NdC PXI-Orsay: Fonctions Holomorphes

Philippe MICHEL

22 mars 2013

Table des matières

Chapitre 1

Définitions et premières propriétés

1.1 Définitions et bases

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.1
- La fonction f est **dérivable** *par rapport à z en z_0 si et seulement si la limite $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe dans $\mathbb{C}$ et on note $f'(z_0)$ cette limite.*

- La fonction f est **Holomorphe** *sur Ω si et seulement si f est dérivable par rapport à z sur Ω : on note $\mathcal{H}(\boldsymbol{\Omega})$ l'ensemble des fonctions holomorphe sur Ω.*

Proposition 1.1.2
- $\mathcal{H}(\Omega)$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.

- Si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ alors $fg \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $(fg)' = f'g + fg'$.

- Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et ne s'annule pas sur Ω alors $1/f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $(1/f)' = -f'/f^2$.

- Si $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $f \in \mathcal{H}(g(\Omega))$ alors $fog \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $(fog)' = g'f'og$.

- $f : z \to z^n$ est $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ et $f'(z_0) = nz_0^{n-1}$.

- Soit la série $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ alors $f \in \mathcal{H}(Boule(0, R))$ et $f'(z) = \sum_0^{\infty} na_n z^{n-1}$.

Preuve Seule la dernière propriété est non triviale (les autres sont hérités de la notion de dérivation).

Etape 1. Soit $R_0 < R_1 < R$, alors la série converge normalement sur la boule de centre 0 et de rayon R_0 : $B(0, R_0)$. En effet, puisque la série converge pour $z = R_1$, le terme général de la série : $a_n R_1^n$ converge vers 0 donc la suite $\mid a_n R_1^n \mid$ est borné par un réel $M > 0$. Par conséquent pour tout $z \in B(0, R_0)$, $\mid a_n z^n \mid \leq \mid a_n R_0^n \mid \leq M(\frac{R_0}{R_1})^n$ qui est le terme général d'une série convergente.

Etape 2. Soit

$$g_n(z, z_0) = \begin{cases} \frac{z_0^n - z^n}{z_0 - z}, & si \ \ z \neq z_0 \\ n z_0^{n-1}, & si \ \ z = z_0 \end{cases}$$

alors on a $\mid g_n(z, z_0) \mid \leq n(\max(\mid z \mid, \mid z_0 \mid))^{n-1}$. En effet, pour $z = z_0$ c'est trivial et sinon

$$\frac{z_0^n - z^n}{z_0 - z} = \sum_{i+j=n-1} z^i z_0^j$$

donc

$$\mid \frac{z_0^n - z^n}{z_0 - z} \mid \leq n(\max(\mid z \mid, \mid z_0 \mid))^{n-1}.$$

Etape 3. La série de terme général $a_n g_n(z, z_0)$ converge normalement sur $B(0, R_0)$. En effet, on a

$$\mid a_n g_n(z, z_0) \mid \leq n \mid a_n \mid R_0^{n-1} \leq \frac{1}{R_1} n \mid a_n \mid R_1^n (\frac{R_0}{R_1})^{n-1} \leq \frac{M}{R_1} n (\frac{R_0}{R_1})^{n-1},$$

qui est le terme général d'une série convergente.

Etape 4. On a $g_n \in C^0(B(0, R_0))$ et la série de terme général $a_n g_n(z, z_0)$ converge normalement donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(z, z_0) \rightarrow_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z_0^{n-1},$$

or, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(z, z_0) \rightarrow_{z \rightarrow z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

donc

$$f'(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}.$$

On a par récurrence que $a_n = f^{(n)}(0)/n!$. □

1.2 Holomorphie et Différentiation

Soit une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, alors on peut l'écrire

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y).$$

On note que f est dérivable en z_0 implique

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)(z - z_0),$$

donc pour $z = z_0 + h$ avec $h = k + il$ et $f'(z_0) = a + ib$ on trouve que

$$P(z_0 + h) = P(z_0) + [ak - bl] + o(h), \quad Q(z_0 + h) = Q(z_0) + [bk + al] + o(h)$$

et la différentielle de $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ en (x, y) est

$$D_{x,y} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

avec

$$(relation\ \ de\ \ Cauchy) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} P = a = \frac{\partial}{\partial y} Q \\ \\ -\frac{\partial}{\partial x} Q = -b = \frac{\partial}{\partial y} P \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Proposition 1.2.1
($f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe sur Ω)$\Leftrightarrow$ (($x, y) \to (P, Q)$ différentiable dans Ω et (1.2.1)).

De plus on a

$$f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial x} P + i \frac{\partial}{\partial x} Q = \frac{\partial}{\partial y} Q - i \frac{\partial}{\partial y} P = \frac{\partial}{\partial x} f = (1/i) \frac{\partial}{\partial y} f.$$

Remarque 1 On a $df = dP + idQ = (\frac{\partial}{\partial x} P dx + \frac{\partial}{\partial y} Q dy) + i(\frac{\partial}{\partial x} Q dx + \frac{\partial}{\partial y} Q dy)$, *or* $dz = dx + idy$ *et* $d\bar{z} = dx - idy$ *donc*

$$df = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} f - i \frac{\partial}{\partial y} f) dz + \frac{1}{2} \underbrace{(\frac{\partial}{\partial x} f + i \frac{\partial}{\partial y} f)}_{=0} d\bar{z},$$

et la relation de Cauchy est équivalente à $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$.

Biholomorphie Soit $f : \Omega \to \Omega'$ alors

Proposition 1.2.2
$\left\{\begin{array}{l} a-\ f\ \ holomorphe\ \ et\ \ bijective \\ b-\ \ f'\ \ ne\ \ s'annule\ \ pas \end{array}\right. \Rightarrow f^{-1} : \Omega' \to \Omega$ *Holomorphe et*

$$(f^{-1})'(f(z)) = 1/f'(z).$$

Preuve Soit $f = P + iQ$, alors le déterminant de la Jacobienne $det(Jac(f)) =\mid f'(z) \mid^2 = (\frac{\partial}{\partial x}P)^2 + (\frac{\partial}{\partial y}Q)^2$ et $Jac^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ donc

$$(f^{-1})'(f(z)) = (a - ib)/(a^2 + b^2) = 1/(a + ib) = 1/f'(z).$$

□

Exemple 1 La fonction exponentielle : on définit l'exponentielle par

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n! \tag{1.2.2}$$

C'est une série convergente de rayon de convergence $R = \infty$ et donc Holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $(e^z)' = e^z$.

Proposition 1.2.3 *($f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ et $f' = f$ avec $f(0) = 1$)$\Rightarrow$ (f = Exponentielle)*

Preuve *On pose $h(z) = f(z)e^{-z}$ alors $h'(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$ qui est un ouvert connexe donc $h(z) = Constante = h(0) = 1$ et de plus $g(z) = e^{-z}e^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (ouvert connexe) de dérivée nulle donc $g(z) = g(0) = 1$ donc $e^{-z} = 1/e^z$ et $f(z) = 1/e^{-z} = e^z$.*
□

Proposition 1.2.4 *On a $e^{z+w} = e^z e^w$.*

Preuve *On pose $h(z) = e^z + e^{z+w} - e^z e^w$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C}$; alors $h'(z) = e^z + e^{z+w} - e^z e^w = h(z)$ (composition et produit), $h(0) = 1$ donc $h(z) = e^z$ par la proposition précédente et $e^{z+w} - e^z e^w = 0$ sur $\mathbb{C}$.* □

Exemple 2 La fonction Logarithme : on définit le logarithme sur $\mathbb{C}/\mathbb{R}_-$ par

$$Log(z) = \ln(\mid z \mid) + iArg(z), \tag{1.2.3}$$

avec $| z |= \sqrt{x^2+y^2}$ *et*

$$Arg(z) = \begin{cases} \arctan(y/x), & x > 0, \\ \\ \pi/2 - \arctan(x/y), & y > 0, \\ \\ -\pi/2 - \arctan(x/y), & y < 0. \end{cases}$$

(on note que $\arctan(u) + \arctan(1/u) = \pi/2$*)*

Proposition 1.2.5 *$z \to Log(z)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}/\mathbb{R}_-$ et*

$$e^{Log(z)} = z.$$

Preuve *Il suffit de vérifier la relation de Cauchy pour l'Holomorphie et*

$$Log'(z) = (x - iy)/(x^2 + y^2),$$

donc $f(z) = e^{Log(z)}$ vérifie $(zf' - f)/z^2 = 0$ et par conséquent $f/z = Cste = f(1)/1 = 1$.
$\square$

On remarque que l'on peut définir une fonction holomorphe "racine carré" par $\sqrt{z} = e^{Log(z)/2}$ pour $z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}_-$.

1.3 Intégration sur un chemin de classe $C^1_m \bigcap C^0$

Définition 1.3.1 *Soit une fonction $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $C^1_m \bigcap C^0$, on dit que γ est un* **paramétrage du chemin** *et $\gamma^* = \gamma([a,b])$ est le* **chemin support***.*

Définition 1.3.2 *On définit* **l'intégrale le long du chemin** *γ^* par*

$$\int_{\gamma^*} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \tag{1.3.4}$$

Exemple 3 Pour $\gamma(t) = e^{it}$ avec $t \in [0, 2 : pi]$, on a

$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{z} dz = \int_0^\pi e^{-it} i e^{it} dt = 2i\pi.$$

Proposition 1.3.3 *Cette "intégrale" est*

a- linéaire (quand tout est bien définit) :

$$\int_{\gamma^*} (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_{\gamma^*} f(z)dz + \beta \int_{\gamma^*} g(z)dz$$

b- $\mid \int_{\gamma^*} f(z)dz \mid \leq \sup_{\gamma^*} \mid f \mid long(\gamma)$ *avec la longueur de* γ : $long(\gamma) := \int_a^b \mid \gamma'(t) \mid dt.$

c- Changement de variable : soit ϕ *une fonction bijective*

$$\phi : [a', b'] \to [a, b] \;\; et \;\; \gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$$

alors

$$\int_{(\gamma o \phi)^*} f(z)dz = \int_{a'}^{b'} f(\gamma o \phi(t))(\gamma o \phi)'(t)dt = \int_{\gamma^*} f(z)dz.$$

d- Concaténation de deux chemins : $\delta : [c, d] \to \mathbb{C}$ *et* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *; en posant*

$$\delta + \gamma : \begin{cases} [a, b] \to \gamma(t) \\ [b, b + d - c] \to \delta(t + c - b) \end{cases}$$

alors on a

$$\int_{\gamma+\delta} = \int_{\gamma} + \int_{\delta}.$$

e- Chemin opposé : soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *; en posant* $-\gamma : t \in [-b, -a] \to \gamma(-t)$ *alors*

$$\int_{-\gamma} = -\int_{\gamma}.$$

Lemme 1.3.4 *Soit* $f \in C^0(\Omega)$ *et* $f = F'$ *avec* $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ *alors*

$$\int_{\gamma^*} f(z)dz = F'(\gamma(b)) - F'(\gamma(a)).$$

Définition 1.3.5 *Soit* $\gamma : [a, b] \to \gamma^* \subset \mathbb{C}$ *un chemin fermé, on définit l'***indice de ce chemin** *par*

$$z_0 \notin \gamma^*, \quad Ind_{\gamma}(z_0) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma^*} \frac{1}{z - z_0} dz. \tag{1.3.5}$$

Théorème 1.3.6 *Soit* γ *un chemin fermé dans* $\mathbb{C}$ *alors* $Ind_{\gamma}(z_0) \in \mathbb{N}$*, l'indice est constant dans chaque composante connexe de* $\mathbb{C}/\gamma^*$ *et nul dans la composante connexe non borné.*

Preuve
Etape 1- Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ et γ un chemin continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ alors la fonction

$$F(z) := \int_a^b \frac{f(t)}{\gamma(t) - z} dt,$$

est une fonction Holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C}/\gamma^*$, Développable en Série Entière (DSE) sur $\mathbb{C}/\gamma^*$ et $F^{(k)}(z) = k! \int_a^b \frac{f(t)}{(\gamma(t)-z)^{k+1}} dt$ sur $\mathbb{C}/\gamma^*$.

