fort de (8.0.2).

2) Montrer que si n_1 et n_2 sont solutions de (8.0.2) alors $n_1 = n_2$ (on pourra utiliser les caractéristiques sur $n_1 - n_2$).

3) Montrer que si n est solution de (8.0.2) alors n est aussi solution de l'équation (6.0.3).

Théorème 6.0.4 *Sous les hypothèses, $p \in]1, \infty[$, $T > 0$,*

$$\begin{array}{ll} B_1. & f \in L^p(\mathbb{R}), \\ B_2. & n_0 \in L^p(\mathbb{R}), \end{array}$$

il existe une solution $n \in L^p([0,T] \times \mathbb{R}_+)$telle que

$$\iint_{\mathbb{R}_+} n(t,x)[-\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}\phi(t,x)]dtdx = \int_{\mathbb{R}_+} n_0(x)\phi(0,x)dx + \int_{\mathbb{R}_+} f(t)\phi(t,0)dt, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2). \tag{6.0.4}$$

De plus, on a

$$n(t,x) \overset{p.p.}{=} \begin{cases} f(t-x), & x \leq t \\ n_0(x-t), & x \geq t. \end{cases} \tag{6.0.5}$$

Par densité, il existe des suites $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(n_0^k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $f^k \underset{k\to\infty}{\overset{L^p(\mathbb{R})}{\to}} f$, $\quad n_0^k \underset{k\to\infty}{\overset{L^p(\mathbb{R})}{\to}} n_0$ et vérifiant A_1, A_2 et A_3. On note n_k la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}n_k(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}n_k(t,x) = 0, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \\ n_k(t,0) = f^k(t), \\ n_k(0,x) = n_0^k(x). \end{cases}$$

---

1) Montrer que la suite $(n_k)_k$ vérifie pour tout $k, j \in \mathbb{N}$ et $T < \infty$:

$$\iint_{[0,T]\times\mathbb{R}_+} |n_k - n_j|^p(t,x)dtdx \leq T(\int_{\mathbb{R}} |f^k - f^j|^p(u)du + \int_{\mathbb{R}} |n_0^k - n_0^j|^p(v)dv).$$

2) En déduire que pour tout $T > 0$, $(n_k)_k$ converge dans $L^p([0,T] \times \mathbb{R}_+)$ et que la limite n est solution de l'équation faible (6.0.4) et vérifie (6.0.5).

Théorème 6.0.5 *Sous les hypothèses* $p \in [1, \infty[$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a \in]0, \infty[$, $b \geq 0$, $C \in \mathbb{R}_+$ *:*

B_1. $\quad f \in C^0(\mathbb{R}), \quad |f(x)| \leq a|x| + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

B_2. $\quad n_0 \in L^p(\mathbb{R})$,

B_3. $\quad B \in L^q(\mathbb{R}), \quad B \geq 0$,

il existe une solution (au sens faible) $n \in L^p([0,T] \times \mathbb{R}_+)$ *de*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n(t,x) + \frac{\partial}{\partial x} n(t,x) = 0, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \\ n(t,0) = f(\int_{\mathbb{R}_+} B(y) n(t,y) dy), \\ n(0,x) = n_0(x). \end{cases} \tag{6.0.6}$$

vérifiant p.p.

$$n(t,x) = \begin{cases} f(\int_{\mathbb{R}_+} B(y) n(t-x,y) dy), \quad x \leq t \\ n_0(x-t), \quad x \geq t. \end{cases} \tag{6.0.7}$$

et $g(t) := f(\int_{\mathbb{R}_+} B(y) n(t,y) dy), \quad t \geq 0$, *vérifie*

$$g(t) = f\Big(\int_{\mathbb{R}_+} (B\chi_{\mathbb{R}_+})(t-x) g(x) dx + \int_{[t,\infty[} B(x) n_0(x-t) dx \Big), \tag{6.0.8}$$

avec $\chi_{\mathbb{R}_+}(y) = 1$ *si* $y \geq 0$ *et* 0 *sinon. De plus, on a*

$$T < \frac{1}{a^p (\int_{\mathbb{R}_+} B^q(y) dy)^{p/q}} \Rightarrow \begin{cases} \iint_{[0,T] \times \mathbb{R}_+} |n|^p(t,y) dy dt \leq C_0. \\ \int_{[0,T]} |f(\int_{\mathbb{R}_+} B(y) n(t,y) dy)|^p dt \leq C_1 \end{cases} \tag{6.0.9}$$

avec $C_0 = \dfrac{1}{1 - Ta^p (\int_{\mathbb{R}_+} B^q(y) dy)^{p/q}} \Big[2^p T^2 b^p + T \int_{\mathbb{R}} |n_0|^p(v) dv \Big]$ *et* $C_1 = 2^p \Big(Tb^p + a^p (\int_{\mathbb{R}_+} B^q(y) dy)^{p/q} C_0 \Big)$.

---

1) Montrer que sous les hypothèses B_1 et B_3 on a

$$m \in L^p([0,T]\times\mathbb{R}_+) \Longrightarrow \int_{[0,T]} |f(\int_{\mathbb{R}_+} B(y)m(t,y)dy)|^p dt \leq 2^p \Big(Tb^p + a^p (\int_{\mathbb{R}_+} B^q(y)dy)^{p/q} \iint_{[0,T]\times\mathbb{R}_+} m^p(t,y)dtdy \Big)$$

$$m_1, m_2 \in L^p([0,T]\times\mathbb{R}_+) \Longrightarrow$$

$$\int_{[0,T]} |f(\int_{\mathbb{R}_+} B(y)m_1(t,y)dy) - f(\int_{\mathbb{R}_+} B(y)m_2(t,y)dy)|^p dt \leq C^p (\int_{\mathbb{R}_+} B^q(y)dy)^{p/q} \iint_{[0,T]\times\mathbb{R}_+} |m_1 - m_2|^p(t,y)dydt$$

2) Soit $\mathcal{T}$ l'application qui à la fonction m associe n solution faible de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n(t,x) + \frac{\partial}{\partial x} n(t,x) = 0, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \\ n(t,0) = f(\int_{\mathbb{R}_+} B(y)m(t,y)dy), \\ n(0,x) = n_0(x), \end{cases} \tag{6.0.10}$$

Lorsque $T < \dfrac{1}{C^p(\int_{\mathbb{R}_+} B^q(y)dy)^{p/q}}$, montrer que sous les hypothèses B_1, B_2 et B_3, $\mathcal{T}$ est une application contractante de $L^p([0,T]\times\mathbb{R}_+)$ dans $L^p([0,T]\times\mathbb{R}_+)$.

3) En déduire l'existence de solutions de (6.0.6) sous les hypothèses B_1, B_2 et B_3 et vérifiant (6.0.7).

4) Montrer que $g(t) := f(\int_{\mathbb{R}_+} B(y)n(t,y)dy), \quad t \geq 0$, vérifie l'équation (6.0.8).

5) Montrer que (6.0.9) est vérifié.

Généraliser le résultat pour $V \in L^q(\mathbb{R})$, $R \in L^p(\mathbb{R}_+)$ et $(f_k)_k \subset L^p(\mathbb{R}_+)$ une suite convergeant faible * dans $L^p(\mathbb{R}_+)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (avec $p \in]1, \infty[$) : Soit $V \in L^2(\mathbb{R})$, $R \in L^2(\mathbb{R})$ et $(f_k)_k \subset L^2(\mathbb{R}_+)$ une suite convergeant faible * dans $L^2(\mathbb{R}_+)$. On construit la suite h_k pour $k \in \mathbb{N}$ de terme général

$$h_k(t) = \int_{\mathbb{R}_+} V(t-x) f_k(x) dx + R(t)$$

a) Montrer que la suite $(h_k)_k$ converge presque partout.

b) Montrer que pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|h_k|(t) \leq \|f_k\|_{L^2} \|V\|_{L^2} + |R(t)|$.

c) Montrer que la suite $(h_k)_k$ converge au sens des distributions.

Théorème 6.0.6 *Sous les hypothèses* $p \in [1, \infty[$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a \in]0, \infty[$, $b \geq 0$ *:*

$$\begin{array}{ll} C_1. & f \in C^0(\mathbb{R}), \quad |f(x)| \leq a|x| + b, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ C_2. & n_0 \in L^p(\mathbb{R}), \quad C_3. \quad B \in L^q(\mathbb{R}), \quad B \geq 0. \end{array}$$

il existe une solution (au sens faible) $n \in L^p([0,T] \times \mathbb{R}_+)$ *de*

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t} n(t,x) + \frac{\partial}{\partial x} n(t,x) = 0, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \\ n(t,0) = f(\int_{\mathbb{R}_+} B(y) n(t,y) dy), \\ n(0,x) = n_0(x). \end{array} \right. \tag{6.0.11}$$

vérifiant p.p.

$$n(t,x) = \left\{ \begin{array}{c} f(\int_{\mathbb{R}_+} B(y) n(t-x,y) dy), \quad x \leq t \\ n_0(x-t), \quad x \geq t. \end{array} \right. \tag{6.0.12}$$

Par densité, on a l'existence de suites $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $f^k \underset{k\to\infty}{\overset{C0(\mathbb{R})}{\to}} f$ et vérifiant B_1, B_2 et B_3.

1) Montrer que n_k solution de

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t}n_k(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}n_k(t,x) = 0, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \\ n_k(t,0) = f^k(\int_{\mathbb{R}_+} B(y)n_k(t,y)dy), \\ n_k(0,x) = n_0(x). \end{array}\right. \tag{6.0.13}$$

et

$$g_k(t) = f^k(\int_{\mathbb{R}_+} B(y)n_k(t,y)dy), \quad t \geq 0.$$

vérifient :

$$g_k(t) = f^k\Big(\int_{\mathbb{R}_+}(B\chi_{\mathbb{R}_+})(t-x)g_k(x)dx + \int_{[t,\infty[} B(x)n_0(x-t)dx\Big), \tag{6.0.14}$$

avec $\chi_{\mathbb{R}_+}(y) = 1$ si $y \geq 0$ et 0 sinon, et pour

$$T < \frac{1}{a^p(\int_{\mathbb{R}_+} B^q(y)dy)^{p/q}} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \iint_{[0,T]\times\mathbb{R}_+} |n_k|^p(t,y)dydt \leq D_0. \\ \int_{[0,T]} |g_k(t)|^p dt \leq D_1 \end{array}\right. \tag{6.0.15}$$

avec D_0 et D_1 des constantes positives indépendantes de k.

2) Montrer que l'on peut extraire une sous-suite telle que

$$n_{j_k} \underset{n\to\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} \bar{n}, \quad \text{faible } * \ L^p([0,T]\times\mathbb{R}_+) \ \ et \ \ g_{j_k} \underset{n\to\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} \bar{g}, \quad \text{faible } * \ L^p([0,T]).$$

3) En utilisant (6.0.14), montrer que g_{j_k} converge presque partout (en fait partout) vers $\bar{g}$ solution de

$$\bar{g}(t) = f\Big(\int_{\mathbb{R}_+}(B\chi_{\mathbb{R}_+})(t-x)\bar{g}(x)dx + \int_{[t,\infty[} B(x)n_0(x-t)dx\Big). \tag{6.0.16}$$

4) En utilisant (6.0.7), montrer que n_{j_k} converge presque partout vers $\bar{n}$ et

$$\bar{n}(t,x) = \left\{\begin{array}{ll} \bar{g}(t-x), & x \leq t \\ n_0(x-t), & x \geq t. \end{array}\right. \tag{6.0.17}$$

5) En combinant 3) et 4), montrer que $\bar{g}(t) = f\Big(\int_{\mathbb{R}_+} B(x)\bar{n}(t,x)dx\Big)$ et $\bar{n}$ est solution faible de l'équation (6.0.11) et solution (6.0.12).

