BE1 - Méthodes variationnelles pour les EDPs

Philippe MICHEL

15 octobre 2014

Exercice 1 : Soit E un espace normé, F un espace de Banach et

$$\phi : D \mapsto F$$

linéaire, avec $D \subset E$ dense dans E, telle que

$$\sup_{d\in D,\ d\neq 0} \frac{\|\phi(d)\|_F}{\|d\|_E} \leq C.$$

Montrer qu'il existe une unique application linéaire continue de E dans F prolongeant ϕ sur E.

Exercice 2 : Soit $T_y : \phi \in C([0,1]) \mapsto \int_y^1 \phi(s)ds \in \mathbb{R}$ et τ la moins fine topologie rendant continue les applications $(T_y)_{y\in[0,1]}$.

a) Montrer que $(C([0,1],\tau)$ est séparé.
b) Montrer que $\phi_n \to^{\tau_{\|\cdot\|_\infty}} \phi$ implique $\phi_n \to^{\tau} \phi$.
c) Est ce que $\phi_n \to^{\tau} \phi$ implique $\phi_n \to^{\tau_{\|\cdot\|_\infty}} \phi$?
d) Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ montrer que $\phi_n \to^{\tau_{\|\cdot\|_\infty}} \phi$ implique $G(\phi_n) \to^{\tau_{\|\cdot\|_\infty}} G(\phi)$. Par densité, montrer que si G est $G \in C^0(\mathbb{R})$, le résultat reste vrai.
e) Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$. Est ce que $\phi_n \to^{\tau_{\|\cdot\|_\infty}} \phi$ implique $G(\phi_n) \to^{\tau_{\|\cdot\|_\infty}} G(\phi)$?
f) Qu'est ce qui explique ces différences entre e) et d) ?

Exercice 3 :
a) Montrer que lorsque $p \neq q$, il existe $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ mais $g \notin L^q(\mathbb{R}^N$
b) Montrer que si Ω est bornée : $(L^p(\Omega))_p$ est une suite décroissante de sous ensemble de $L^1(\Omega)$.
c) Montrer que l'ensemble $F = \bigcap_{p\geq 1, m\geq 1} W^{p,m}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans tout $W^{p',m'}$ avec $p' < \infty$ et $m' \geq 1$.
d) Montrer que $\phi : x \mapsto \chi_{\mathbb{Q}}$ est $W^{1,1}(\mathbb{R})$
e) Montrer que $\phi : x \mapsto \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p+q}} \chi_{[p/q, p/q+1]}(x) \sqrt{(x-p/q)(p/q+1-x)}$ est $W^{1,1}(\mathbb{R})$

Exercice 4 :
Les suites de fonctions suivantes convergent t'elles ?
Peut on en extraire des sous suites convergentes ?

a) $f_n : x \mapsto \sin(nx)\chi_{[0,2\pi]}(x)$
b) $f_n : x \mapsto \sin^2(nx)\chi_{[0,2\pi]}(x)$
c) $f_n : x \mapsto n^\alpha e^{-n^\beta x^2}$

d) $f_n : x \mapsto \frac{n\sin(nx)}{1+x^2}$
e) $f_n : x \mapsto \frac{1}{n}|x|^{\frac{1}{n}-1}$
f) $f_n : x \mapsto e^{-(x+n)^2}$
g) $f_n : x \mapsto \sin(1/x)\chi_{[\frac{1}{2n\pi},\frac{1}{2\pi}]}(x)$.

Exercice 5 :
Soit $G \in C_b^0$, on construit (par morceaux) la suite $(f_n)_n$ continue sur $[0,1]$:
$f_n(0) = c_0$
$f_n(x) = f_n(k/n) + \int_{k/n}^x G(f_n(k/n), y)dy, \quad y \in]k/n, (k+1)/n]$

a) Montrer que l''on peut extraire une sous suite convergente dans $(C([0,1], \tau_{\|\cdot\|_\infty})$.
b) Montrer que la limite f est solution de

$$f'(y) = G(f(y), y), \quad y \in]0,1[, \quad f(0) = c_0.$$

c) A t'on unicité de la solution d'une EDO lorsque G est seulement continue ?
d) Peut on étendre ce résultat pour des fonctions G "moins régulières" ?
e) Peut on faire la même chose avec extraction d'une sous suite suite convergente faible * dans $(C([0,1], \tau_{\|\cdot\|_\infty})$?
f) On pose

$$g_{n+1} = c_0 + \int_0^x G(g_n(y), y))dy,$$

peut on faire le même raisonnement que dans a) b) ?