En effet, puisque γ^* est compact, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}/\gamma^*$, la distance de z_0 à γ^* vérifie : $d(z_0, \gamma^*) = r_0 > 0$. Donc pour tout $r_1 \in]0, r_0[$, tout z dans la boule de centre z_0 et de rayon r_1 et tout $\eta \in \gamma^*$, on a

$$\eta - z = (\eta - z_0) + (z_0 - z),$$

et donc

$$\eta - z = (\eta - z_0)[1 - \frac{z - z_0}{\eta - z_0}],$$

et puisque $\mid \frac{z-z_0}{\eta - z_0} \mid \leq r_1/r_0 < 1$, on a

$$\frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{\eta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\eta-z_0}} = \frac{1}{\eta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z - z_0}{\eta - z_0})^n.$$

Par conséquent, on trouve que

$$F(z) := \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{f(t)}{(\gamma(t) - z_0)^{n+1}} dt,$$

or $\sum_{n=0}^{\infty} \mid (z - z_0)^n \frac{f(t)}{(\gamma(t)-z_0)^{n+1}} \mid \leq \sup_{[a,b]} \mid f \mid /(r_0 - r_1)$ qui est intégrable sur $[a, b]$ donc par convergence dominée :

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_a^b \frac{f(t)}{(\gamma(t) - z_0)^{n+1}} dt,$$

ce qui montre que la fonction est DSE, holomorphe et on identifie $F^{(k)}(z_0)$ dans le DSE.

Pour l'indice, lorsque le chemin est C^1, on prend $f(t) = \gamma'(t)$ et

$$\frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\eta - z} d\eta,$$

est une fonction holomorphe. Lorsque le chemin est C^1_m on itère l'argument sur chacun des morceaux où le chemin est C^1 et on recolle les chemins.

Etape 2- On a $\mid Ind_\gamma(z) \mid \leq \frac{long(\gamma)}{2\pi} \frac{1}{dist(z, \gamma^*)} \to_{|z| \to \infty} 0$.

Etape 3- Soit la fonction

$$\phi(s) = e^{\int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt}, \quad s \in [a, b], \quad \gamma \in C^1,$$

alors on va montrer que $\phi(b) = 1$ (ce qui signifie que $\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt = 2i\pi k$ avec k entier).

En effet, on a

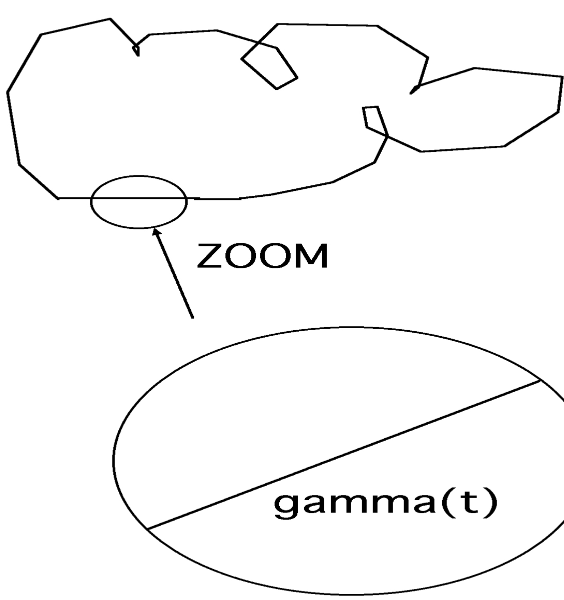
$$\phi'(s) = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\phi(s),$$

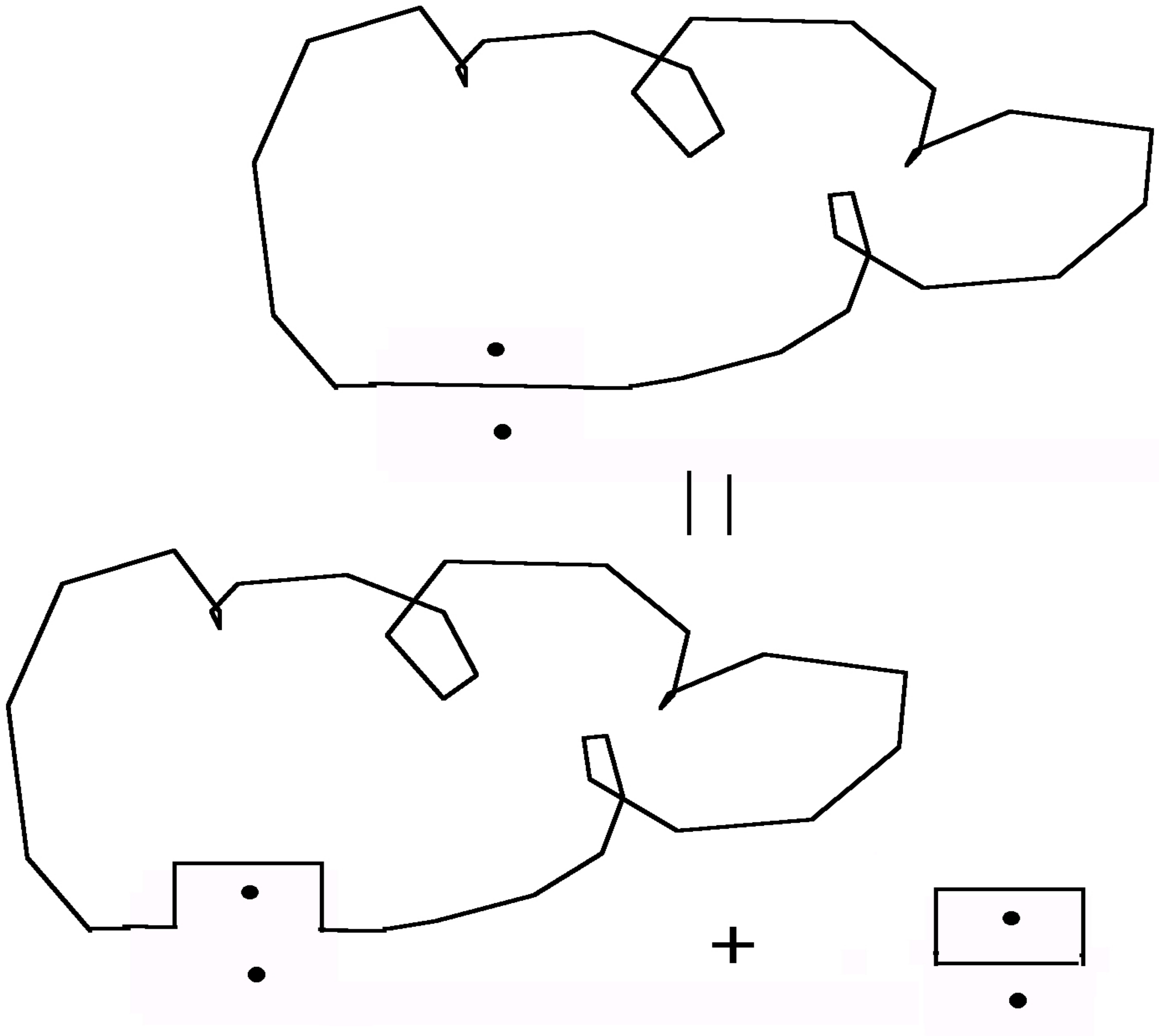
donc $(\frac{\phi(s)}{\gamma(s)-z})' = 0$ et par conséquent $\frac{\phi(a)}{\gamma(a)-z} = \frac{\phi(b)}{\gamma(b)-z}$ avec $\gamma(a) = \gamma(b)$ puisque γ est un chemin fermé. L'indice est une fonction régulière, prenant des valeurs discrètes (entières), il est donc constant sur chaque composante connexe de $\mathbb{C}/\gamma^*$. Sur la composante connexe non bornée : l'indice est un entier et doit tendre vers 0 à l'infini : c'est donc la valeur 0. □

Proposition 1.3.7 *Soit γ un chemin C^1 de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ tel qu'il existe $\alpha \in]a, b[$:*
a- $\gamma'(\alpha) \neq 0$
b- $\gamma^{-1}(\gamma(\alpha)) = \{\alpha\}$
alors pour ϵ assez petit