Chapitre 7

Chimiotaxie : Equation Keller Segel en dimension 2 : [2]

7.1 Préambule : Equation de transport avec diffusion

$$\text{(eq. TD)}\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}n(t,x) + \nabla f(t,x)n(t,x) = \Delta n(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R} \\ n(0,x) = n_0(x) \end{cases} \tag{7.1.1}$$

avec $f \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)$.

Théorème 7.1.1 *Sous les hypothèses $f \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)$ et $n_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$, il existe n solution de (8.0.3) telle que pour tout $T > 0$*

$$n \in W_T := \{v \in L^2([0,T];V) \ : \ \frac{\partial}{\partial t}v \in L^2([0,T];V')\}$$

avec

$$V = \{w \in H^1(\mathbb{R}^2) \ : \ (x^2+y^2)^{1/2}w \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$$

telle que $i : V \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ est compacte et V' le dual topologique de V.

Preuve
Etape 1 Construction.

Lorsque h est régulière, les solutions de (la chaleur non-linéaire)

$$\text{(eq. chaleur)}\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}n(t,x) - \Delta n(t,x) = \nabla h(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R} \\ n(0,x) = n_0(x) \end{cases} \tag{7.1.2}$$

sont données par (voir [9])

$$n(t,x) = G(.,t) * n_0 + \int_0^t \Big[G(.,t-s) * \nabla h(.,s)\Big]ds \overset{IPP}{=} G(.,t) * n_0 - \int_0^t \Big[h(.,s) * \nabla G(.,t-s)\Big]ds,$$

avec $G(.,t) := \frac{1}{4\pi t}e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}$.

Lorsque f est régulière, on construit la suite $(n_k)_k$

$$\text{(eq. TD suite)}\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}n_{k+1}(t,x) + \nabla f(t,x)n_k(t,x) = \Delta n_{k+1}(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R} \\ n_{k+1}(0,x) = n_0(x) \end{cases} \tag{7.1.3}$$

donc

$$n_{k+1}(t,.) = G(.,t) * n_0 + \int_0^t \Big[(n_k f)(.,s) * \nabla G(.,t-s)\Big]ds.$$

On a

$$\begin{aligned}\iint |n_{k+1}(t,x,y) - n_k(t,x,y)|dxdy &\le \int_0^t \iint |((n_k - n_{k-1})f)(.,s) * \nabla G(.,t-s)|ds \\ &\le \|f\|_\infty \int_0^t \|\nabla G(.,t-s)\|_{L^1} \|(n_k - n_{k-1})(s,.)\|_{L^1},\end{aligned}$$

or $\nabla G(.,t) = -\frac{1}{8\pi t^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}(x,y)$ donc

$$\iint |\nabla G(.,t)| dxdy = \frac{1}{8\pi t^2} \iint_{[0,2\pi]\times\mathbb{R}_+} r^2 e^{-r^2/4t} dr d\theta = \frac{1}{4t^2}\int_0^\infty r^2 e^{-r^2/4t} dr \overset{ch.var}{=} \frac{1}{4t^2}\int_0^\infty 4t(2\sqrt{t}) u^2 e^{-u^2} du = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

Par conséquent, on trouve

$$\iint |n_{k+1}(t,x,y) - n_k(t,x,y)| dxdy \le \|f\|_\infty \sup_{t\in[0,T]} \|(n_k - n_{k-1})(s,.)\|_{L^1} \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{t-s}} \le \sqrt{t}\|f\|_\infty \sup_{t\in[0,T]} \|(n_k - n_{k-1})(s,.)\|_{L^1},$$

et donc

$$\|n_{k+1}(t,x,y) - n_k(t,x,y)\|_{L^\infty([0,T);L^1(\mathbb{R}^2))} \le \sqrt{t}\|f\|_\infty \|n_k(t,x,y) - n_{k-1}(t,x,y)\|_{L^\infty([0,T);L^1(\mathbb{R}^2))},$$

implique que pour $T < \frac{1}{\|f\|_\infty^2}$, la suite n_k est de Cauchy dans $L^\infty([0,T);L^1(\mathbb{R}^2))$ donc convergente vers n et

$$\int_0^t |((n_k - n)f)(.,s) * \nabla G(.,t-s)| ds \le \|n_k(t,x,y) - n_(t,x,y)\|_{L^\infty([0,T];L^1(\mathbb{R}^2))} \to_{n\to\infty} 0$$

donc n est solution de

$$n(t,.) = G(.,t) * n_0 + \int_0^t \Big[(nf)(.,s) * \nabla G(.,t-s)\Big] ds.$$

donc, au sens faible, de (8.0.3) pour $t \in [0,T_1]$. On itère la méthode,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} m(t,x) - \Delta m(t,x) = -\nabla m f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R} \\ m(T_1,x) = n(T_1,x) \end{cases} \tag{7.1.4}$$

et on obtient une solution sur $[T_1, 2T_1]$... donc une solution sur $[0,2T_1]$ de (8.0.3) . En itérant un certain nombre de fois, on contruit une solution sur tout intervalle $[0,T]$ avec $T < \infty$.

Etape 2 Bornes a priori

On note, en intégrant (8.0.3) sur tout l'espace que

$$\iint n(t,x,y) dxdy = \iint n_0(x,y) dxdy := m_0, \quad \forall t \ge 0.$$

En multipliant (8.0.3) par n, en intégrant et en intégrant par partie, on trouve

$$\frac{d}{dt}\iint n(t,x,y)^2 dxdy = -2\iint |\nabla n(t,x,y)|^2 dxdy + 2\iint \nabla n(t,x,y)\cdot n(t,x,y) f(t,x,y) dxdy, \quad t \ge 0$$

En notant que $0 \le (a - b/2)^2 \le a^2 + b^2/4 - ab$

$$\iint \lambda |\nabla n(t,x,y)| \cdot \frac{|n(t,x,y)f(t,x,y)|}{\lambda} dxdy \le \|f\|_\infty \Big[\lambda^2 \iint |\nabla n(t,x,y)|^2 dxdy + \frac{1}{4\lambda^2}\iint |n(t,x,y)|^2 dxdy],$$

on trouve

$$\frac{d}{dt}\iint n(t,x,y)^2 dxdy \le (-2 + 2\lambda^2\|f\|_\infty)\iint |\nabla n(t,x,y)|^2 dxdy + \frac{\|f\|_\infty}{2\lambda^2}\iint |n(t,x,y)|^2 dxdy, \quad t \ge 0.$$

Pour $\lambda = 1/\sqrt{\|f\|_\infty}$, on trouve

$$\frac{d}{dt}\iint n(t,x,y)^2 dxdy \leq \frac{\|f\|_\infty^2}{2}\iint |n(t,x,y)|^2 dxdy, \;\; t \geq 0$$

Donc par Gronwall, on a

$$\iint n(t,x,y)^2 dxdy \leq \iint n_0(x,y)^2 dxdy e^{\frac{\|f\|_\infty^2}{2}T} \tag{7.1.5}$$

et n est bornée dans $L^\infty([0,T]; L^2(\mathbb{R}^2))$.

Pour $\lambda = 1/\sqrt{3\|f\|_\infty/2}$, on trouve

$$\frac{d}{dt}\iint n(t,x,y)^2 dxdy \leq \frac{-2}{3}\iint |\nabla n(t,x,y)|^2 dxdy + \frac{3\|f\|_\infty^2}{4}\iint |n(t,x,y)|^2 dxdy, \;\; t \geq 0,$$

donc

$$\int_0^T \iint |\nabla n(t,x,y)|^2 dxdy \leq \frac{3}{2}\iint n_0(x,y)^2 dxdy + \frac{9}{4}\iint n_0(x,y)^2 dxdy e^{\frac{\|f\|_\infty^2}{2}T}, \;\; T \geq 0, \tag{7.1.6}$$

et $\nabla n(t,x,y)$ est bornée dans $L^2([0,T] \times \mathbb{R}^2)$ donc n est bornée dans $L^2([0,T]; H^1(\mathbb{R}^2))$.

En multipliant (8.0.3) par x^2+y^2, en intégrant et en intégrant par partie, on trouve (2IPP+1IPP)

$$\frac{d}{dt}\iint n(t,x,y)(x^2+y^2)dxdy = 4\iint n(t,x,y)dxdy + 2\iint n(t,x,y)(x,y)\cdot f(t,x,y)dxdy, \;\; t \geq 0$$

et donc

$$\frac{d}{dt}\iint n(t,x,y)(x^2+y^2)dxdy \leq 4\iint n(t,x,y)dxdy + 2\|f\|_\infty \iint n(t,x,y)\sqrt{x^2+y^2}dxdy, \;\; t \geq 0$$

or par CSB

$$\iint n(t,x,y)\sqrt{x^2+y^2}dxdy \leq (\iint n(t,x,y)dxdy)^{1/2}(\iint n(t,x,y)(x^2+y^2)dxdy)^{1/2}$$

et

$$\iint n(t,x,y)dxdy \leq \iint_{B(0,1)} n(t,x,y)dxdy + \iint n(t,x,y)(x^2+y^2)dxdy$$

$$\leq \sqrt{\iint n^2(t,x,y)dxdy}\sqrt{\pi} + \iint n(t,x,y)(x^2+y^2)dxdy \leq \underbrace{\sqrt{\pi}\|n_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} e^{\frac{\|f\|_\infty^2}{4}T}}_{C(n_0,T)} + \iint n(t,x,y)(x^2+y^2)dxdy$$

et donc

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\iint n(t,x,y)(x^2+y^2)dxdy}_{w(t)} \leq 4C(n_0,T) + 4w(t) + 2\|f\|_\infty\sqrt{C(n_0,T)+w(t)}\sqrt{w(t)}$$

$$\leq C(n_0,T)(4+2\|f\|_\infty) + (4+2\|f\|_\infty)w(t), \;\; t \geq 0$$

car

$$\sqrt{Cs^2+s}-s=(\sqrt{Cs+s^2}-s)(\sqrt{Cs+s^2}+s)/(\sqrt{Cs+s^2}+s)=Cs/(\sqrt{Cs+s^2}+s)\leq C, \quad s>0$$

donc par Gronwall

$$\iint n(t,x,y)(x^2+y^2)dxdy \leq (\iint n_0(x,y)(x^2+y^2)dxdy + C(n_0,T))e^{T(4+2\|f\|_\infty)}. \tag{7.1.7}$$

De plus, pour toute fonction régulière, ϕ, en multipliant (8.0.3) par ϕ et en intégrant (et intégration par partie), on a

$$\iint \phi(x)\frac{\partial}{\partial t}n(t,x)dx = \iint f(t,x)n(t,x)\nabla\phi(x)dx - \iint \nabla\phi(x)\nabla n(t,x)dx, \quad t\in\mathbb{R} \tag{7.1.8}$$

donc

$$\int_0^T |\iint \phi(x)\frac{\partial}{\partial t}n(t,x)dx|^2dt \leq (2\|f\|_\infty+1)(\iint n_0(x,y)^2dxdy)[\frac{3}{2}+(\frac{9}{4}+T)e^{\frac{\|f\|_\infty^2}{2}T}]\|\phi\|_{H^1}^2.$$

Par conséquent,

$$T:\phi\mapsto \iint \phi(x)\frac{\partial}{\partial t}n(t,x)dx$$

est une fonctionnelle bornée uniformement

$$\||T\||_{L^2([0,T];V')} \leq \sqrt{(2\|f\|_\infty+1)(\iint n_0(x,y)^2dxdy)[\frac{3}{2}+(\frac{9}{4}+T)e^{\frac{\|f\|_\infty^2}{2}T}]}.$$

Ainsi, on a

$$n\in W_T$$

et est bornée dans W_T (uniformément : ne dépend que de n_0, $\|f\|_\infty$ et T). Soient une suite

$$f_k \overset{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)}{\underset{n\to\infty}{\rightarrow}} f$$

uniformément bornée et n^k la suite correspondante alors on peut extraire (lemme de Lions-Aubin) une sous-suite convergente dans $L^2([0,T];V)$.