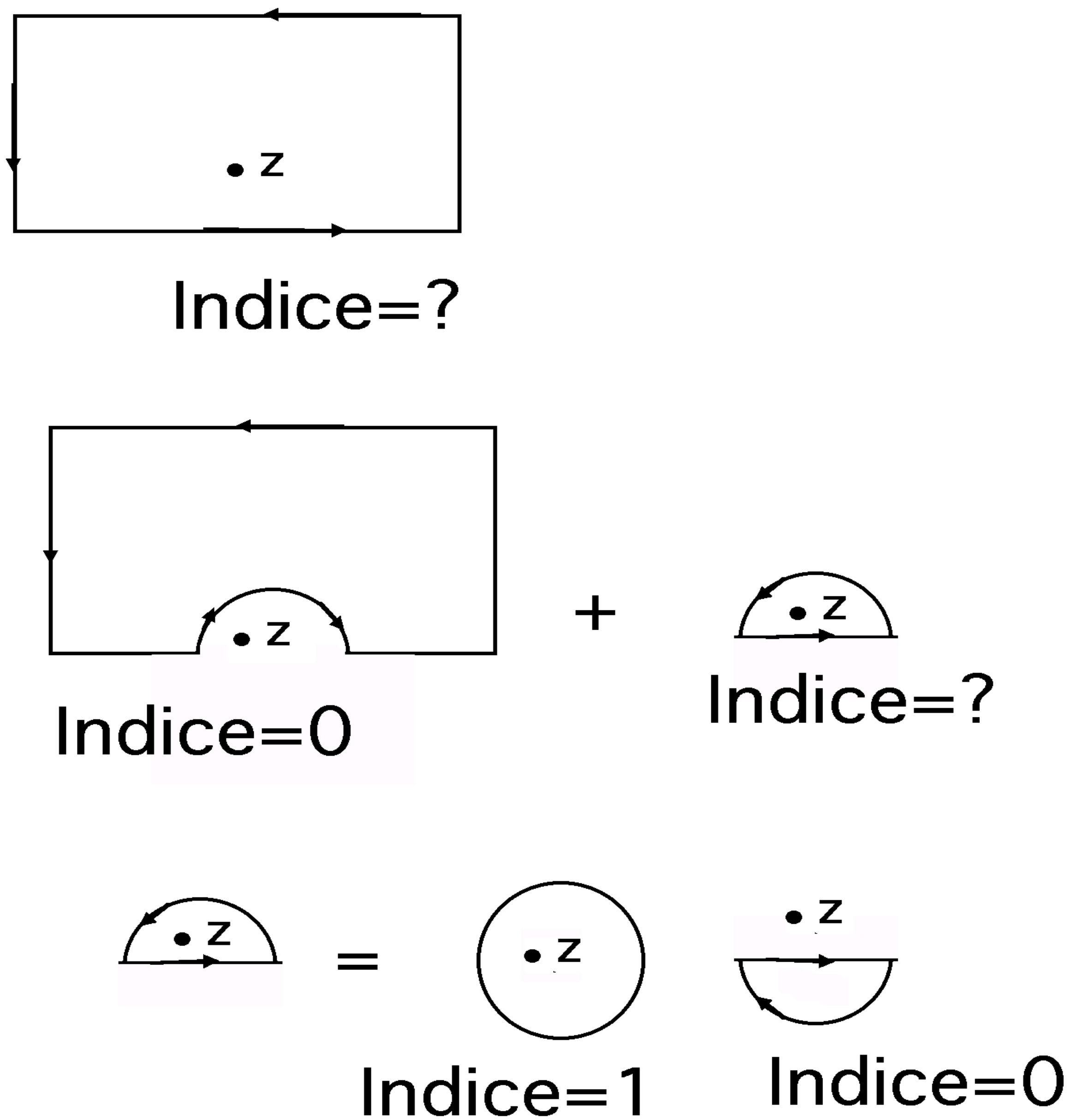
$$Ind_\gamma(\gamma(\alpha) + i\epsilon\gamma'(\alpha)) = 1 + Ind_\gamma(\gamma(\alpha) - i\epsilon\gamma'(\alpha)).$$

Preuve Puisque γ est localement bijective (C^1 difféomorphisme local) au voisinage de α, il existe une boule centrée en α telle que $\gamma(t) \sim \gamma(\alpha) + t\gamma'(\alpha)$ pour t dans ce voisinage de α (presque une droite) et $\gamma(\alpha) + i\epsilon\gamma'(\alpha)$, $\gamma(\alpha) - i\epsilon\gamma'(\alpha)$ se situe de part et d'autre de cette droite. Il suffit alors de "jouer" avec les chemins. On sait facilement calculer l'indice pour un point intérieur à un cercle (qui vaut 1, (ou -1) suivant le sens de parcourt du cercle).





meme indice
pour les deux
points

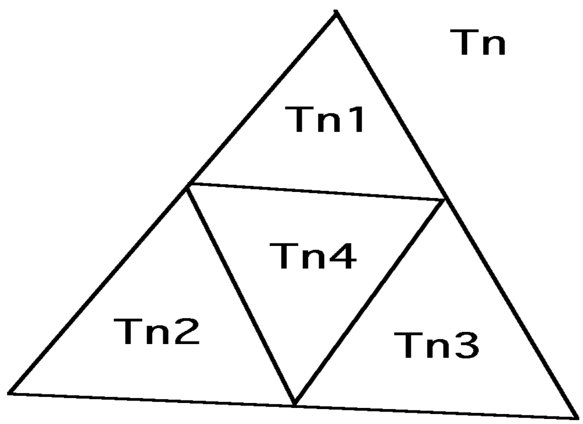

z
Indice=?
z
Indice=0
+
z
Indice=?
z
=
z
Indice=1
z
Indice=0

1.4 Formule de Cauchy locale et applications

Proposition 1.4.1 *Soit une fonction f holomorphe sur Ω ouvert de $\mathbb{C}$ alors pour tout triangle $T \subset \Omega$:*

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

Preuve On pose T_0 le triangle $T_0 = T$, en prenant les milieux des arêtes de T_0, on peut créer quatre triangles T_01, T_02, T_03 et T_04 (voir image ci dessous)



En supposant que $\int_{\partial T} f(z)dz = \alpha \neq 0$, alors

$$\int_{\partial T} f(z)dz = \int_{\partial T_0} f(z)dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial T_0 i} f(z)dz,$$

et donc il existe $i \in \{1,2,3,4\}$ tel que $\mid \int_{\partial T_0 i} f(z)dz \mid \geq \alpha/4$, on pose T_1 le triangle $T_0 i$. En itérant le processus, on peut trouver une suite T_n de triangle vérifiant :

$$long(T_n) \leq long(T_{n-1})/2, \quad diametre(T_n) \leq diametre(T_{n-1})/2,$$

et

$$\mid \int_{\partial T_n} f(z)dz \mid \geq \mid \int_{\partial T_{n-1}} f(z)dz \mid /4 \geq \alpha/4^n.$$

Or la suite de triangles T_n est décroissante, $T_n \subset T_{n-1} ... \subset T_0$, et de diamètre qui tend vers 0 donc il existe $z_0 \in T_0$ tel que $\{z_0\} = \bigcap_n T_n \subset \Omega$ et

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)\epsilon(z - z_0),$$

avec $\epsilon(\eta) \to_{\eta \to 0} 0$, par conséquent :

$$\int_{\partial T_n} f(z)dz = f(z_0)\int_{\partial T_n} 1dz + f'(z_0)\int_{\partial T_n}(z-z_0)dz + \int_{\partial T_n}(z-z_0)\epsilon(z-z_0)dz,$$

et puisque 1 (resp. $z - z_0$) est continue et admet une primitive holomorphe : on trouve que (voir lemme 1.3.4)

$$\int_{\partial T_n} 1dz = \int_{\partial T_n}(z-z_0)dz = 0.$$

Par conséquent, on a

$$\mid \int_{\partial T_n} f(z)dz = \int_{\partial T_n}(z-z_0)\epsilon(z-z_0)dz \mid \leq long(T_n)diam(T_n) \mid \epsilon(diam(T_n)) \mid \leq Const\frac{1}{2^n}\frac{1}{2^n}o(\frac{1}{2^n}),$$

et pour n assez grand,

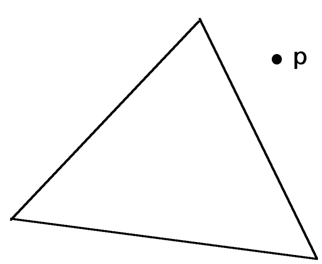
$$\mid \int_{\partial T_n} f(z)dz \mid < \frac{1}{2}(\alpha/4^n),$$

ce qui est contradictoire avec le choix de T_n ($\mid \int_{\partial T_n} f(z)dz \mid \geq \alpha/4^n$). On a montré par l'absurde que $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$. □

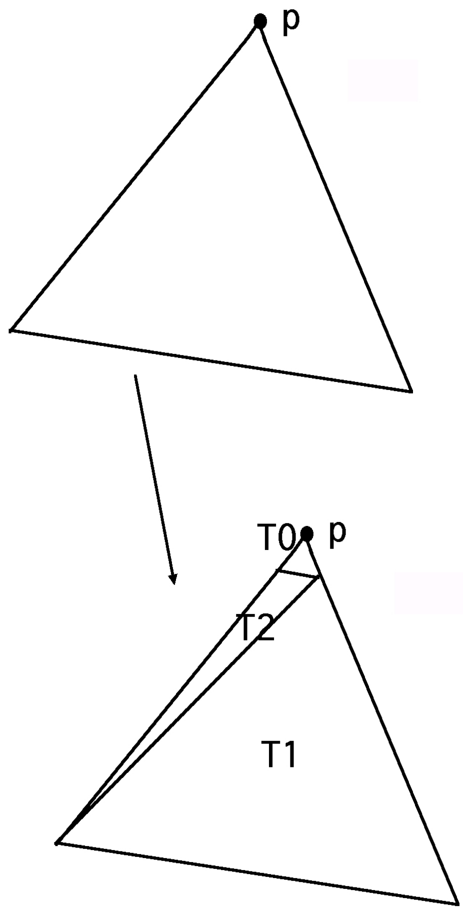
Proposition 1.4.2 *Soit $p \in \Omega$ et une fonction f holomorphe sur $\Omega - \{p\}$ et continue sur Ω ouvert de $\mathbb{C}$ alors pour tout triangle $T \subset \Omega$:*

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

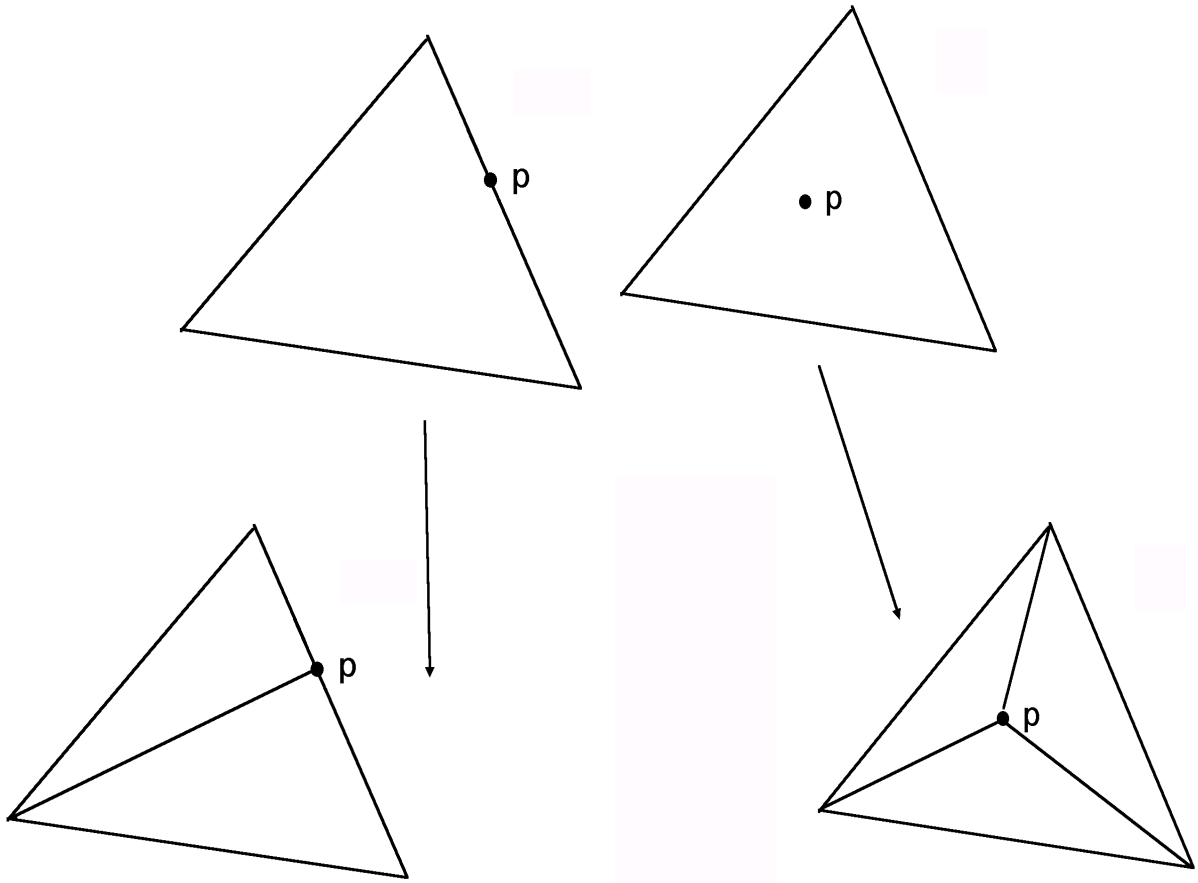
Preuve Dans le premier cas, lorsque le point p est à l'extérieur du triangle, tout se passe comme dans le théorème précedent



Lorsque p est un sommet du triangle T, on peut choisir un triangle T_0 aussi petit que l'on veut dont un des sommet est p et T_1, T_2 tels que $\int_{\partial T} f(z)dz = \int_{\partial T_0} f(z)dz + \int_{\partial T_1} f(z)dz + \int_{\partial T_2} f(z)dz$



par le cas précédent $\int_{\partial T_1} f(z)dz = \int_{\partial T_2} f(z)dz = 0$ et puisque T_0 peut être choisi aussi petit qu'on le souhaite et que f est continue sur Ω : $\int_{\partial T_0} f(z)dz \sim f(p)long(T_0) \to_{long(T_0)\to 0} 0$ donc nécessairement $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$. Pour les autres cas, on découpe le triangle T pour se ramener au cas où p est un sommet de triangle :



□

Définition 1.4.3 *Un ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ est* **étoilé** *par rapport à $z_0 \in \Omega$ si et seulement si $\forall z \in \Omega$ $[z_0, z] \in \Omega$.*

Proposition 1.4.4 *Si Ω est étoilé par rapport à $a \in \Omega$ et f une fonction continue de Ω dans $\mathbb{C}$ alors*

$$\forall T \quad \textit{triangle de } \Omega \ : \ \int_{\partial T} f(z)dz = 0 \Rightarrow f \ \textit{ admet une primitive holomorphe},$$

c'est à dire $\exists F \in \mathcal{H}(\Omega)$: $F' = f$.

Preuve On pose $F(z) = \int_{[a,z]} f(u)du$ alors, pour tout $z \neq z_0$:

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{\int_{[a,z]} f(u)du - \int_{[a,z_0]} f(u)du}{z - z_0}.$$

Or si a, z, z_0 forme les sommets d'un triangle T, on a

$$0 = \int_{\partial T} f(z)dz = \int_{[a,z]} f(u)du + \int_{[z,z_0]} f(u)du + \int_{[z_0,a]} f(u)du,$$

donc

$$\int_{[a,z]} f(u)du - \int_{[a,z_0]} f(u)du = \int_{[z_0,z]} f(u)du,$$

et par continuité de f :

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \frac{\int_{[z_0,z]} f(u)du}{z-z_0} = \int_0^1 f(z_0+t(z-z_0))dt \rightarrow_{z\to z_0} f(z_0).$$

Si a, z, z_0 sont alignés : l'égalité $\int_{[a,z]} f(u)du - \int_{[a,z_0]} f(u)du = \int_{[z_0,z]} f(u)du$ est triviale et on a encore $\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \frac{\int_{[z_0,z]} f(u)du}{z-z_0}$. La fonction F est dérivable en tout point $z_0 \in \Omega$, elle est donc holomorphe sur Ω. □

Corollaire 1.4.5
a- Soit $p \in \Omega$ étoilé par rapport à p, $f \in C^0(\Omega) \bigcap \mathcal{H}(\Omega/\{p\})$ alors pour tout chemin fermé γ de Ω on a $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

b- Soit $p \in \Omega$ étoilé par rapport à p, et $z \notin \Omega$, alors pour tout chemin fermé γ de Ω on a $Ind_\gamma(z) = 0$.

Preuve En utilisant la proposition 1.4.2, 1.4.4 et le lemme 1.3.4, on a directement a-. Pour b-, on note que z est dans la composante connexe non bornée de Ω/γ^*. □

Théorème 1.4.6 *(Théorème de Cauchy Local)*
Soit Ω un ouvert étoilé, γ un chemin fermé de Ω et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ alors

$$\forall z \notin \gamma^*, \quad Ind_\gamma(z)f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta, \quad (\textit{Formule de Cauchy}). \tag{1.4.6}$$

Preuve Soit $z \in \Omega$ fixé, alors la fonction $g(\eta) := \frac{f(\eta)-f(z)}{\eta-z}$ est continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega/\{z\}$ avec $g(z) = f'(z)$ donc par le corollaire 1.4.5 b-, on a $\int_\gamma \frac{f(\eta)-f(z)}{\eta-z}d\eta = 0$ ce qui prouve (1.4.6). □

1.5 Applications :

I) Une fonction Holomorphe est Développable en Série Entière.

Proposition 1.5.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $C(a,R)$ un cercle de centre a et de rayon R inclue dans Ω et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ alors*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,R)} \frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta = \frac{1}{2\pi}\sum_n (z-a)^n \int_0^{2\pi} \frac{f(a+Re^{i\theta})}{(Re^{i\theta})^n}d\theta, \quad z \in B(a,R),$$

avec $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+Re^{i\theta})}{(Re^{i\theta})^n}d\theta$. Le rayon de convergence de cette série est supérieur ou égal à $R_{max} = \max\{R \ : \ C(a,R) \subset \Omega\}$.

Preuve Il suffit d'utiliser la formule de Cauchy Locale et l'étape 1- de la démonstration du théorème 1.3.6. □

Corollaire 1.5.2 *La dérivée d'une fonction Holomorphe est Holomorphe.*

Preuve Une fonction Holomorphe est DSE, donc sa dérivée est DSE et donc Holomorphe. □

II) La propriété $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$ sur tout triangle est caractéristique de l'holomorphie.

Théorème 1.5.3 *Soit $f \in C^0(\Omega)$ alors*

$$f \in \mathcal{H}(\Omega) \Leftrightarrow \forall T \ \ triangle \ \ de \ \ \Omega \ \ : \ \ \int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

Preuve $\Leftarrow$: proposition 1.4.4 et corollaire 1.5.2. $\Rightarrow$: proposition 1.4.2. □

Corollaire 1.5.4 *On déduit du résultat précédent que*

1- Si $f \in C^0(\Omega)\bigcap \mathcal{H}(\Omega/\{p\})$ alors $f \in H(\Omega)$.

2- Si $f \in C^0(\Omega)\bigcap \mathcal{H}(\Omega/\{droite\})$ alors $f \in H(\Omega)$.

3- Si $f \in C^0(\Omega)$ alors

$$f \ \ admet\ une\ primitive\ Holomorphe \ \Leftrightarrow \forall \gamma \in C^1_m \bigcap C^0 \ \ ferme \subset \Omega \ \ : \ \ \int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Preuve Le point 1- est direct, le point 2- demande d'adapter la preuve de la proposition 1.4.1. Le point 3-$\Leftarrow$ est déjà vu (lemme 1.3.4). Il ne reste que le point 3-$\Rightarrow$. On se place dans une composante connexe (par arc) de Ω, alors pour a, z dans cette composante, il existe un chemin γ de a vers z à valeur dans cette composante connexe, on pose :

$$F(z) = \int_{\gamma[a,z]} f(\eta) d\eta.$$

On note que la définition est indépendante du chemin γ car pour γ_1 un autre chemin dans cette composante connexe reliant a à z

$$\int_{\gamma[a,z]-\gamma_1[a,z]} f(\eta) d\eta = \int_{\text{chemin ferme de a à a}} f(\eta) d\eta = 0,$$

donc $F(z) = \int_{\gamma_1[a,z]} f(\eta) d\eta$. Pour z_0 proche de z, l'intervalle $[z_0, z]$ est dans la composante connexe et $F(z) = F(z_0) + \int_{[z_0,z]} f(\eta) d\eta$ donc $F'(z) = f(z)$. □

III) Inégalité de Cauchy

Proposition 1.5.5 *Soit Ω ouvert, la boule fermé $\bar{B}(z_0, r) \subset \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ alors*

$$\mid f^{(k)}(z_0) \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{z \in \bar{B}(z_0,r)} \mid f(z) \mid .$$

Preuve En effet, par le théorème de Cauchy Local : $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+Re^{i\theta})}{(Re^{i\theta})^n} d\theta$. □

Théorème 1.5.6 *(Théorème de Liouville)*
Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ et borné alors f est constante.

Preuve En utilisant la proposition précédente, on a $\mid f'(z_0) \mid \leq \frac{1}{r} \sup_{z \in \bar{B}(z_0,r)} \mid f(z) \mid \leq C/r$ avec C indépendante de r (car f est borné sur $\mathbb{C}$). Par conséquent, puisque cette relation est vraie pour tout r (f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier), on peut faire tendre r vers l'infini et $\mid f'(z_0) \leq= 0$ pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$. Donc f est constante sur $\mathbb{C}$. □

Théorème 1.5.7 *(Théorème d'Alembert Gauss)*
Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ non constante alors f admet (au moins) une racine dans $\mathbb{C}$.

Preuve Puisque $a_N \neq 0$, on sait que pour R assez grand

$$| f(z) | \geq | a_N || z |^N - \sum_{n=0}^{N-1} | a_n || z |^n \geq 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}/\bar{B}(0,R),$$

donc

$$| 1/f(z) | \leq 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}/\bar{B}(0,R).$$

En supposant que f n'admette pas de racine dans $\mathbb{C}$, on aurait $| \frac{1}{f(z)} |$ continue sur $\mathbb{C}$ et donc bornée sur le compact $\bar{B}(0,R)$ par un réel $M > 0$. Donc finalement, $1/f$ est une fonction holomorphe et borné sur $\mathbb{C}$ (par $\max(1,M)$) donc par le théorème de Liouville elle est constante or f est non constante : l'hypothèse "f n'admet pas de racine dans $\mathbb{C}$" est absurde. $\square$

Théorème 1.5.8 *Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que $| f(z) | \leq C | z |^n$ (n et C sont fixés) alors f est un polynôme de degré au plus n.*

Preuve En utilisant la proposition 1.5.5, on a $| f^{n+1}(z_0) | \leq \frac{1}{r^{n+1}} \sup_{z \in \bar{B}(z_0,r)} | f(z) | \leq C/r$. Par conséquent, puisque cette relation est vraie pour tout r (f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier), on peut faire tendre r vers l'infini et $| f^{n+1}(z_0) \leq = 0$ pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$. Donc f est un polynôme de degré au plus n sur $\mathbb{C}$. $\square$

IV) Logarithme,

Proposition 1.5.9 *Soit Ω ouvert étoilé, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ qui ne s'annule pas sur Ω alors il existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$: $f = e^g$ sur Ω.*

Preuve On a $h = f'/f$ holomrophe sur Ω donc admet une primitive holomorphe H, donc

$$(e^H/f)' = h/f - f'/f^2 = 0,$$

donc $e^H = Cste\ f$ et $g = H - Log(Cste)$ vérifie $e^g = f$. On note que si g_1 et g_2 sont deux solutions de $e^g = f$ holomorphe alors $g_1 = g_2 + 2ik\pi$.