□

7.2 Equation KS - régularisé

$$\text{(eq. principale - reg)}\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}n^\epsilon(t,x,y) - \Delta n^\epsilon(t,x,y) + \chi div(n^\epsilon(t,x,y)grad(c^\epsilon)) = 0, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^d, \quad t\in\mathbb{R} \\ c^\epsilon(t,x,y) = \iint_{\mathbb{R}^2}\mathcal{K}^\epsilon(x-x',y-y')n^\epsilon(t,x',y')dx'dy' \\ n(0,x,y) = n_0(x,y). \end{cases} \tag{7.2.9}$$

avec

$$\mathcal{K}^\epsilon(x,y) = \mathcal{K}^1(x/\epsilon, y/\epsilon)$$

et définit par

$$\mathcal{K}^1(x,y) = -\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}\Phi(\bar{s})\bar{s}\int_{\bar{s}}^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{du}{u}d\bar{s}$$

avec $\Phi \geq 0$, $Supp(\Phi) \subset [1,4]$ et $\int_0^\infty \Phi(\bar{s})\bar{s}d\bar{s} = 1/2\pi$ qui par calcul vérifie

$$-\nabla\mathcal{K}^1(x,y) = (x,y)[\frac{1}{x^2+y^2}\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}\Phi(\bar{s})\bar{s}d\bar{s}],$$

et

$$-\Delta\mathcal{K}^1(x,y) = \Phi(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Par conséquent, on a

$$0 \leq -\nabla\mathcal{K}^1(x,y) \leq \frac{1}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \mathcal{K}^1(x,y) \leq -\frac{1}{2\pi}\log(\sqrt{x^2+y^2}),$$
$$-\Delta\mathcal{K}^1(x,y)(\text{ sur } \sqrt{x^2+y^2} \geq 4 \ := \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}) \geq 0, \quad \iint -\Delta\mathcal{K}^1(x,y)dxdy = 1 \tag{7.2.10}$$

donc

$$0 \leq -\nabla\mathcal{K}^\epsilon(x,y) \leq \frac{1}{2\epsilon\pi\sqrt{(\frac{x}{\epsilon})^2+(\frac{y}{\epsilon})^2}} \leq \frac{1}{2\pi}$$

Théorème 7.2.1 *Pour tout $\epsilon > 0$, sous les hypothèses*

$$n_0 \in L^1_+(\mathbb{R}^2, (1+x^2+y^2)dxdy, \mathbb{R}), \quad n_0\log(n_0) \in L^1(\mathbb{R}^2, dxdy, \mathbb{R}),$$

alors pour tout $T > 0$, il existe $n^\epsilon \in L^2([0,T], H^1(\mathbb{R}^2)) \cap C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^2))$ solution de (7.2.9).

Preuve
Existence : On construit l'opérateur

$$\mathcal{T} : n^\epsilon \in L^2([0,T], L^2(\mathbb{R}^2)) \mapsto \tilde{n}^\epsilon \in L^2([0,T], L^2(\mathbb{R}^2))$$

de la manière suivante :

$$n^\epsilon \mapsto \nabla c^\epsilon = \nabla\mathcal{K}^\epsilon * n^\epsilon$$

$$\nabla c^\epsilon \mapsto f_C = \chi \nabla c^\epsilon \min(1, C/\|\nabla c^\epsilon\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)}) \in L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)$$

$$f_C \mapsto \tilde{n}^\epsilon$$

solution de l'équation (8.0.3), en notant que $|f_C| \leq C\chi$,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\tilde{n}^\epsilon(t,x) + \nabla f_C(t,x)\tilde{n}^\epsilon(t,x) = \Delta \tilde{n}^\epsilon(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R} \\ \tilde{n}^\epsilon(0,x) = n_0(x) \end{cases}$$

et donc par (7.1.5), on a

$$\|\mathcal{T}(n^\epsilon)\|_{L^2} \leq T\|n_0\|_{L^2} e^{(C\chi)^2 T/4}$$

On note que (voir Th. 7.1.1)

$$\mathcal{T} : W_T \subset L^2([0,T], L^2(\mathbb{R}^2)) \mapsto W_T$$

Soit n^ϵ et n_2 alors

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\tilde{n}_1^\epsilon(t,x) + \nabla f_C^1(t,x)\tilde{n}_1^\epsilon(t,x) = \Delta \tilde{n}_1^\epsilon(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial}{\partial t}\tilde{n}_2^\epsilon(t,x) + \nabla f_C^2(t,x)\tilde{n}_2^\epsilon(t,x) = \Delta \tilde{n}_2^\epsilon(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R} \\ \tilde{n}_2^\epsilon(0,x) = \tilde{n}_1^\epsilon(0,x) = n_0(x) \end{cases}$$

et donc et posant $m = (\tilde{n}_1^\epsilon(t,x) - \tilde{n}_2^\epsilon(t,x))$, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}m + \nabla f_C^1(t,x)m - \nabla(f_C^2 - f_C^1)\tilde{n}_2^\epsilon(t,x) = \Delta m(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R} \\ m(0,x) = 0, \end{cases}$$

un calcul similaire à (7.1.5), permet d'obtenir pour $t \in [0,T]$

$$\frac{d}{dt}\iint m(t,x,y)^2 dxdy \leq \frac{\|f_C^1\|_\infty^2}{2}\iint |m(t,x,y)|^2 dxdy + \sqrt{\iint |\tilde{n}_2^\epsilon(t,x,y)(f_C^1 - f_C^2)|^2 dxdy \iint |\nabla m(t,x,y)|^2 dxdy},$$

$$\frac{d}{dt}\iint m(t,x,y)^2 e^{-(C\chi)^2 t/2} dxdy \leq e^{-(C\chi)^2 t/2}\sqrt{\iint |\tilde{n}_2^\epsilon(t,x,y)(f_C^1 - f_C^2)|^2 dxdy \iint |\nabla m(t,x,y)|^2 dxdy},$$

or par (7.1.6)

$$\int_0^T \iint |\nabla n(t,x,y)|^2 dxdydt \leq (\frac{3}{2} + \frac{9}{4}e^{\frac{(C\chi)^2}{2}T})) \iint n_0(x,y)^2 dxdy, \ \ T \geq 0, \tag{7.2.11}$$

donc

$$\iint m(T,x,y)^2 e^{-(C\chi)^2 T/2} dxdy \leq \int_0^T \sqrt{\iint |\tilde{n}_2^\epsilon(t,x,y)(f_C^1 - f_C^2)|^2 dxdy \iint |\nabla m(t,x,y)|^2 dxdydt},$$

De plus, on note que

$$|\nabla c^\epsilon| = |\nabla \mathcal{K}^\epsilon * n^\epsilon| \leq \frac{\iint n_0(x,y)dxdy}{2\pi\epsilon}$$

donc pour $C > \frac{\iint n_0(x,y)dxdy}{2\pi\epsilon}$, on a

$$f_C^1 - f_C^2 = \chi \nabla \mathcal{K}^\epsilon * (n_1^\epsilon(t,x) - n_2^\epsilon(t,x))$$

et

$$\iint m(T,x,y)^2 e^{-(C\chi)^2T/2}dxdy \leq \int_0^T \sqrt{\iint |\tilde{n}_2^\epsilon(t,x,y)\chi\nabla\mathcal{K}^\epsilon * (n_1^\epsilon(t,x) - n_2^\epsilon(t,x))|^2dxdy \iint |\nabla m(t,x,y)|^2dxdydt},$$

par CSB,

$$\iint m(T,x,y)^2 e^{-(C\chi)^2T/2}dxdy \leq$$
$$\sqrt{\int_0^T \iint |\tilde{n}_2^\epsilon(t,x,y)\chi\nabla\mathcal{K}^\epsilon * (n_1^\epsilon(t,x) - n_2^\epsilon(t,x))|^2dxdydt}\sqrt{\int_0^T \iint |\nabla m(t,x,y)|^2dxdydt},$$

$$\iint m(T,x,y)^2 e^{-(C\chi)^2T/2}dxdy \leq$$
$$\sqrt{\int_0^T \iint |\tilde{n}_2^\epsilon(t,x,y)\chi\nabla\mathcal{K}^\epsilon * (n_1^\epsilon(t,x) - n_2^\epsilon(t,x))|^2dxdydt}\sqrt{(\frac{3}{2}+\frac{9}{4}e^{\frac{(C\chi)^2}{2}T})) \iint n_0(x,y)^2dxdy},$$

Or, on a en utilisant (7.1.7) et CSB, $\mathbb{R}^2 = B(0,M) \cup c^B(0,M)$ avec $M > 0$

$$\begin{aligned}|\nabla\mathcal{K}^\epsilon * (n_1^\epsilon(t,x) - n_2^\epsilon(t,x)))| &\leq \frac{1}{2\pi\epsilon}\iint |n_1^\epsilon(t,x) - n_2^\epsilon(t,x)|dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi\epsilon}[\|n_1^\epsilon - n_2^\epsilon\|_{L^2}\sqrt{\pi M^2} + \frac{1}{M^2}2(\iint n_0(x,y)(x^2+y^2)dxdy + C(n_0,T))e^{T(4+2\|f\|_\infty)}]\end{aligned}$$

en prenant $M = 1/\|n_1^\epsilon - n_2^\epsilon\|_{L^2}^{1/3}$, on a

$$|\nabla\mathcal{K}^\epsilon * (n_1^\epsilon(t,x) - n_2^\epsilon(t,x)))| \leq \tilde{C}ts(n_0,T,\chi,\epsilon)\|n_1^\epsilon - n_2^\epsilon\|_{L^2}^{2/3}$$

donc d'une part

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|\mathcal{T}(n_1^\epsilon) - \mathcal{T}(n_2^\epsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq Cts(n_0,T,\chi)\sqrt{\int_0^T \|n_1^\epsilon - n_2^\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{4/3}dt}. \tag{7.2.12}$$

et d'autre part

$$\|\mathcal{T}(n_1^\epsilon) - \mathcal{T}(n_2^\epsilon)\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^2)}^2 \leq TCts(n_0,T,\chi)\sqrt{\int_0^T \|n_1^\epsilon - n_2^\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{4/3}dt}$$

par Holder $1/(3/2) + 1/3 = 1$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}(n_1^\epsilon) - \mathcal{T}(n_2^\epsilon)\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^2)}^2 &\leq TCts(n_0,T,\chi)T^{1/6}\Big(\int_0^T \|n_1^\epsilon - n_2^\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2dt\Big)^{1/3} \\ &\leq T^{7/6}Cts(n_0,T,\chi)\|n_1^\epsilon - n_2^\epsilon\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^2)}^{1/3}. \end{aligned} \tag{7.2.13}$$

Par conséquent $\mathcal{T} : L^2([0,T]\times\mathbb{R}^2) \mapsto L^2([0,T]\times\mathbb{R}^2)$ est continue, $L^2([0,T]\times\mathbb{R}^2)$ est un espace de Banach et $\mathcal{T}(W_T)$ est un compact de $L^2([0,T]\times\mathbb{R}^2)$ donc par le théorème de point fixe de Schauder [12, 20, 10] : il existe un point fixe, i.e. solution de (7.2.9) dans W_T (l'unicité est claire à partir de (7.2.13)). La continuité se déduit de (7.2.12). $\square$

Bornes a priori sur n^ϵ : On a $\iint n^\epsilon dxdy = \iint n_0 dxdy = m_0$, et par IPP,

$$\frac{d}{dt}\iint (x^2+y^2)n^\epsilon(t,x,y)dxdy = 4m_0 + 2\chi \iint\iint (x,y)n^\epsilon(t,x,y)n^\epsilon(t,x',y')\nabla\mathcal{K}^\epsilon(x-x',y-y')dx'dy'dxdy$$

et par symétrie

$$\begin{aligned} 2\iint\iint (x,y)n^\epsilon(t,x,y)n^\epsilon(t,x',y')\nabla\mathcal{K}^\epsilon(x-x',y-y')dx'dy' \\ = \iint\iint (x-x',y-y')n^\epsilon(t,x,y)n^\epsilon(t,x',y')\nabla\mathcal{K}^\epsilon(x-x',y-y')dx'dy'dxdy \end{aligned}$$

donc

$$\frac{d}{dt}\iint (x^2+y^2)n^\epsilon(t,x,y)dxdy \le 4m_0 - \frac{\chi}{2\pi}\iint\iint_{x^2+y^2\ge 4} n^\epsilon(t,x,y)n^\epsilon(t,x',y')dx'dy'dxdy \le 4m_0$$

par conséquent

$$\iint (x^2+y^2)n^\epsilon(t,x,y)dxdy \le 4(m_0+1+\iint (x^2+y^2)n_0(t,x,y)dxdy)(1+t) = K(1+t). \qquad (7.2.14)$$

Bornes a priori sur $n^\epsilon \log(n^\epsilon)$: Par calcul

$$\frac{d}{dt}\iint n^\epsilon \log(n^\epsilon)dxdy \overset{IPP}{=} -\iint \nabla(n^\epsilon)^2/n^\epsilon dxdy + \chi\iint \nabla n^\epsilon \nabla c^\epsilon dxdy$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\chi}{2}\iint n^\epsilon c^\epsilon dxdy \overset{IPP}{=} & \underbrace{-\frac{\chi}{2}\iint \nabla n^\epsilon\nabla c^\epsilon + \frac{\chi^2}{2}\iint n^\epsilon(\nabla c^\epsilon)^2 dxdy}_{\frac{\chi}{2}\iint c^\epsilon(t,x,y)\frac{d}{dt}n^\epsilon(t,x,y)dxdy} \\ & + \underbrace{\frac{\chi}{2}\iint\iint \mathcal{K}^\epsilon(x-x',y-y')n^\epsilon(t,x,y)\frac{d}{dt}n^\epsilon(t,x',y')dxdydx'dy'}_{\text{aussi égal à } \frac{\chi}{2}\iint c^\epsilon(t,x,y)\frac{d}{dt}n^\epsilon(t,x,y)dxdy} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\iint [n^\epsilon\log(n^\epsilon) - \frac{\chi}{2}n^\epsilon c^\epsilon]dxdy = -\iint \nabla(n^\epsilon)^2/n^\epsilon dxdy + 2\chi\iint \nabla n^\epsilon\nabla c^\epsilon - \chi^2\iint n^\epsilon(\nabla c^\epsilon)^2 dxdy$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\iint [n^\epsilon\log(n^\epsilon) - \frac{\chi}{2}n^\epsilon c^\epsilon]dxdy &= -\iint n^\epsilon\Big[\nabla(n^\epsilon)^2/(n^\epsilon)^2 + 2\chi\frac{\nabla n^\epsilon}{n^\epsilon}\nabla c^\epsilon - \chi^2(\nabla c^\epsilon)^2\big]dxdy \\ &= -\iint n^\epsilon\Big[\nabla(\log(n^\epsilon)) - \chi(\nabla c^\epsilon)\big]^2 dxdy \qquad (7.2.15) \end{aligned}$$

Or, par (7.2.9), on a

$$\frac{\chi}{2}\iint [n^\epsilon c^\epsilon]dxdy = -\frac{\chi}{4\pi}\iint\iint n^\epsilon(x,y)n^\epsilon(x',y')\log(\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2})dxdydx'dy'$$

donc

$$\iint [n^\epsilon \log(n^\epsilon) - \frac{\chi}{2}n^\epsilon c^\epsilon]dxdy = (1-\theta)\iint n^\epsilon \log(n^\epsilon)dxdy$$
$$+\,\theta\Big(\iint n^\epsilon \log(n^\epsilon)dxdy + \frac{\chi}{4\pi\theta}\iint\iint n^\epsilon(x,y)n^\epsilon(x',y')\log(\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2})dxdydx'dy'\Big)$$

qui lorsque $\frac{\chi}{4\pi\theta} = \frac{2}{\iint n_0(x,y)dxdy}$ donne par le lemme 9.1.5

$$\iint [n^\epsilon \log(n^\epsilon) - \frac{\chi}{2}n^\epsilon c^\epsilon]dxdy = (1-\theta)\iint n^\epsilon \log(n^\epsilon)dxdy$$
$$+\theta\underbrace{\Big(\iint n^\epsilon \log(n^\epsilon)dxdy + \frac{2}{\iint n^\epsilon(x,y)dxdy}\iint\iint n^\epsilon(x,y)n^\epsilon(x',y')\log(\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2})dxdydx'dy'\Big)}_{\geq \iint n^\epsilon\left(\log(\iint n^\epsilon)-(1+\log(\pi))\right)=\iint n_0\left(\log(\iint n_0)-(1+\log(\pi))\right)}$$

et

$$\iint [n^\epsilon \log(n^\epsilon) - \frac{\chi}{2}n^\epsilon c^\epsilon]dxdy = (1-\theta)\iint n^\epsilon \log(n^\epsilon)dxdy$$
$$+\theta\underbrace{\Big(\iint n^\epsilon \log(n^\epsilon)dxdy + \frac{2}{\iint n^\epsilon(x,y)dxdy}\iint\iint n^\epsilon(x,y)n^\epsilon(x',y')\log(\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2})dxdydx'dy'\Big)}_{\geq \iint n^\epsilon\left(\log(\iint n^\epsilon)-(1+\log(\pi))\right)=\iint n_0\left(\log(\iint n_0)-(1+\log(\pi))\right)}.$$

Le terme $\iint [n^\epsilon \log(n^\epsilon) - \frac{\chi}{2}n^\epsilon c^\epsilon]dxdy$ est décroissant, donc

$$\iint [n^\epsilon \log(n^\epsilon) - \frac{\chi}{2}n^\epsilon c^\epsilon]dxdy(t) \leq \iint [n^\epsilon \log(n^\epsilon) - \frac{\chi}{2}n^\epsilon c^\epsilon]dxdy(0)$$

et lorsque $\frac{\iint n_0(x,y)dxdy\chi}{8\pi} < 1$, on a

$$\iint n^\epsilon \log(n^\epsilon)dxdy \leq \frac{\iint [n^\epsilon \log(n^\epsilon) - \frac{\chi}{2}n^\epsilon c^\epsilon]dxdy(t=0) - \frac{\iint n_0(x,y)dxdy\chi}{8\pi}\iint n_0\Big(\log(\iint n_0) - (1+\log(\pi))\Big)}{1-\frac{\iint n_0(x,y)dxdy\chi}{8\pi}}. \tag{7.2.16}$$

On note que, en utilisant la borne (7.2.14), que

$$\iint n^\epsilon \log(n^\epsilon)dxdy \geq \iint n^\epsilon \log(1/e^{-(x^2+y^2)/(1+t)})dxdy - K + \iint n^\epsilon \log(n^\epsilon)dxdy$$

qui en posant $g(t,x,y) = e^{-(x^2+y^2)/(1+t)}\frac{1}{\pi(1+t)}$ (on note que $\iint g(t,x,y)dxdy = 1$ pour tout t)

$$\iint n^\epsilon \log(n^\epsilon)dxdy \geq \iint n^\epsilon \log(1/g(t,x,y))dxdy - (\log(\pi(1+t)))\iint n_0 dxdy - K + \iint n^\epsilon \log(n^\epsilon)dxdy$$

$$\iint n^\epsilon \log(n^\epsilon)dxdy \geq \iint n^\epsilon \log(n^\epsilon/g(t,x,y))dxdy - (\log(\pi(1+t)))\iint n_0 dxdy - K$$

$$\begin{aligned}\iint n^\epsilon \log(n^\epsilon)dxdy &\geq \iint \frac{n^\epsilon}{g(t,x,y)}\log(\frac{n^\epsilon}{g(t,x,y)})g(t,x,y)dxdy - (\log(\pi(1+t)))\iint n_0 dxdy - K \\ &\underbrace{\geq}_{Jensen} \iint n_0 dxdy \log(\iint n_0 dxdy) - (\log(\pi(1+t)))\iint n_0 dxdy - K \quad (7.2.17)\end{aligned}$$

On note que

$$\iint n^\epsilon |\log(n^\epsilon)|dxdy = \iint_{n^\epsilon<1} n^\epsilon \log(n^\epsilon)dxdy - \iint_{n^\epsilon<1} n^\epsilon \log(n^\epsilon)dxdy \leq \iint n^\epsilon \log(n^\epsilon)dxdy - \iint_{n^\epsilon<1} n^\epsilon \log(n^\epsilon)dxdy$$

et que

$$\begin{aligned}\iint n_0 \log(\iint n_0) \underbrace{\leq}_{Jensen} \iint_{n^\epsilon<1} \frac{n^\epsilon}{\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}\log(\frac{n^\epsilon}{\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}})\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy &= \iint_{n^\epsilon<1} n^\epsilon \log(\frac{n^\epsilon}{\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}})dxdy \\ &= \iint_{n^\epsilon<1} n^\epsilon(\log(n^\epsilon) + \frac{x^2+y^2}{2} - \frac{1}{2\pi})dxdy\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\iint n^\epsilon |\log(n^\epsilon)|dxdy &\leq \sup_{[0,T]} \iint n^\epsilon \log(n^\epsilon)dxdy + |\iint_{n^\epsilon<1} n^\epsilon \log(n^\epsilon)dxdy| \\ &\leq Cst(n_0,T) + m_0|\log(m_0)| + \frac{1}{2\pi}m_0 + m_0^{(2)}/2 = Cst(m_0, m_0^{(2)}, T, \iint n_0\log(n_0)) \quad (7.2.18)\end{aligned}$$