En conséquence il est possible de définir une racine carré d'une fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur Ω, il suffit de prendre $\sqrt{f} = g/2$.

Chapitre 2

Zéros d'une fonction Holomorphe

Théorème 2.0.10 *Soit Ω un ouvert connexe et $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

a- f est nulle sur Ω

b- $\exists z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ telle que f est nulle sur $B(z_0, r)$

c- $\exists z_0 \in \Omega$, tel que $\forall k \in \mathbb{N}$ $f^{(k)}(z_0) = 0$.

Preuve
$b \Leftarrow c$ on utilise le développement en série entière (DSE)

$b \Leftarrow a$ Soit $N = \{z \in \Omega \ : \ \exists r > 0 \ \ t.q. \ \ B(z, r) \subset \Omega \ \ et \ \ f = 0 \ \ sur \ \ B(z, r)\}$, alors N est non vide (il contient z_0), il est ouvert (comme union d'ouvert) et fermé car

$$z_n \in N \quad z_n \to_{n\to\infty} z \Rightarrow f^{(k)}(z_n) = 0 \to_{n\to\infty} f^{(k)}(z) \Rightarrow f^{(k)}(z) = 0,$$

par continuité de $f^{(k)}$ et par c (on sait que $b \Leftarrow c$). Par conséquent, par DSE au voisinage de z, on a f nulle au voisinage de z et donc $z \in N$. Par connexité de Ω, $N = \Omega$ (ouvert fermé non vide dans un ensemble connexe). □

Corollaire 2.0.11
1- Si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ avec Ω ouvert connexe, alors $f = g$ dans un voisinage de $z_0 \in \Omega$ implique $f = g$ partout sur Ω.
2- $\mathcal{H}(\Omega)$ est un anneau intègre.

Proposition 2.0.12 *Soit Ω un ouvert et $A \subset \Omega$ un fermé de Ω alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1- A n'a pas de points d'accumulation

2- tout point de A est isolé

3- pour tout compact K de Ω $K \bigcap A$ est un ensemble fini

Preuve
On rappelle que a est un point d'accumulation de A si $\forall r > 0$ $B(a,r) \bigcap A/\{a\} \neq \emptyset$. On rappelle que a est un point isolé de A si $\exists r > 0$ $B(a,r) \bigcap A/\{a\} = \emptyset$. Donc $1 \Leftrightarrow 2$.

$2 \Rightarrow 3$. Par 2 pour tout $a \in K \bigcap A$ il existe $r_a > 0$ tel que $B(a, r_a) > \bigcap A = \{a\}$ donc

$$K \bigcap A \subset \bigcup_{a \in K \bigcap A} B(a, r_a),$$

or $K \bigcap A$ est un compact de Ω donc par le théorème de Borel Lebesgue on peut extraire une suite finie de boules telle que

$$K \bigcap A \subset \bigcup_{finie} B(a_i, r_{a_i}),$$

et $K \bigcap A \subset \bigcup_{finie} B(a_i, r_{a_i}) \bigcap K = \bigcup_{finie} \{a_i\}$.

$3 \Rightarrow 1$. Par l'absurde, on prend z_n une suite convergente telle que

$$z_n \in B(a, \mid a - z_{n-1} \mid /2)/\{a\}, \;\; et \;\; z_0 \in B(a,r)/\{a\}, \quad r > 0 \;\; : \;\; B(a,r) \subset \Omega,$$

alors pour tout $i \neq j$ $z_i \neq z_j$ (par construction) et $z_n \rightarrow_{n\rightarrow\infty} a$ donc pour tout $r_a > 0$ il existe $N_a > 0$ tel que pour tout $n \geq N_a$ $z_n \in \bar{B}(a, r_a)$ et $\bar{B}(a, r_a) \bigcap A$ n'est pas un ensemble fini (il contient la suite z_n). $\square$

Corollaire 2.0.13 *1- Si $\Omega = \mathbb{C}$ et A un fermé formé de points isolés alors soit A est fini, soit c'est une suite $\{a_n\}_n$ vérifiant $\mid a_n \mid \rightarrow_{n\rightarrow\infty} \infty$.*

2- Si $\Omega = B(0,1)$ et A un fermé formé de points isolés alors soit A est fini, soit c'est une suite $\{a_n\}_n$ vérifiant $\mid a_n \mid \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 1$.

Théorème 2.0.14 *Soit Ω un ouvert connexe et f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ non identiquement nulle ALORS $A = f^{-1}(\{0\})$ est un fermé de Ω formé de points isolés.*

Preuve Soit $z_0 \in A = f^{-1}(\{0\})$ alors par DSE

$$f(z) = \sum_k f^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k/k! \quad z \in \bar{B}(z_0, r),$$

or f est non nulle donc il existe $k_0 = \min\{k \ : \ f^{(k)}(z_0) \neq 0\} < \infty$ et $f(z) = f^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k g(z)$ avec $g \in \mathcal{H}(B(z_0, r))$ et $g(z_0) = 1$. Donc par continuité de g : g est non nulle dans un voisinage de z_0 : $B(z_0, r_0)$ $r_0 > 0$ et f est non nulle dans $B(z_0, r_0)/\{z_0\}$. Par conséquent z_0 est un point isolé. □

Théorème 2.0.15 *(principe de symétrie de Schwarz) Soit Ω un ouvert connexe et symétrique par rapport à l'axe des réels, $\Omega^+ = \{z \in \Omega \ : \ Im(z) > 0\}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega^+) \bigcap C^0(\bar{\Omega}^+)$ avec $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ alors il existe un unique prolongement $\tilde{f}$ holomorphe de f sur Ω :*

$$\tilde{f}(z) = f(z) \quad Im(z) \geq 0 \ \ z \in \Omega, \quad \tilde{f}(z) = \overline{f(\bar{z})} \quad Im(z) < 0 \ \ z \in \Omega.$$

Preuve Il suffit de prouver l'unicité, si f_1 et f_2 sont deux solutions alors $f_1 - f_2$ est holomorphe sur Ω et nulle sur Ω^+ donc elle est nulle sur tout Ω. □

Chapitre 3

Principe du maximum

Définition 3.0.16 *On dit que f a "la propriété de la moyenne" si pour toute $\bar{B}(a, r_0) \subset \Omega$ on a*

$$\forall r \in]0, r_0[, \quad f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{it}) dt. \tag{3.0.1}$$

Remarque 2 Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ alors par le théorème de Cauchy local f vérifie (3.0.1) et $Re(f)$ aussi.

Proposition 3.0.17 *(Principe du maximum local) Soit $f \in C^0(\Omega)$ telle que :*
a- f vérifie (3.0.1)
b- $\mid f \mid$ admet un maximum local en $z_0 \in \Omega$
ALORS f est localement constante en z_0.

Preuve
Par $b-$ pour $r_1 > 0$ assez petit $\mid f(z) \mid \leq \mid f(z_0) \mid$ pour tout $z \in B(z_0, r_1)$.
Par $a-$ pour $r_2 > 0$ assez petit $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + r_2 e^{it}) dt$ donc pour tout $0 < r < \min(r_1, r_2)$ on a les deux propriétés et

$$\mid f(z_0) \mid \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mid f(z_0 + re^{it}) \mid dt \leq \mid f(z_0) \mid,$$

donc

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\mid f(z_0) \mid - \mid f(z_0 + re^{it}) \mid \right] dt, \quad \mid f(z_0) \mid - \mid f(z_0 + r_2 e^{it}) \mid \geq 0.$$

Si $f(z_0) = 0$, on a directement que $f(z_0 + re^{it}) = 0$ pour tout $t, r \geq 0$. Pour conclure lorsque $f(z_0) \neq 0$, on pose $g(z) = f(z) e^{-i\theta}$ avec θ tel que $f(z_0) = e^{i\theta} \mid f(z_0) \mid$, alors g vérifie $a-$ et $b-$ de la proposition et

$$g(z_0) = Re(g(z_0)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Re(g(z_0 + r_2 e^{it})) dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mid g(z_0 + r_2 e^{it}) \mid dt \leq g(z_0),$$

donc
$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[Re(g(z_0+r_2e^{it}))- \mid g(z_0+r_2e^{it}) \mid\right]dt = 0.$$
Or $Re(g(z_0{+}r_2e^{it}))- \mid g(z_0{+}r_2e^{it}) \mid\leq 0$ et continue en t donc $Re(g(z_0{+}r_2e^{it})) =\mid g(z_0{+}r_2e^{it}) \mid$, et par conséquent : $Im(g(z_0{+}r_2e^{it})) = 0$ pour tout $t, r \geq 0$, $Re(g(z_0{+}r_2e^{it})) \geq 0$ et donc
$$\int_{-\pi}^{\pi}[g(z_0) - g(z_0 + r_2e^{it})]dt \geq 0, \quad g(z_0) \geq g(z_0 + r_2e^{it}).$$
Finalement on a $g(z_0) = g(z_0 + r_2e^{it})$ pour tout r, t positifs donc f est localement constante. □

Théorème 3.0.18 *(Principe du maximum) Soit Ω ouvert borné et f une fonction continue sur $\bar{\Omega}$ compact et vérifiant (3.0.1) ALORS*
1- $\forall z \in \Omega \mid f(z) \mid\leq \sup_{u\in\bar{\Omega}/\Omega=\partial\Omega} \mid f(u) \mid$
2- si Ω est connexe et f non constante alors celle inégalité est stricte.

Preuve
1. Puisque $\mid f \mid$ est continue sur $\bar{\Omega}$ compact il existe $z_0 \in \bar{\Omega}$ tel que
$$\mid f(z) \mid\leq\mid f(z_0) \mid,$$
si $z_0 \in \partial\Omega$ c'est terminé, sinon $z_0 \in \Omega$ et l'on note Ω_0 la composante connexe de Ω contenant z_0.
Soit $A = \{z \in \Omega_0 \ : \ f(z) = f(z_0)\}$, on a directement que A est non vide ($z_0 \in A$), fermé (image réciproque d'un fermé par une application continue) et ouvert par le principe du maximum local donc $A = \Omega_0$ et par continuité de f on a $A = \bar{\Omega}_0$. On veut montrer que $\bar{\Omega}_0 \bigcap \partial\Omega$ est non vide, pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose que $\bar{\Omega}_0 \bigcap \partial\Omega = \emptyset$ alors puisque $\bar{\Omega}_0 \subset \bar{\Omega}$, on a $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$ or $\bar{\Omega}_0$ est connexe et contient une composante connexe donc c'est une composante connexe et $\bar{\Omega}_0 = \Omega_0$. Ainsi, Ω_0 est un ouvert fermé non vide de $\mathbb{C}$ (qui est connexe) donc $\Omega_0 = \mathbb{C}$ ce qui est impossible car $\bar{\Omega}$ est borné (car compact).