Bornes a priori sur $\sqrt{n^\epsilon}|\nabla \log(n^\epsilon) - \chi\nabla c_\epsilon|$ **:** On a

$$\int_0^t \iint n^\epsilon\Big[\nabla(\log(n^\epsilon)) - \chi(\nabla c^\epsilon)\Big]^2 dxdyds \leq \iint [n^\epsilon \log(n^\epsilon) - \frac{\chi}{2}n^\epsilon c^\epsilon]dxdy(0) - \iint [n^\epsilon \log(n^\epsilon) - \frac{\chi}{2}n^\epsilon c^\epsilon]dxdy(t)$$

et

$$\iint n^\epsilon\Big[\nabla(\log(n^\epsilon)) - \chi(\nabla c^\epsilon)\Big]^2 dxdy = \underbrace{(1-\theta)\iint n^\epsilon \log(n^\epsilon)dxdy}_{\geq(1-\theta)(\iint n_0 dxdy \log(\iint n_0 dxdy) - (\log(\pi(1+t)))\iint n_0 dxdy - K)}$$

$$+\theta\Big(\underbrace{\iint n^\epsilon \log(n^\epsilon)dxdy + \frac{2}{\iint n^\epsilon(x,y)dxdy}\iint\iint n^\epsilon(x,y)n^\epsilon(x',y')\log(\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2})dxdydx'dy'}_{\geq\iint n^\epsilon\Big(\log(\iint n^\epsilon) - (1+\log(\pi))\Big) = \iint n_0\Big(\log(\iint n_0) - (1+\log(\pi))\Big)}\Big).$$

Pa conséquent, on a

$$\int_0^t \iint n^\epsilon \Big[\nabla(\log(n^\epsilon)) - \chi(\nabla c^\epsilon)\Big]^2 dxdyds \leq \iint [n^\epsilon \log(n^\epsilon) - \frac{\chi}{2} n^\epsilon c^\epsilon] dxdy(0) + Cst(\iint n_0, t, \iint (x^2+y^2) n_0)$$

et donc

$$\|\sqrt{n^\epsilon}\log(n^\epsilon)\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^2)} \leq Cst(\iint n_0, \iint n_0 \log(n_0), T, \iint (x^2+y^2) n_0) \tag{7.2.19}$$

Bornes a priori sur $\nabla\sqrt{n^\epsilon}$: Par calcul

$$\frac{d}{dt}\iint n^\epsilon \log(n^\epsilon) dxdy \overset{IPP}{=} -\iint \nabla(n^\epsilon)^2/n^\epsilon dxdy - \chi \iint n^\epsilon \Delta c^\epsilon dxdy$$

$$\iint \nabla(n^\epsilon)^2/n^\epsilon dxdy = 4\iint \nabla(\sqrt{n^\epsilon})^2 dxdy$$

$$\frac{d}{dt}\iint n^\epsilon \log(n^\epsilon) dxdy = -4\iint \nabla(\sqrt{n^\epsilon})^2 dxdy + \chi \iint n^\epsilon(-\Delta(\mathcal{K}^\epsilon * n^\epsilon)) dxdy$$

Or,

$$\iint n^\epsilon(-\Delta(\mathcal{K}^\epsilon * n^\epsilon)) dxdy = \iint_{n^\epsilon<K} n^\epsilon(-\Delta(\mathcal{K}^\epsilon * n^\epsilon)) dxdy + \iint_{n^\epsilon\geq K} n^\epsilon(-\Delta(\mathcal{K}^\epsilon * n^\epsilon) - n^\epsilon) dxdy + \iint_{n^\epsilon\geq K} |n^\epsilon|^2 dxdy$$

Clairement, on a, (en utilisant fubinni tonnelli)

$$A := \iint_{n^\epsilon<K} n^\epsilon(-\Delta(\mathcal{K}^\epsilon * n^\epsilon)) dxdy \leq K \iint n^\epsilon dxdy \iint (-\Delta\mathcal{K}_1(x',y')) dx'dy' = Km_0.$$

Par la proposition 9.1.7. Lorsque, on a pour tout $q \in [2,\infty[$,

$$\|.\|^2_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C_{2,q} \|.\|^{4/q}_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\nabla .\|^{2-4/q}_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

Par conséquent, pour $q = 4$

$$\iint_{n^\epsilon\geq K} (\sqrt{n^\epsilon})^4 dxdy \leq C^2_{2,4} \iint_{n^\epsilon\geq K} |\sqrt{n^\epsilon}|^2 dxdy \iint_{n^\epsilon\geq K} |\nabla\sqrt{n^\epsilon}|^2 dxdy$$

avec pour $K > 1$:

$$C := \iint_{n^\epsilon\geq K} |n^\epsilon|^2 dxdy \leq \frac{C^2_{2,4}\iint |\nabla\sqrt{n^\epsilon}|^2 dxdy}{\log(K)} \iint_{n^\epsilon\geq K} n^\epsilon \log(n^\epsilon) dxdy \leq \frac{Cst(n_0,T)\|\nabla\sqrt{n^\epsilon}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{\log(K)}$$

Par CSB, on a

$$\iint_{n^\epsilon\geq K} (n^\epsilon)^{3/2} dxdy \leq \sqrt{\iint_{n^\epsilon\geq K} (\sqrt{n^\epsilon})^2 dxdy}\sqrt{\iint_{n^\epsilon\geq K} (\sqrt{n^\epsilon})^4 dxdy} \leq \sqrt{m_0}\frac{Cst'(n_0,T)\|\nabla\sqrt{n^\epsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{\log(K)}$$

En utilisant (7.2.10) et changement de variable affine, le second terme devient

$$\iint_{n^\epsilon\geq K} n^\epsilon(-\Delta(\mathcal{K}^\epsilon * n^\epsilon) - n^\epsilon) dxdy = \iint_{n^\epsilon\geq K} n^\epsilon \iint [n^\epsilon(x-\epsilon x', y-\epsilon y', t) - n^\epsilon(x,y,t)](-\Delta\mathcal{K}_1(x',y')) dx'dy'dxdy$$

$$\iint_{n^\epsilon \geq K} n^\epsilon(-\Delta(\mathcal{K}^\epsilon * n^\epsilon) - n^\epsilon) dxdy = \iint_{n^\epsilon \geq K} n^\epsilon \iint [\sqrt{n^\epsilon(x-\epsilon x', y-\epsilon y', t)} - \sqrt{n^\epsilon(x,y,t)}] \sqrt{(-\Delta \mathcal{K}_1(x,y))}$$
$$[\sqrt{n^\epsilon(x-\epsilon x', y-\epsilon y', t)} - \sqrt{n^\epsilon(x,y,t)} + 2\sqrt{n^\epsilon(x,y,t)}] \sqrt{-\Delta \mathcal{K}_1(x',y'))} dx'dy'dxdy$$

et CSB nous donne (en se servant de $(a+2b)^2 \leq 2a^2 + 8b^2$)

$$\iint_{n^\epsilon \geq K} n^\epsilon(-\Delta(\mathcal{K}^\epsilon * n^\epsilon) - n^\epsilon) dxdy \leq \iint_{n^\epsilon \geq K} n^\epsilon \sqrt{\iint [\sqrt{n^\epsilon(x-\epsilon x', y-\epsilon y', t)} - \sqrt{n^\epsilon(x,y,t)}]^2 (-\Delta \mathcal{K}_1(x',y')) dx'dy'}$$
$$\sqrt{\iint \underbrace{[\sqrt{n^\epsilon(x-\epsilon x', y-\epsilon y', t)} - \sqrt{n^\epsilon(x,y,t)} + 2\sqrt{n^\epsilon(x,y,t)}]^2}_{\leq 2\left(\sqrt{n^\epsilon(x-\epsilon x', y-\epsilon y', t)} - \sqrt{n^\epsilon(x,y,t)}\right)^2 + 8n^\epsilon(x,y,t)} (-\Delta \mathcal{K}_1(x',y')) dx'dy'} dxdy$$

De plus par l'inégalité de Poincaré 9.1.4, on a,

$$\iint_{n^\epsilon \geq K} n^\epsilon(-\Delta(\mathcal{K}^\epsilon * n^\epsilon) - n^\epsilon) dxdy \leq C\|\Phi\|_\infty^{1/2} \|\nabla\sqrt{n^\epsilon}\|_{L^2} \iint_{n^\epsilon \geq K} n^\epsilon \sqrt{2\|\nabla\sqrt{n^\epsilon}\|_{L^2}^2} + \sqrt{32 n^\epsilon(x,y,t)} dxdy,$$

$$\iint_{n^\epsilon \geq K} n^\epsilon(-\Delta(\mathcal{K}^\epsilon * n^\epsilon) - n^\epsilon) dxdy \leq C\|\Phi\|_\infty^{1/2} \|\nabla\sqrt{n^\epsilon}\|_{L^2} \iint_{n^\epsilon \geq K} n^\epsilon \sqrt{2\|\nabla\sqrt{n^\epsilon}\|_{L^2}^2} + \sqrt{32 n^\epsilon(x,y,t)} dxdy$$

et

$$\iint_{n^\epsilon \geq K} n^\epsilon(-\Delta(\mathcal{K}^\epsilon * n^\epsilon) - n^\epsilon) dxdy$$
$$\leq C\|\Phi\|_\infty^{1/2} \|\nabla\sqrt{n^\epsilon}\|_{L^2} [\iint_{n^\epsilon \geq K} n^\epsilon dxdy \sqrt{2} \|\nabla\sqrt{n^\epsilon}\|_{L^2} + \sqrt{32} \iint_{n^\epsilon \geq K} (n^\epsilon)^{3/2} dxdy]$$

Or $\iint_{n^\epsilon \geq K} (n^\epsilon)^{3/2} dxdy \leq \frac{Cst'(n_0,T)\|\nabla\sqrt{n^\epsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{\log(K)}$, donc on a

$$B := \iint_{n^\epsilon \geq K} n^\epsilon(-\Delta(\mathcal{K}^\epsilon * n^\epsilon) - n^\epsilon) dxdy \leq \|\Phi\|_\infty^{1/2} \frac{Cst'(n_0,T)\|\nabla\sqrt{n^\epsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2}{\log(K)}.$$

Finalement, on trouve

$$\iint n^\epsilon(-\Delta(\mathcal{K}^\epsilon * n^\epsilon)) dxdy \leq \frac{Constante(n_0,T)\|\nabla\sqrt{n^\epsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2}{\log(K)} + Km_0$$

et

$$\frac{d}{dt} \iint n^\epsilon \log(n^\epsilon) dxdy \leq [-4 + \frac{Constante(n_0,T)\chi}{\log(K)}] \|\nabla\sqrt{n^\epsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \chi K m_0$$

et pour K assez grand, i.e. $[-4 + \frac{Constante(n_0,T)\chi}{\log(K)}] > 0$

$$\|\nabla\sqrt{n^\epsilon}\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^2)}^2 = \int_0^T \|\nabla\sqrt{n^\epsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 dt \leq \frac{T}{[-4 + \frac{Constante(n_0,T)\chi}{\log(K)}]} \Big(\chi K m_0 + Cst(m_0, m_0^{(2)}, T, \iint n_0 \log(n_0))\Big) \tag{7.2.20}$$

Bornes a priori sur $n^\epsilon \Delta c_\epsilon$ dans L^1 : On a, par conséquent, (calcul précédent en notant que $\Phi \geq 0$)

$$\|n^\epsilon(-\Delta c_\epsilon))\|_{L^1([0,T]\times\mathbb{R}^2)} \leq Constante(n_0,T)\frac{T}{[-4+\frac{Constante(n_0,T)\chi}{\log(K)}]}\Big(\chi K m_0 + Cst(m_0, m_0^{(2)}, T, \iint n_0\log(n_0))\Big) \tag{7.2.21}$$

Bornes a priori sur n^ϵ dans L^2 : Par GNS et (7.2.22), on a

$$\iint (\sqrt{n^\epsilon})^4 dxdy \leq C_{2,4}^2 \underbrace{\iint |\sqrt{n^\epsilon}|^2 dxdy}_{m_0} \underbrace{\iint |\nabla\sqrt{n^\epsilon}|^2 dxdy}_{\leq \frac{T}{[-4+\frac{Constante(n_0,T)\chi}{\log(K)}]}\Big(\chi K m_0 + Cst(m_0,m_0^{(2)},T,\iint n_0\log(n_0))\Big)}$$

donc

$$\|n^\epsilon\|^2_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^2)} \leq C_{2,4}^2 m_0 T\frac{T}{[-4+\frac{Constante(n_0,T)\chi}{\log(K)}]}\Big(\chi K m_0 + Cst(m_0, m_0^{(2)}, T, \iint n_0\log(n_0))\Big) \tag{7.2.22}$$

Bornes a priori sur $\sqrt{n^\epsilon}\nabla c_\epsilon$ dans L^2 : On se souvient que

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\iint n^\epsilon c^\epsilon dxdy \overset{IPP}{=} -\iint \nabla n^\epsilon \nabla c^\epsilon dxdy + \chi\iint n^\epsilon(\nabla c^\epsilon)^2 dxdy \overset{IPP}{=} \iint n^\epsilon \Delta c^\epsilon dxdy + \chi \iint n^\epsilon(\nabla c^\epsilon)^2 dxdy$$

donc

$$\chi\int_0^T\iint n^\epsilon(\nabla c^\epsilon)^2 dxdydt \leq \|n^\epsilon(-\Delta c_\epsilon))\|_{L^1([0,T]\times\mathbb{R}^2)} - [\frac{1}{2}\iint n^\epsilon c^\epsilon dxdy(t) - \frac{1}{2}\iint n^\epsilon c^\epsilon dxdy(0)]$$

qui par décroissance de l'energie donne

$$\chi\int_0^T\iint n^\epsilon(\nabla c^\epsilon)^2 dxdydt \leq \|n^\epsilon(-\Delta c_\epsilon))\|_{L^1([0,T]\times\mathbb{R}^2)} - [\frac{1}{\chi}\iint n^\epsilon|\log(n^\epsilon)|dxdy(t) - \frac{1}{\chi}\iint n_0\log(n_0)dxdy]$$

et finalement

$$\|\sqrt{n^\epsilon}\nabla c^\epsilon\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^2)} \leq \frac{1}{\chi}\|n^\epsilon(-\Delta c_\epsilon))\|_{L^1([0,T]\times\mathbb{R}^2)} + \frac{2}{\chi^2}\|n^\epsilon|\log(n^\epsilon)|\|_{L\infty([0,T],L^1(\mathbb{R}^2)} \tag{7.2.23}$$

Bornes a priori sur $n^\epsilon\nabla c_\epsilon$ dans L^1 : Par CSB, on a

$$\|n^\epsilon\nabla c^\epsilon\|_{L^1([0,T]\times\mathbb{R}^2)} \leq Tm_0\|\sqrt{n^\epsilon}\nabla c^\epsilon\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^2)} \tag{7.2.24}$$

Bornes a priori sur ∇n_ϵ dans L^1 : Par CSB, on a

$$\|\nabla n^\epsilon\|_{L^1([0,T]\times\mathbb{R}^2)} \leq m_0T\|\nabla n^\epsilon\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^2)} \tag{7.2.25}$$

Bornes a priori sur n_ϵ dans L^q : Par GNS, on a pour $q \geq 1$,

$$\|n^\epsilon\|^q_{L^q([0,T]\times\mathbb{R}^2)} \leq C^q_{GNS} m_0 T\|\nabla\sqrt{n^\epsilon}\|^{q-1}_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^2)} \tag{7.2.26}$$

□

7.3 Equation KS

$$
\text{(eq. principale)} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n(t,x,y) - \Delta n(t,x,y) + div(\chi n(t,x,y) grad(c)) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R} \\ c(t,x,y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} |x-x'| \\ |y-y'| \end{pmatrix} n(t,x',y') dx'dy' \\ n(0,x,y) = n_0(x,y) \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^1_+(\mathbb{R}^d). \end{cases} \tag{7.3.27}
$$

On note que

$$\Delta c = -n$$

Théorème 7.3.1 *On suppose* $n_0 \in L^1_+(\mathbb{R}^2, (1+x^2+y^2)dxdy, \mathbb{R})$ *et* $n_0 \log(n_0) \in L^1(\mathbb{R}^2, dx, \mathbb{R})$.

1) Si $\iint n_0 dxdy < 8\pi/\chi$, *on a existence globale d'une solution faible* n *à (8.0.4) telle que*

$$(1+x^2+y^2+|\log(n)|)n \in L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^2)), \quad \forall T > 0,$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} n(t,x,y)(x^2+y^2)dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} n_0(x,y)(x^2+y^2)dxdy + 4\iint n_0 dxdy\Big(1 - \frac{\iint n_0 dxdy}{8\pi/\chi}\Big)t, \quad t > 0.$$

2) De plus, on a

$$\int_0^T \iint_{\mathbb{R}^2} n|\nabla(\log(n) - \chi\nabla c|^2 dxdydt < \infty, \quad \forall T > 0,$$

et $n \in L^\infty(]\epsilon, T[, L^p(\mathbb{R}^2))$ *pour tout* $\epsilon > 0$, $T > \epsilon$ *et* $p \in]1, \infty[$ *et*

$$F[n(T,.,.)] := \iint_{\mathbb{R}^2} n\log(n)dxdy - \frac{\chi}{2}\iint_{\mathbb{R}^2} ncdxdy \le F[n_0] - \int_0^T \iint_{\mathbb{R}^2} n|\nabla(\log(n) - \chi\nabla c|^2 dxdydt.$$

3) Si $\iint n_0 dxdy > 8\pi/\chi$ *alors il existe un temps maximal d'existence* $T^* < \infty$ *de la solution faible* L^1. *Au delà, elle se singularise.*

7.4 Existence en masse sous-critique

Par (7.2.26), la suite $(n_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée L^q $(q \geq 1)$ donc, on peut en extraire une sous suite faiblement convergente vers $\bar{n}$ dans les L^q $(q \geq 1)$. De plus, par (7.2.14), (7.2.22) et (7.2.22) et par la proposition 4.4.4 1. injection compacte : la suite $(\sqrt{n_\epsilon})_{\epsilon>0}$ est dans un compact fort $L^r([0,T] \times Compact)$ $(r > 1)$ donc $(n_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est dans un compact fort $L^q([0,T] \times Compact)$ $(q \geq 2)$ on peut en extraire une sous suite convergente fortement vers $\bar{n}$. De plus, par construction de $\mathcal{K}_1$,

$$\nabla c_\epsilon - \nabla c = \frac{-1}{2\pi} \iint \frac{(x-x', y-y')}{(x-x')^2 + (y-y')^2} (n^\epsilon(x',y') - \bar{n}(x',y')) dx'dy'$$
$$+ \iint_{(x-x')^2+(y-y')^2 \leq 4\epsilon^2} \underbrace{\Big(\frac{1}{\epsilon} \nabla \mathcal{K}_1 \frac{(x-x', y-y')}{\epsilon} + \frac{1}{2\pi} \frac{(x-x', y-y')}{(x-x')^2 + (y-y')^2} \Big)}_{\leq \frac{1}{2\pi\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}} n^\epsilon(x',y') dx'dy'$$

en notant que

$$\frac{1}{\sqrt{(x)^2 + (y)^2}} \in L^q(B(0,M)), \quad q \in [1, 2[$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{(x)^2 + (y)^2}} \in L^q({}^cB(0,M)), \quad q \in]2, \infty[$$

on a

$$|\nabla c_\epsilon - \nabla c| \to^{p.p.} 0 \quad et \quad |\nabla c_\epsilon - \nabla c| \leq Cst$$

donc

$$n^\epsilon \nabla c_\epsilon \to^{D'} \bar{n} \nabla c$$

et de même par continuité dans D' de la dérivation

$$\frac{\partial}{\partial t} n^\epsilon \to^{D'} \frac{\partial}{\partial t} \bar{n}$$

$$\Delta n^\epsilon \to^{D'} \Delta \bar{n}$$

$$div(\chi n^\epsilon \nabla c_\epsilon) \to^{D'} div(\chi \bar{n} \nabla c)$$

et donc $\bar{n}$ est solution de (8.0.4) au sens des distributions.

7.5 Explosion en masse sur-critique

Lemme 7.5.1 *Supposons qu'il existe des solutions faibles $n \in L^\infty([0,T], L^1_+(\mathbb{R}^2))$ de KS vérifiant*

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\mathbb{R}^2} n(t,x,y)\phi(x,y)dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} n(t,x,y)\Delta\phi(t,x,y)dxdy$$

$$-\frac{\chi}{4\pi}\iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \frac{\Big[\nabla\phi(x,y)-\nabla\phi(x',y')\Big].\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y'\end{pmatrix}}{|x-x'|^2+|y-y'|^2} n(t,x,y)n(t,x',y')dxdydx'dy',\ \forall t\in\mathbb{R},\ \forall\phi\in D(\mathbb{R}^2), \tag{7.5.28}$$

avec la trace sur le bord $t=0$: $\gamma_0(n(t,.)) = n_0(.) \geq 0$ tel que

$$\iint_{\mathbb{R}^2}(1+x^2+y^2)n_0(x,y)dxdy < \infty,$$

alors

$$\iint_{\mathbb{R}^2} n(t,x,y)dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} n_0(x,y)dxdy = m_0, \quad \forall t\in[0,T],$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2}(x^2+y^2)n(t,x,y)dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2}(x^2+y^2)n_0(x,y)dxdy + 4m_0(1-\frac{m_0\chi}{8\pi})t, \quad \forall t\in[0,T].$$

Par conséquent, lorsque $m_0 > 8\pi/\chi$ il n'existe pas de solution $L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^2))$ pour

$$T > t^* = \frac{\iint_{\mathbb{R}^2}(x^2+y^2)n_0(x,y)dxdy}{4m_0(\frac{m_0\chi}{8\pi}-1)}$$