2. En supposant l'inégalité non-stricte, il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $\mid f(z_0) \mid= \max_{\bar{\Omega}} \mid f(z) \mid$, par le raisonnement précédent $\Omega_0 = \Omega$ et f est constante sur Ω ($f(z) = f(z_0)$ pour tout $z \in \Omega$). □

Remarque 3 Soit Ω un ouvert, connexe et borné alors toute fonction f continue sur $\bar{\Omega}$ et holomorphe sur Ω telle que $\mid f \mid$, sur $\bar{\Omega}$, atteint son maximum en un point de Ω alors f est nécessairement constante.

Remarque 4 Soit f continue sur $\bar{B}(0,R)$ et holomorphe sur $B(0,R)$ alors

$$M(r) = \max_{\bar{B}(0,R)} \mid f \mid = \max_{|z|=R} \mid f(z) \mid,$$

est croissante en r et strictement croissante lorsque f n'est pas constante.

Proposition 3.0.19 *(Lemme de Schwarz) Soit $f : D \to D$ holomorphe sur $D = B(0,1)$ telle que $f(0) = 0$ alors*
1- soit on a $\mid f(z) \mid < \mid z \mid$ pour tout $z \in D/\{0\}$ et $\mid f'(0) \mid < 1$
2- ou bien il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = ze^{i\theta}$.

Preuve La fonction $g(z) = f(z)/z$ est holomorphe sur D et $g(0) = f'(0)$ donc pour tout $r \in]0,1[$, g est continue sur $\bar{B}(0,r)$ et holomorphe sur $B(0,r)$ donc par le principe du maximum

$$\mid g(z) \mid \leq \max_{|u|=r} \mid g(u) \mid = \max_{|u|=r} \mid f(u) \mid /r \leq 1/r, \quad car \;\; f(D) \subset D,$$

et en faisant tendre r vers 1 on trouve que $\mid g(z) \mid \leq 1$.

Si il existe $z_1 \in D$ tel que $\mid g(z_1) \mid = 1$ alors g est constante (de la forme $e^{i\theta}$) sur tout disque de centre 0 et de rayon $r \in] \mid z_1 \mid, 1[$ et par connexité sur D tout entier (donc $f(z) = ze^{i\theta}$).

Si $\mid f'(0) \mid = 1$ alors $\mid g(0) \mid = 1$ et l'argument précédent marche. $\square$

Par conséquent, dans $D = B(0,1)$, l'ensemble

$$\Gamma(D) = \{ f \text{ bijective et biholomorphe sur } D \},$$

est un groupe.

- Le sous groupe des fonctions de $\Gamma(D)$ telle que $f(0) = 0$ est constitué des rotation (i.e. $f(z) = ze^{i\theta}$). En effet, puisque $f : D \to D$ holomorphe et $f(0) = 0$, on a $\mid f(z) \mid \leq \mid z \mid$ et de même pour f^{-1} donc $\mid f(z) \mid = \mid z \mid$.

- Soit $\alpha \in D$, alors $\phi_\alpha : z \to \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ est une bijection de D sur D (qui envoie ∂D dans ∂D) et d'inverse $\phi_\alpha^{-1} = \phi_{-\alpha}$. De plus on a $\phi_\alpha(\alpha) = 0$, $\phi'_\alpha(0) = 1- \mid \alpha \mid^2$ et $\phi'_\alpha(\alpha) = 1/(1- \mid \alpha \mid^2)$. On a directement que $\phi_\alpha \in \mathcal{H}(D) \bigcap C^0(\bar{D})$.

- Soit $f \in \Gamma(D)$ telle que $f(0) = \alpha$ alors on peut montrer qu'il existe θ tel que $f(z) = \phi_{-\alpha}(e^{i\theta})$ (il suffit de remarquer que $g = \phi_\alpha o f \in \Gamma(D)$ et $g(0) = 0$).

Chapitre 4

Intégrales dépendant d'un paramètre holomorphe

Théorème 4.0.20 *Soit* (X, T, μ) *un espace mesuré,* $\Omega \subset C$ *et* $f : X \times \Omega \to \mathbb{C}$ *une fonction vérifiant les hypothèses :*
1- $\forall z \in \Omega \ x \to f(x, z)$ *mesurable*
2- $\forall x \in X \ z \to f(x, z) \in \mathcal{H}(\Omega)$
3- $\forall K \subset \Omega$ *compact,* $\forall (x, z) \in X \times K \mid f(x, z) \mid \leq G_K(x)$ *intégrable (domination)*
ALORS
a- $F : z \to \int_X f(x, z) d\mu(x)$ *est holomorphe sur* Ω
b- $\forall z_0 \in \Omega \ \forall n \in \mathbb{N} \ F^{(n)}(z_0) = \int_X \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(x, z_0) d\mu(x)$
c- soit K *un compact de* Ω *et* $K_r = \{z \in \Omega \ : \ d(K, z) \leq r\}$ *alors*
$\forall z \in K \mid F^{(n)}(z) \mid \leq n! r^{-n} \int_X G_{K_r}(x) d\mu(x)$

Preuve
Etape 1 - L'inégalité de Cauchy nous dit que si $B(z_0, r) \subset \Omega$ alors $\mid f^n(x, z) \mid \leq n! r^{-n} \sup_{|z - z_0| = r} \mid f(x, z_0) \mid$. Puisque K est compact, on peut la recouvrir par un nombre fini de boule de rayon r qui sont inclues dans Ω pour r assez petit ($r < dist(K, \mathbb{C}/\Omega)$). Finalement, on a

$$\forall x \in X \ \ \forall z \in K \quad \mid f^n(x, z) \mid \leq n! r^{-n} \sup_{z_0 \in K_r} \mid f(x, z_0) \mid \leq n! r^{-n} G_{K_r}(x),$$

et $x \to f^{(n)}(x, z)$ est mesurable comme limite de fonctions mesurable.

Etape 2 - Puisque f est holomorphe en z elle est DSE au voisinage de tout $z_0 \in K$ donc pour tout $z \in B(z_0, r/2)$ (r choisi à l'étape 1-) $f(x, z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f^{(n)}(x, z_0)(z - z_0)^n / n!$ or

$$\mid f^{(n)}(x, z_0)(z - z_0)^n / n! \mid \leq r^{-n} G_{K_r}(x) \mid \frac{r}{2} \mid^n \leq G_{K_r}(x) \frac{1}{2^n},$$

donc la série converge normalement sur $B(z_0, r/2)$ et on peut intervertir $\int \sum = \sum \int$.

Etape 3 - On trouve que

$$\int_X f(x,f)d\mu(x) = \sum_n \frac{(z-z_0)^n}{n!}\int_X f^{(n)}(x,z_0)d\mu(x).$$

On a donc un DSE dans $B(z_0, r/2)$ de $\int_X f(x,z)d\mu(x)$ qui est donc holomorphe. Il suffit d'identifier dans la série $F^{(n)}(z_0)$ pour avoir le point b- et prendre le $\sup_{z_0}$ pour avoir le point c- (pour tout $z \in K$, on peut trouver $z_0 \in K_r$ tel que $\mid z_0 - z \mid \leq r$ et utiliser l'étape 1-). □

Théorème 4.0.21 *(Equivalent pour les séries) Soit f_n une suite de fonctions*
1- $(f_n)_n \subset \mathcal{H}(\Omega)$
2- $\forall K \subset \Omega$ compact $\sum_n \sup_{z\in K} \mid f_n(z) \mid < \infty$
ALORS
a- $F(z) = \sum_n f_n(z)$ est holomorphe sur Ω
b- $F^{(k)}(z) = \sum_n f_n^{(k)}(z)$.

Chapitre 5

Théorème de Cauchy global

Définition 5.0.22 *Soit* $(\gamma_i)_{i=1..m}$ *une suite de chemins fermés* $C^1_m \bigcap C_0$ *et une suite d'entier* $(n_i)_{i=1..m} \subset \mathbb{Z}$*, on note*

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{m} n_i \gamma_i,$$

le **cycle** *de support* $\Gamma^* = \bigcup_i \gamma_i^*$ *et de longueur* $long(\Gamma) = \sum_{i=1}^{m} \mid n_i \mid long(\gamma_i)$ *tel que pour toute fonction* $f \in C^0$*, on définit*

$$\int_\Gamma f(z)dz := \sum_{i=1}^{m} n_i \int_{\gamma_i} f(z)dz. \tag{5.0.1}$$

Intuitivement, on parcourt le chemin $\gamma_i \mid n_i$ fois dans le sens positif si n_i est positif et négatif sinon et Γ est la concaténation de ces cycles.

On a directement que

$$\mid \int_\Gamma f(z)dz \mid \leq \sup_{\gamma^*} \mid f \mid long(\Gamma), \tag{5.0.2}$$

et

$$\forall a \notin \Gamma^*, \quad Ind_\Gamma(a) = \sum_{i=1}^{m} n_i Ind_{\gamma_i}(a). \tag{5.0.3}$$

Théorème 5.0.23 *En supposant*
1- Γ *un cycle dans* Ω
2- $\forall a \in \mathbb{C}/\Omega$ $Ind_\Gamma(a) = 0$
3- $f \in \mathcal{H}(\Omega)$
ALORS

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0, \tag{5.0.4}$$

$$\forall z \in \Omega/\Gamma^* \quad Ind_\Gamma(z) f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z} dz. \tag{5.0.5}$$

Preuve
Etape 1- On a 1 $\Leftrightarrow$ 2. En effet, si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $z \in \Omega/\Gamma^*$ la fonction

$$g : \eta \to \begin{cases} \frac{f(z)-f(\eta)}{z-\eta}, & \eta \neq z, \\ f'(z), & \eta = z \end{cases}$$

est holomorphe sur Ω (continu + holomorphe sur Ω/z). Donc en supposant (5.0.4) on a $\int_\Gamma g(z)dz = 0$ et donc (5.0.5) est vérifié pour f.

Si maintenant $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, la fonction $g(\eta) = (z-\eta)f(\eta)$ est holomorphe, donc en supposant (5.0.5) on a $g(z) = 0$ et donc $0 = \int_\gamma g(\eta)/(z-\eta)d\eta = \int_\Gamma f(\eta)d\eta$.