Preuve On pose

$$\phi_R(x,y) = \psi(\frac{x^2+y^2}{R^2}),$$

avec

$$\psi(z) = \begin{cases} 1, & z\in[-1/2,1/2], \\ 0, & z\in]-\infty,-1]\cup[1,\infty[\\ C^\infty(\mathbb{R}) \end{cases}$$

alors

$$\nabla\phi_R(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{R^2}\psi'(\frac{x^2+y^2}{R^2}) \\ \frac{2y}{R^2}\psi'(\frac{x^2+y^2}{R^2}) \end{pmatrix} = \frac{2\psi'(\frac{x^2+y^2}{R^2})}{R^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{\Big[\nabla\phi_R(x,y)-\nabla\phi_R(x',y')\Big].\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y'\end{pmatrix}}{|x-x'|^2+|y-y'|^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{(x-x')^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi_R + (y-y')^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi_R}{(x-x')^2+(y-y')^2}(sx+(1-s)x', y+(1-s)y')ds$$

$$+\int_0^1 \frac{2(x-x')(y-y')\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\phi_R}{(x-x')^2+(y-y')^2}(sx+(1-s)x', y+(1-s)y')ds$$

$$\Delta\phi_R(x,y) = \psi'(\frac{x^2+y^2}{R^2})\frac{4}{R^2} + \psi''(\frac{x^2+y^2}{R^2})\frac{4(x^2+y^2)}{R^4}$$

donc tant que $n \in L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^2))$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |n(t,x,y)||\Delta\phi_R(x,y)\phi(t,x,y)|dxdy \leq \frac{4}{R^2}(\|\psi'\|_\infty + \|\psi''\|_\infty))\iint_{\mathbb{R}^2} |n(t,x,y)|dxdy \underset{R\to\infty}{\to} 0$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} |\Big[\nabla\phi(x,y) - \nabla\phi(x',y')\Big].\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}||n(t,x,y)||n(t,x',y')|dxdydx'dy'$$
$$\leq \frac{8}{R^2}(\|\psi'\|_\infty + \|\psi''\|_\infty))(\iint_{\mathbb{R}^2} |n(t,x,y)|dxdy)^2 \underset{R\to\infty}{\to} 0.$$

Par conséquent tant que $n \in L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^2))$,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} n(t,x,y)dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} n_0(x,y)dxdy = m_0, \quad \forall t \in [0,T].$$

On pose

$$\phi_R(x,y) = (x^2+y^2)\psi(\frac{x^2+y^2}{R^2}),$$

avec

$$\psi(z) = \begin{cases} 1, & z \in [-1/2, 1/2], \\ 0, & z \in]-\infty,-1] \cup [1,\infty[\\ C^\infty(\mathbb{R}) & \end{cases}$$

alors

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi_R(x,y) = 2\phi_R(x,y) + \chi_{x^2+y^2\geq R^2/4}O(1),$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi_R(x,y) = 2\phi_R(x,y) + \chi_{x^2+y^2\geq R^2/4}O(1),$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\phi_R(x,y) = \chi_{x^2+y^2\geq R^2/4}O(1),$$

et

$$\frac{\Big[\nabla\phi_R(x,y) - \nabla\phi_R(x',y')\Big].\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}}{|x-x'|^2+|y-y'|^2}$$
$$= \int_0^1 \frac{(x-x')^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi_R + (y-y')^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi_R}{(x-x')^2+(y-y')^2}(sx+(1-s)x', y+(1-s)y')ds$$
$$+ \int_0^1 \frac{2(x-x')(y-y')\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\phi_R}{(x-x')^2+(y-y')^2}(sx+(1-s)x', y+(1-s)y')ds$$
$$\to_{R\to\infty} 2 \quad \text{et dominée par une constante ind. de } R \;:\; C(1+\|\psi'\|_\infty + \|\psi''\|_\infty)$$

$\Delta\phi_R(x,y) = 4\phi_R(x,y)+\chi_{(x^2+y^2\geq R^2/4}O(1) \to_{R\to\infty} 4$ et dominée par une constante ind. de R : $C(1+\|\psi'\|_\infty+\|\psi''\|_\infty)$.

Par conséquent tant que $n \in L^\infty([0,T],L^1(\mathbb{R}^2))$, et par convergence dominée

$$\frac{d}{dt}\iint_{\mathbb{R}^2}(x^2+y^2)n(t,x,y)dxdy = 4\iint_{\mathbb{R}^2} n(t,x,y)dxdy - \frac{\chi}{2\pi}(\iint_{\mathbb{R}^2} n(t,x,y)dxdy)^2 = 4m_0(1-\frac{m_0}{(\frac{8\pi}{\chi})}), \quad \forall t \in [0,T].$$

et en intégrant par rapport au temps

$$\iint_{\mathbb{R}^2}(x^2+y^2)n(t,x,y)dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2}(x^2+y^2)n_0(x,y)dxdy + t4m_0(1-\frac{m_0}{(\frac{8\pi}{\chi})}).$$

Par conséquent pour $T > t^*$ on doit avoir $\iint_{\mathbb{R}^2}(x^2+y^2)n(t,x,y)dxdy = 0$ et $\iint_{\mathbb{R}^2} n(t,x,y)dxdy = m_0 > 0$ (masse de dirac), ce qui est impossible. $\square$

Chapitre 8

Exercices

8.1 BE1

Exercice 1 : Soit E un espace normé, F un espace de Banach et

$$\phi : D \mapsto F$$

linéaire, avec $D \subset E$ dense dans E, telle que

$$\sup_{d \in D,\ d \neq 0} \frac{\|\phi(d)\|_F}{\|d\|_E} \leq C.$$

Montrer qu'il existe une unique application linéaire continue de E dans F prolongeant ϕ sur E.

Exercice 2 : Soit $T_y : \phi \in C([0,1]) \mapsto \int_y^1 \phi(s)ds \in \mathbb{R}$ et τ la moins fine topologie rendant continue les applications $(T_y)_{y \in [0,1]}$.

a) Montrer que $(C([0,1], \tau)$ est séparé.
b) Montrer que $\phi_n \to^{\tau_{\|\cdot\|_\infty}} \phi$ implique $\phi_n \to^{\tau} \phi$.
c) Est ce que $\phi_n \to^{\tau} \phi$ implique $\phi_n \to^{\tau_{\|\cdot\|_\infty}} \phi$?
d) Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ montrer que $\phi_n \to^{\tau_{\|\cdot\|_\infty}} \phi$ implique $G(\phi_n) \to^{\tau_{\|\cdot\|_\infty}} G(\phi)$. Par densité, montrer que si G est $G \in C^0(\mathbb{R})$, le résultat reste vrai.
e) Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$. Est ce que $\phi_n \to^{\tau_{\|\cdot\|_\infty}} \phi$ implique $G(\phi_n) \to^{\tau_{\|\cdot\|_\infty}} G(\phi)$?
f) Qu'est ce qui explique ces différences entre e) et d) ?

Exercice 3 :
a) Montrer que lorsque $p \neq q$, il existe $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ mais $g \notin L^q(\mathbb{R}^N$
b) Montrer que si Ω est bornée : $(L^p(\Omega))_p$ est une suite décroissante de sous ensemble de $L^1(\Omega)$.
c) Montrer que l'ensemble $F = \bigcap_{p \geq 1, m \geq 1} W^{p,m}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans tout $W^{p',m'}$ avec $p' < \infty$ et $m' \geq 1$.
d) Montrer que $\phi : x \mapsto \chi_{\mathbb{Q}}$ est $W^{1,1}(\mathbb{R})$
e) Montrer que $\phi : x \mapsto \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p+q}} \chi_{[p/q, p/q+1]}(x) \sqrt{(x - p/q)(p/q + 1 - x)}$ est $W^{1,1}(\mathbb{R})$

Exercice 4 :
Les suites de fonctions suivantes convergent t'elles ?
Peut on en extraire des sous suites convergentes ?

a) $f_n : x \mapsto \sin(nx)\chi_{[0,2\pi]}(x)$
b) $f_n : x \mapsto \sin^2(nx)\chi_{[0,2\pi]}(x)$
c) $f_n : x \mapsto n^\alpha e^{-n^\beta x^2}$
d) $f_n : x \mapsto \frac{n\sin(nx)}{1+x^2}$
e) $f_n : x \mapsto \frac{1}{n}|x|^{\frac{1}{n}-1}$
f) $f_n : x \mapsto e^{-(x+n)^2}$
g) $f_n : x \mapsto \sin(1/x)\chi_{[\frac{1}{2n\pi},\frac{1}{2\pi}]}(x)$.

Exercice 5 :
Soit $G \in C_b^0$, on construit (par morceaux) la suite $(f_n)_n$ continue sur $[0,1]$:
$f_n(0) = c_0$
$f_n(x) = f_n(k/n) + \int_{k/n}^x G(f_n(k/n), y)dy, \quad y \in]k/n, (k+1)/n]$

a) Montrer que l"on peut extraire une sous suite convergente dans $(C([0,1], \tau_{\|.\|_\infty})$.
b) Montrer que la limite f est solution de

$$f'(y) = G(f(y), y), \quad y \in]0,1[, \quad f(0) = c_0.$$

c) A t'on unicité de la solution d'une EDO lorsque G est seulement continue ?
d) Peut on étendre ce résultat pour des fonctions G "moins régulières" ?
e) Peut on faire la même chose avec extraction d'une sous suite suite convergente faible * dans $(C([0,1], \tau_{\|.\|_\infty})$?
f) On pose

$$g_{n+1} = c_0 + \int_0^x G(g_n(y), y))dy,$$

peut on faire le même raisonnement que dans a) b) ?

8.2 BE2

Transport linéaire :

$$\text{(eq. principale)} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n(t,x,y) + \mathbf{b}(t,x,y)\nabla n(t,x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R} \\ n(0,x,y) = n_0(x) \end{cases} \tag{8.2.1}$$

1) Simuler les solutions de l'équation (8.0.1) lorsque le champs de vitesse est constant $\mathbf{b}(x,y) = (1,1)$.
2) Simuler les solutions de l'équation (8.0.1) lorsque le champs de vitesse :
a) $\mathbf{b}(x,y) = (y, -x)$
b) $\mathbf{b}(x,y) = (y/\sqrt{x^2+y^2}, -x/\sqrt{x^2+y^2})$
c) $\mathbf{b}(x,y) = (\sin(10*y), \cos(20*x)))$
d) $\mathbf{b}(x,y) = (H(y), H(x))$ avec $H(z) = 1$ si $z > 0$ et 0 sinon.
3) Simuler les solutions de l'équation (8.0.1) lorsque le champs de vitesse $\mathbf{b}(t,x,y) = (\epsilon t\cos(t) - x, \epsilon t \sin(t) - y)$.

Dans chacun des cas, est ce que les simulations sont en accord avec la théorie ?

Chimiotaxie : Equations cinétiques

$$\text{(eq. principale)} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n(t,x,y,\zeta) + \zeta\nabla_{(x,y)} n(t,x,y,\zeta) + K[n](t,x,y,\zeta) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \zeta \in B \\ n(0,x,y,\zeta) = n_0(x,y,\zeta) \\ K[f](t,x,y,\zeta) = \int_B k(t,x,y,\zeta',\zeta) f(t,x,y,\zeta) d\zeta' - \int_B k(t,x,y,\zeta,\zeta') f(t,x,y,\zeta') d\zeta' \end{cases} \tag{8.2.2}$$

Cette fois ci, x, y est la position et ζ le vecteur vitesse.

1) Simuler les solutions de l'équation (8.0.2) lorsque $k = 0$.
2) Simuler les solutions de l'équation (8.0.2) lorsque $B = \{(\zeta_x, \zeta_y) \ : \ \zeta_x^2 + \zeta_y^2 \leq 1\}$ et $k = 1$ (dans un premier temps sans le terme $\zeta\nabla_{(x,y)} n(t,x,y,\zeta)$ puis avec).
3) Que représentent les termes $\zeta\nabla_{(x,y)} n(t,x,y,\zeta)$ et le terme $K[f](t,x,y,\zeta)$.
4) Simuler les solutions de l'équation (8.0.2) lorsque $B = \{(\zeta_x, \zeta_y) \ : \ \zeta_x^2 + \zeta_y^2 \leq 1\}$ et $k = e^{-((\zeta_x'+x)^2 + (\zeta_y'+y)^2)}$
4) Simuler les solutions de l'équation (8.0.2) lorsque $B = \{(\zeta_x, \zeta_y) \ : \ \zeta_x^2 + \zeta_y^2 \leq 1\}$ et $k = e^{-((\zeta_x'+x)^2 + (\zeta_y'+y)^2)} e^{-((\zeta_x'-\zeta_x)^2 + (\zeta_y'-\zeta_y)^2)}$

A t'on (théoriquement et/ou numériquement) :
1) Conservation de la masse : $\iint n(t,x,\zeta) dx d\zeta = \iint n_0(x,\zeta) dx d\zeta, \quad t \geq 0$
2) Contraction :

$$\frac{d}{dt} \iint |n(t,x,\zeta)| dx d\zeta \leq 0, \quad t \geq 0$$

3) lorsque $k(t,x,\zeta,\zeta') = \sigma_S(\zeta,\zeta')/M(\zeta)$ avec $M > 0$ et σ_S symétrique alors

$$\|n/M^{\frac{p-1}{p}}\|_{L^p(\mathbb{R}^d \times B)} \leq \|n_0/M^{\frac{p-1}{p}}\|_{L^p(\mathbb{R}^d \times B)}, \quad \forall t \geq 0, \forall p \in [1, \infty].$$

Chimiotaxie : transport avec diffusion

$$\text{(eq. TD)} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n(t,x) + \nabla f(t,x) n(t,x) = \Delta n(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R} \\ n(0,x) = n_0(x) \end{cases} \tag{8.2.3}$$

avec $f \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)$.
1) Simuler les solutions de l'équation (8.0.3) lorsque $f = (0,0)$.
2) Simuler les solutions de l'équation (8.0.3) lorsque $f = (1,1)$.
3) Soit $(x(t), y(t))$ la position d'un groupe d'humains dans $\mathbb{R}^2$ au temps t (prédéfinit) et n la densité d'un groupe de Zombies, comment choisir f pour que les zombies chassent les humains. Créer un exemple et simuler.

Equation KS

$$\text{(eq. principale)} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n(t,x,y) - \Delta n(t,x,y) + div(\chi n(t,x,y) grad(c)) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R} \\ c(t,x,y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} |x-x'| \\ |y-y'| \end{pmatrix} n(t,x',y') dx'dy' \\ n(0,x,y) = n_0(x,y) \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^1_+(\mathbb{R}^d). \end{cases} \tag{8.2.4}$$

On note que

$$\Delta c = -n$$

1) Simuler les solutions de l'équation (8.0.4) lorsque $\iint n_0 dxdy << 8\pi/\chi$ et tracer

$$t \mapsto \iint_{\mathbb{R}^2} n(t,x,y)(x^2+y^2) dxdy$$

$$t \mapsto \iint_{\mathbb{R}^2} n \log(n) dxdy - \frac{\chi}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} ncdxdy$$

2) Simuler les solutions de l'équation (8.0.4) lorsque $\iint n_0 dxdy >> 8\pi/\chi$ et tracer

$$t \mapsto \iint_{\mathbb{R}^2} n(t,x,y)(x^2+y^2) dxdy$$

$$t \mapsto \iint_{\mathbb{R}^2} n \log(n) dxdy - \frac{\chi}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} ncdxdy$$

3) Qu'observe t'on ?

Chapitre 9

Annexes

9.1 Inégalités classiques

Proposition 9.1.1 *(Markov type) Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ alors*

$$\||f(x)|^s \chi_{\{x\,:\,|f(x)|>M\}}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{M^{p-s}}\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R})}, \quad s \in [0,p].$$

Proposition 9.1.2 *(Holder) On a*

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \quad p,q,r \geq 1$$

et l'inégalité de Young (interpolation),

$$\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C_{p_0,\alpha,p_1}\|g\|^{\alpha}_{L^{p_0}(\mathbb{R}^2)}\|g\|^{1-\alpha}_{L^{p_1}(\mathbb{R}^2)}, \quad 1/q = \alpha/p_0 + (1-\alpha)/p_1$$

donc $L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega) \subset \bigcap\limits_{s\in[p,q]} L^s(\Omega)$

Proposition 9.1.3 *(Poincaré) On a pour $p \in [1,\infty[$*

$$\|f\|_{W^{p,1}(\Omega)} \leq C_{N,p,\Omega}\Big(\|\nabla f\|_{L^p} + \int_{\sigma(\Omega)} f(s)d\sigma(s)\Big),$$

avec Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^N$ et $\sigma(\Omega)$ la frontière de Ω.

Proposition 9.1.4 *(Poincaré) On a pour $p \in [1,\infty]$*

$$\|f - \int_\Omega f(s)\frac{ds}{\int_U 1dx}\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{N,p,\Omega}\Big(\|\nabla f\|_{L^p}\Big),$$

avec Ω un ouvert borné, connexe et régulier de $\mathbb{R}^N$. De plus lorsque Ω est convexe et de diamètre d alors

$$C_{N,p,\Omega} \leq d/\pi.$$

Proposition 9.1.5 *[7](Hardy-Littlewwod-Sobolev log en dim 2) On a pour $f \in L^1_+(\mathbb{R}^2)$*

$$\int f\log(f)dx + \frac{2}{\int f dx}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(x)f(y)\log|x-y|dxdy \geq \int fdx\Big(\log(\int fdx) - (1+\log(\pi))\Big),$$

Proposition 9.1.6 *[1](Jensen) On a pour $f \in L^1_+(\mathbb{R}^2, \mu(dx))$ avec $\int \mu(dx) = 1$ alors pour toute fonctionnelle convexe :*

$$\int \phi(f(x))dx \leq \phi(\int f(x))dx,$$

Proposition 9.1.7 *[6, 17](Glagliardo-Nirenberg-Sobolev) On a pour $p < N$,*

$$\|.\|_{L^{Np/(N-p)}} \leq C_{N,p}\|\nabla.\|_{L^p} \quad \textit{Glagliardo-Nirenberg-Sobolev } \mathbb{R}^N$$

De plus, on a par interpolation, pour $q \in [p, Np/(N-p)[$ $(p < N)$,

$$\|.\|_{L^q} \leq C_{N,p,q}\|.\|^{\alpha}_{L^p}\|.\|^{1-\alpha}_{L^{Np/(N-p)}} \leq C_{N,p,q}\|.\|^{\alpha}_{L^p}\|\nabla.\|^{1-\alpha}_{L^p} \leq C_{N,p,q}\|.\|_{W^{p,1}} \quad \textit{Glagliardo-Nirenberg-Sobolev } \mathbb{R}^N$$

Ainsi, par interpolation, $(p < N)$,

$$\|.\|_{L^r(\Omega)} \leq C_{N,p,q,r}\|.\|^{\theta}_{W^{p,1}(\Omega)}\|.\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}. \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta(N-p)}{Np} + \frac{1-\theta}{q}\textit{Glagliardo-Nirenberg-Sobolev}$$

Lorsque $p = N$, on a pour tout $q \in [N, \infty[$,

$$\|.\|_{L^q} \leq C_{N,q}\|.\|^{\alpha}_{L^N}\|\nabla.\|^{1-\alpha}_{L^N} \leq C_{N,q}\|.\|_{W^{N,1}} \quad \textit{Glagliardo-Nirenberg-Sobolev } \mathbb{R}^N$$

9.2 Théorème de points fixes classiques

Proposition 9.2.1 *[20, 10](Banach) Soit X un espace de Banach, $F \subset X$ un ensemble fermé et $\mathcal{T} : Q \mapsto Q$ telle que,*

$$(\textit{contraction}) \ \ \|\mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(y)\| \leq q\|x-y\|, \quad \forall(x,y) \in F,$$

avec $q < 1$, alors il existe un unique $x^* \in F$ tel que

$$\mathcal{T}(x) = x.$$

Proposition 9.2.2 *[20, 10](Brower) Soit $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ telle que,*

$$(\textit{conserve la boule } :-)) \quad \sup_{x\,:\,\|x\|\leq 1} \|\mathcal{T}(x)\| \leq 1,$$

alors il existe (au moins un) $x^* \in \{x \ : \ \|x\| \leq 1\}$ tel que

$$\mathcal{T}(x^*) = x^*.$$

Proposition 9.2.3 *[20, 10](Brower2) Soit S un ensemble convexe fermé borné d'intérieur non vide dans X espace de Banach et $\mathcal{T} : X \mapsto X$ continue,*

$$(\textit{conserve } S) \ \ \mathcal{T}(S) \subset S,$$

alors il existe (au moins un) $x^* \in S$ tel que

$$\mathcal{T}(x^*) = x^*.$$

Proposition 9.2.4 *[20, 10](Schauder) Soit S un ensemble convexe fermé borné dans X espace de Banach et $\mathcal{T} : X \mapsto X$ compact sur S,*

$$(conserve\ S)\ \ \mathcal{T}(S) \subset S,$$

alors il existe (au moins un) $x^* \in S$ tel que

$$\mathcal{T}(x^*) = x^*.$$

Bibliographie

[1] Billingsley P., Probability and Measure, John Wiley & Sons, 2012

[2] Blanchet, Adrien, Dolbeault, Jean et Perthame, Benoit (2006) Two-dimensional Keller-Segel model : optimal critical mass and qualitative properties of the solutions. Electronic Journal of Differential Equations.

[3] Bourbaki, N., *General Topology I*, Springer, 1989.

[4] Bourbaki, N., *Algèbre I*, Hermann, 1970.

[5] H. Brezis., *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*, Paris : Masson, 1983.

[6] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer, New York, NY, USA, 2011.

[7] E. Carlen and M. Loss, *Competing symmetries, the logarithmic HLS inequality and Onofri's inequality on Sn*, Geom. Funct. Anal., 2 (1992), pp. 90–104.

[8] Demengel F. et G., *Espaces fonctionnels*, EDP Sciences, 2007.

[9] Evans L.C., *Partial Differential Equations*, (Graduate Studies in Mathematics), Second Edition - AMS, 2010.

[10] Istratescu V.I., *Fixed Point Theory, An Introduction*, D.Reidel, Holland (1981)

[11] Kuratowski, C., *Topologie I& II*, Jacques Gabay, 1961.

[12] Lieberman G. M., *Second order parabolic differential equations*, World Scientific Pub- lishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1996.

[13] Lions J.-L., *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 111, Springer-Verlag, Berlin, 1961.

[14] Perthame B., *Transport Equations in Biology.*, Series : Frontiers in Mathematics, 2007.

[15] Wagschal, C., *Dérivation, Intégration*, Hermann, 1999.

[16] Wagschal, C., *Topologie et analyse fonctionnelle*, Hermann, 1995.

[17] M. I. Weinstein, *Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates*, Comm. Math. Phys., 87 (1982/83), pp. 567–576.

[18] Schwartz, L., *Analyse III (Calcul intégral)*, Hermann, 1991.

[19] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Paris : Hermann, 1966.

[20] Trénoguine V., *Analyse fonctionnelle* , Édition : Editions mir, 1985

[21] Yoshida k., *Functional analysis*, Springer-verlag 6th edition, 1980