Etape 2- On pose

$$g : (z,\eta) \to \begin{cases} \frac{f(z)-f(\eta)}{z-\eta}, & \eta \neq z, \\ f'(z), & \eta = z \end{cases}$$

qui est une fonction holomorphe par rapport à chacune de ses variables sur $\Omega \times \Omega$ donc

$$h : z \to \int_\Gamma g(z,\eta)d\eta,$$

est une somme intégrales dépendant d'un paramètre holomorphe

$$h(z) = \sum_i n_i \int_{\gamma_i} g(z,\eta)d\eta = \sum_i \int_0^1 g(z,\gamma_i(t))\gamma_i'(t)dt.$$

Il suffit de vérifier les hypothèses du théorème 4.0.20 pour avoir h holomorphe, 1- et 2- sont directs, on montre uniquement l'hypothèse 3-.
Soit K un compact de Ω et $r > 0$ tel que $K_r = \{z \in \Omega \ : \ d(K,z) \leq r\} \subset \Omega$ alors

i) Si $\mid z-\eta \mid \geq r/2$ alors on a

$$\mid g(z,\eta) \mid = \mid \frac{f(z)-f(\eta)}{z-\eta} \mid \leq 2 \sup_{K_r} \mid f \mid \frac{2}{r}$$

ii) Si $\mid z-\eta \mid \leq r/2$ alors le cercle de rayon r et de centre η (parcouru dans le sens direct) : $C(\eta,r) \subset K_r$ et par le théorème de Cauchy local

$$g(z,\eta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(\eta,r)} \frac{g(\omega,\eta)}{\omega - z} d\omega = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(\eta,r)} \frac{f(\omega)-f(\eta)}{(\omega-z)(\omega-\eta)} d\omega,$$

donc

$$\mid g(z,\eta) \mid \leq \frac{2\pi r}{2\pi} 2 \frac{\sup_{K_r} \mid f \mid}{r^2/2} = \frac{4}{r} \sup_{K_r} \mid f \mid .$$

Par conséquent pour tout compact K' de Ω, on a

$$| g(z,\gamma_i(t)) | \leq \frac{4}{r} \sup_{(K'\bigcup\gamma_i^*)_r} | f |,$$

avec $(K'\bigcup\gamma_i^*)_r = \{z \in \Omega \ : \ d(K'\bigcup\gamma_i^*, z) \leq r\} \subset \Omega$ et l'hypothèse 3- du théorème 4.0.20 est vérifié sur chacun des chemins γ_i et donc h est une somme (finie) de fonctions holomorphes : c'est une fonction holomorphe.

Etape 3- Soit

$$\Omega_1 = \big\{z \in \mathbb{C}/\Gamma^* \ : \ Ind_\Gamma(z) = 0\big\},$$

par l'hypothèse 2-, on a que l'ensemble Ω_1 est ouvert, car Ind_{γ_i} est constante des composante connexe ouverte et donc Ω_1 est une union d'intersections finis d'ouvert, et contient la composante connexe non borné de $\mathbb{C}/\Gamma^*$. On pose

$$k(z) \begin{cases} \int_\Gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta, & z \in \Omega_1, \\ h(z), & z \in \Omega \end{cases}$$

On note que k est bien définie car sur $\Omega_1 \bigcap \Omega$, on a

$$\int_\Gamma \frac{f(z) - f(\eta)}{z - \eta} d\eta = \int_\Gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta + f(z) \underbrace{Ind_\Gamma(z)}_{=0}$$

et comme intégrale à paramètre holomorphe $\int_\Gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta$ est bien définie et holomorphe. De plus, on a $\Omega \bigcup \Omega_1 = \mathbb{C}$ car $\mathbb{C} = \bigcup$ composantes connexes de $\mathbb{C}/\gamma^* \bigcup \Gamma^*$ or toutes ces composantes connexes (sauf celle non bornée) sont inclues dans Ω. Par conséquent, on a k qui est une fonction holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Conclusion On a k borné sur $\mathbb{C}$. En effet, pour n entier assez grand l'ensemble

$$K_n = \big\{z \ : \ dist(z, \mathbb{C}/\omega) \geq 1/(n+1)\big\} \bigcap \bar{B}(0, n),$$

est compact et vérifie $\Gamma \subset \mathring{K}_n$ (voir annexe - topologie) : donc

$$\sup_{K_n} | h | < \infty,$$

et

$$| \int_\Gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta | \leq \sup_{\Gamma^*} | f | / d(\Gamma^*, \mathbb{C}/\mathring{K}_n) < \infty, \quad z \in \mathbb{C}/\mathring{K}_n,$$

donc k est borné et de plus

$$\forall z \in \Omega_1 \quad | \int_\Gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta | \leq long(\Gamma) \sup_{\Gamma^*} | f | \, d(z, \Gamma^*) \to_{z\to\infty} 0.$$

En utilisant le théorème de Liouville 1.5.6, on a k qui doit être constant sur $\mathbb{C}$ et en utilisant la limite précédente, cette constante doit être nulle. Ainsi, $k = 0$ et

$$\int_{\Gamma} g(z, \eta) d\eta,$$

et (5.0.5) est satisfaite. □

Définition 5.0.24 *On dit que Ω est simplement connexe si Ω est connexe et son complémentaire ne contient pas de composante connexe borné.*

Proposition 5.0.25 *Si Ω est un ouvert simplement connexe et Γ est un cycle de Ω alors pour tout $a \in \mathbb{C}/\Omega$ on $aInd_{\Gamma}(a) = 0$.*

Corollaire 5.0.26 *Lorsque Ω est un ouvert simplement connexe, le théorème de Cauchy est vérifié dès que f est holomorphe sur Ω et Γ est un cycle dans Ω.*

Corollaire 5.0.27 *Lorsque Ω est un ouvert simplement connexe et f est holomorphe sur Ω alors f admet une primitive.*

Corollaire 5.0.28 *Lorsque Ω est un ouvert simplement connexe et f est holomorphe ne s'annulant pas sur Ω alors il existe g holomorphe sur Ω telle que $f = e^g$.*

Chapitre 6

Développement en série de Laurent

On note $C(a, R_1, R_2)$ la couronne ouverte $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty : \{z \; : \; R_1 <\mid z - a \mid < R_2\}$, alors pour tout r_1, r_2 tels que $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ on a

$$\Gamma = C(a, r_2) - C(a, r_1),$$

cycle où l'on parcourt le cercle $C(a, R_2)$ dans le sens positif et $C(a, R_1)$ dans le sens négatif. Alors, on a

$$Ind_\Gamma(a) = 1 - 1 = 0, \quad si \;\; a \in B(0, R_1) \quad Ind_\Gamma(a) = 0 - 0 = 0, \quad si \;\; a \in \mathbb{C}/B(0, R_2),$$

et donc pour tout $a \in \mathbb{C}/C(a, R_1, R_2)$ on a $Ind_\Gamma(a) = 0$. Maintenant, soit $f \in \mathcal{H}(C(a, R_1, R_2))$ alors par le théorème de Cauchy, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\Big[\int_{C(a,r_2)} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta - \int_{C(a,r_1)} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta\Big]. \tag{6.0.1}$$

DSE de $\int_{C(a,r_2)} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta$ En posant $\eta - z = (\eta - a) - (z - \eta)$ et en faisant un DSE de $1/(1-u)$ (voir etape 1- de la démonstration du théorème 1.3.6), on a

$$\int_{C(a,r_2)} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^n \int_{C(a,r_2)} \frac{f(\eta)}{(\eta - a)^{n+1}} d\eta,$$

on note

$$a_n(r_2) = \int_{C(a,r_2)} \frac{f(\eta)}{(\eta - a)^{n+1}} d\eta.$$

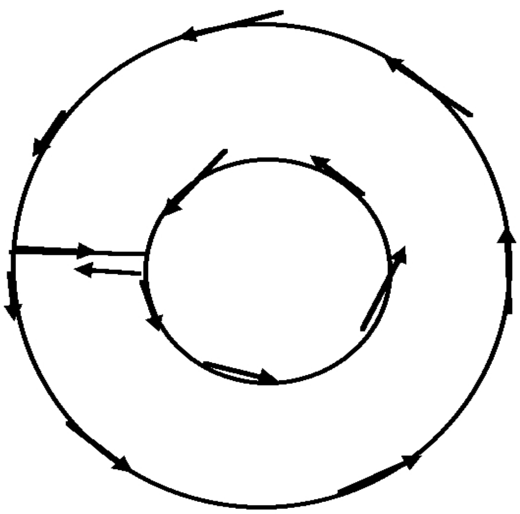
DSE de $\int_{C(a,r_1)} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta$ En posant $\eta - z = (\eta - a) - (z - \eta)$ et en faisant un DSE de $1/(1-u)$ (voir etape 1- de la démonstration du théorème 1.3.6), on a

$$\int_{C(a,r_1)} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta = -\sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^{-n-1} \int_{C(a,r_1)} f(\eta)(\eta - a)^n d\eta,$$

on note

$$b_n(r_1) = \int_{C(a,r_1)} f(\eta)(\eta - a)^n d\eta.$$

Les coefficients $a_n(r_2)$ et $b_n(r_1)$ ne dépendent pas de r_1 et r_2, on peut le voir en notant que dans le domaine simplement connexe suivant l'intégrale de la fonction holomorphe $\frac{f(\eta)}{(\eta-a)^{n+1}}$ est nulle et donc $\int_{C(a,r_2)} \frac{f(\eta)}{(\eta-a)^{n+1}} d\eta = \int_{C(a,r_2')} \frac{f(\eta)}{(\eta-a)^{n+1}} d\eta$.



Par conséquent, on a

$$\boxed{f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (z-a)^n \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(\eta)}{(\eta-a)^{n+1}} d\eta.}$$

Proposition 6.0.29 *Soit $f \in \mathcal{H}(C(a, R_1, R_2))$, $h_1 \in \mathcal{H}(B(a, R_2))$ et $h_2 \in \mathcal{H}(C(a, R_1, \infty))$ avec $h_2(z) \to_{z\to\infty} 0$ alors*

$$f = h_1 + h_2 \Rightarrow \quad h_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(f)(z-a)^n, \quad h_2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}/\mathbb{N}} a_n(f)(z-a)^n,$$

avec $a_n(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} f(\eta)(\eta-a)^{-(n+1)} d\eta$ avec r quelconque dans $]R_1, R_2[$.

Preuve On pose

$$k(z) = \begin{cases} h_1 - \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(f)(z-a)^n, & B(a, R_2), \\ h_2 - \sum_{n\in\mathbb{Z}/\mathbb{N}} a_n(f)(z-a)^n, & C(a, R_1, \infty) \end{cases}$$

c'est une fonction bien définie sur $\mathbb{C}$ (car $f = h_1 + h_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(f)(z-a)^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}/\mathbb{N}} a_n(f)(z-a)^n$ sur $C(a, R_1, R_2)$), holomorphe sur $\mathbb{C}$ et qui tend vers 0 à l'infini (donc borné sur $\mathbb{C}$) et par le théorème de Liouville on a $k = 0$ sur $\mathbb{C}$. □

6.1 Fonctions holomorphes dans un ”disque pointé” : singularité

Soit $D'(a,r) = D'(a,r)/\{a\} = C(a,0,r)$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega/\{a\})$ avec $a \in \Omega$ alors

Définition 6.1.1 *On dit que a est une* **singularité isolé** *de f si f admet un Développement en Série de Laurent dans un disque pointé $D'(a,r) \subset \Omega$:*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(f)(z-a)^n.$$

Trois cas sont alors possibles :

a- pour tout $n < 0$: $a_n(f) = 0 \mapsto$ on dit que $\{a\}$ est une **pseudo singularité** et f se prolonge en une fonction holomorphe dans le disque de centre a et de rayon r $D(a,r)$.

b- il existe un nombre fini de $n < 0$ tels que $a_n(f) \neq 0 \mapsto$ on dit que $\{a\}$ est un **pôle** de multiplicité n_0 (plus petit n : $a_n(f) \neq 0$.

c- il existe un nombre infini de $n < 0$ tels que $a_n(f) \neq 0 \mapsto$ on dit que $\{a\}$ est une **singularité essentielle** de f. (par exemple $f(z) = e^{1/z}$)

Proposition 6.1.2
1- ($f \in \mathcal{H}(D'(a,r))$ a une pseudo singularité (singularité effaçable))$\Leftrightarrow$(f est borné au voisinage de $\{a\}$)

2-($f \in \mathcal{H}(D'(a,r))$ a une pôle d'ordre au plus n_0)$\Leftrightarrow$($(z-a)^{-n_0}f(z)$ est borné au voisinage de $\{a\}$)

Preuve
a- on montre $\Leftarrow$ de 2-, on pose $g(z) = (z-a)^{-n_0+1}f(z)$ et $g(a) = 0$, c'est une fonction holomorphe sur $D(a,r)/\{a\}$ et continue sur $D(a,r)$ donc g est holomorphe sur $D(a,r)$ et DSE, donc

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_k(z-a)^k,$$

et donc $f(z) = \sum_{n=n_0-1}^{\infty} b_{k+1-n_0}(z-a)^k$ est DS Laurent.

b- $\Rightarrow$ de 2- est direct car $f(z)(z-a)^{-n_0}$ est DSE.

c- $\Leftarrow$ de 1-, $g(z) = f(z)(z-a)$ et $g(a) = 0$, c'est une fonction holomorphe sur $D(a,r)/\{a\}$ et continue sur $D(a,r)$ et donc holomorphe et DSE donc

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} b_{k+1}(z-a)^k,$$

mais $b_0 = 0$ car $g(a) = 0$ donc en fait $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{k+1}(z-a)^k$ et f DSE donc holomorphe.

d- $\Rightarrow$ de 1- est direct car $f(z)$ est DSE. $\square$

Théorème 6.1.3 *(Théorème de Weirstrass)*

($f \in \mathcal{H}(D'(a,r))$ a une singularité essentielle en a)$\Rightarrow$($\forall \rho \in]0,r[$ $f(D'(a,\rho))$ est dense dans $\mathbb{C}$)

Preuve
On montre par contraposé que a singularité essentielle implique $f(D'(a,\rho))$ dense.

Supposons $\exists \rho \in]0,r[$ telle que $f(D'(a,\rho))$ ne soit pas dense dans $\mathbb{C}$ alors il existe $b \in \mathbb{C}$ et $R > 0$ tels que $\overline{f(D'(a,\rho))} \bigcap \overline{D(b,R)} = \emptyset$. La fonction $g(z) = \frac{1}{f(z)-b}$ est bornée sur $D'(a,\rho)$: $\mid g(z) \mid \leq 1/R$ donc par la propriété précédente, g a une singularité effaçable en a et g est en fait une fonction holomorphe sur $D(a,\rho)$ et DSE.
On peut en factorisant le DSE de g écrire $g(z) = (z-a)^{n_0}h(z)$ avec $h(a) \neq 0$ et h holomorphe donc

$$f(z)(z-a)^{n_0} = \frac{1}{h(z)} + b(z-a)^{n_0},$$

avec h non nul dans un voisinage de a donc pour ρ assez petit, on a $f(z)(z-a)^{n_0}$ borné dans un voisinage $(D(a,\rho))$ de a donc f est une singularité effaçable ($n_0 = 0$) ou un pôle ($n_0 > 0$), i.e., a n'est pas une singularité essentielle. $\square$

6.2 Caractérisation des différentes singularités

Soit $f \in \mathcal{H}(D'(a,r))$, alors

1- a sing. effaçable $\Leftrightarrow$ f est borné au voisinage de $\{a\}$.

2- a pôle $\Leftrightarrow$ $\mid f \mid \rightarrow_{z\rightarrow a} \infty$

3- a singularité essentielle $\Leftrightarrow$ $\forall \rho \in]0,r[$ $f(D'(a,\rho))$ est dense dans $\mathbb{C}$

Preuve
2- $\Leftarrow$: si a n'est pas un pôle alors, soit c'est une singularité effaçable et donc $\mid f \mid \not\to_{z\to a} \infty$ car f est bornée, soit a est essentielle et puisque $f(D'(a,\rho))$ est dense dans $\mathbb{C}$ on peut trouver une suite z_n qui tend vers a telle que $f(z_n)$ tende vers 0 (par exemple) et donc $\mid f \mid \not\to_{z\to a} \infty$.

3- $\Leftarrow$:
- si a est une sing. effaçable alors il existe $C > 0$ tel que pour ρ assez petit

$$\mid f(z) \mid \leq C, \quad \forall z \in D(a,\rho),$$

et donc ${}^cD(a,C) \bigcap \overline{f(D(a,\rho/2)} = \emptyset$.
- si a est un pôle alors il existe $C > 0$ tel que pour ρ assez petit

$$\mid f(z) \mid \geq C, \quad \forall z \in D(a,\rho),$$

et donc $D(a,C) \bigcap \overline{f(D(a,\rho/2)} = \emptyset$.
Par conséquent on a nécessairement a singularité essentielle.

Les autres points sont évidents. $\square$

6.3 Formule des résidus

Définition 6.3.1 *Soit $f \in \mathcal{H}(D'(a,r))$ et $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(f)(z-a)^n$, on note*

$$Res(f,a) = a_{-1}(f) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,\rho\in]0,r[} \frac{f(\eta)}{\eta - a} d\eta,$$

le **résidu** *de f en a.*

Théorème 6.3.2 *Soient*
1- Ω un ouvert
2- $A \subset \Omega$ fermé dans Ω et formé de point(s) isolé(s)
3- Γ un cycle : $\Gamma^* \subset \Omega/A$ d'indice nul en tout points de $\mathbb{C}/\Omega$ (hyp. du th. de Cauchy)
4- $f \in \mathcal{H}(\Omega/A)$
ALORS

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{a\in A} Ind_\Gamma(a) Res(f,a).$$

Remarque 5 L'ensemble $\big\{a \in A \ : \ Ind_\gamma(a) \neq 0\big\}$ est un ensemble fini car inclue dans un compact de Ω + théorème de Borel Lebesgue et hyp. 2-.

Preuve On a

$$\Big\{a \in A \;:\; Ind_\Gamma(a) \neq 0\Big\} = \{a_1, ..a_k\}$$

Il existe une suite de réel strictement positifs $r_j > 0$, tels que $\bar{D}(a_j, r_j) \bigcap A = \{a_j\}$ et $\bar{D}(a_j, r_j) \subset \Omega/\Gamma^*$. On pose

$$\Gamma' = \Gamma - \sum_i Ind_\Gamma(a_i) C(a_i, r_i), \quad \Omega' = \Omega/A$$

alors

$$\int_{\Gamma'} f(\eta)d\eta = \int_\Gamma f(\eta)d\eta - \sum_i Ind_\Gamma(a_i) 2i\pi Res(f, a_i),$$

donc si les hypothèses du théorème de Cauchy sont vérifiées sur Γ' alors $\int_{\Gamma'} f(\eta)d\eta = 0$ et c'est fini.

Il suffit donc de montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}/\Omega', \quad Ind_{\Gamma'}(z) = 0$$

- Si $z \in \Omega/A$ on a $Ind_\Gamma(z) = 0$ et pour r_i assez petit z est à l'extérieur des $C(a_i, r_i)$ et par conséquent $Ind_{C(a_i,r_i)}(z) = 0$ et $Ind_{\Gamma'}(z) = 0$.

- Si $z \in A$ alors
i) $z \in \{a_1, ..a_k\}$, par exemple $z = a_1$ donc $Ind_{C(a_i,r_i)}(a_1) = 0$ si $i \neq 1$ et 1 sinon : ce qui implique que $Ind_{\Gamma'}(a_1) = Ind_\Gamma(a_1) - 1.Ind_\Gamma(a_1) = 0$.
ii) $z \in A/\{a_1, ..a_k\}$ et $Ind_\Gamma(a) = 0$ et extérieur à tous les disques $C(a_i, r_i)$ donc $Ind_{\Gamma'}(z) = 0$. □

6.4 Fonctions méromorphes

Définition 6.4.1 *Soit Ω un ouvert connexe, f est une fonction* **méromorphe** *sur Ω si il existe $P(f) \subset \Omega$ fermé formé de points isolés tel que*

$$f \in \mathcal{H}(\Omega/P(f)),$$

et tout points de $P(f)$ est pôle de f.

Remarque 6 Soit Ω connexe et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ non nulle alors $1/f$ est une fonction méromorphe dans Ω et $P(f)$ =Zéros de f.

Proposition 6.4.2 *L'ensemble des fonctions méromorphes sur un ouvert connexe est un espace vectoriel, un corps, et stable par dérivation.*

Remarque 7 Soit Ω connexe et f est une fonction méromorphe dans Ω non nulle alors $1/f$ est une fonction méromorphe dans Ω et $P(1/f)$ =Zéros de f. En effet, les zéros de f étant formé de points isolés sur $\Omega/\bigcup_{a\in P(f)} B(a,r_a)$ avec $\mid f(z)\mid\geq 1$ sur $\bigcup_{a\in P(f)} B(a,r_a)$, les zéros deviennent des pôles pour $1/f$ et les pôles de f des zéros de $1/f$.

6.5 Pratique du calcul des résidus

Soit $f\in\mathcal{H}(D'(a,r))$ on a $Res(f,a)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(a,\rho)} f(\eta)d\eta\ \ \rho\in]0,r[$. Lorsque f a un pôle d'ordre m en a $(m<0)$ alors $g(z)=(z-a)^{-m}f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de a et par DSE $g(z)=\sum_{\mathbb{N}} c_n(g)(z-a)^n$ donc $f(z)=\sum_{n=m}^{\infty} c_{n-m}(g)(z-a)^n$ et donc

$$c_{-1}(f)=c_{-m-1}(g).$$

Dans la pratique, on calcule un Développement Limité (DL) de g en a à l'ordre $-m-1$, il est aussi plus pratique de se ramener en 0 par un changement de variable :$z=a+u$.

Exemple 4 Soit $f=k/h$, k ne s'annule pas et h a un zéro simple en a alors

$$h(z)=(z-a)h_1(z)=h(a)+(z-a)h'(a)+...$$

$$f(z)=\frac{k(a)+(z-a)k'(a)+...}{(z-a)h'(a)+...}=\frac{1}{z-a}\frac{k(a)}{h'(a)}+holomorphe$$

et donc $Res(f,a)=\frac{k(a)}{h'(a)}$.

Exemple 5 Soit $f=h'/h$, h ayant un pôle d'ordre m $(m<0)$ en a alors

$$g(z)=f(z)(z-a)^{-m}\in\mathcal{H}(voisinage(a)),\quad g(a)\neq 0,$$

$$f'(z)=g'(z)(z-a)^m+mg(z)(z-a)^{m-1},$$

$$f'/f=g'/g+m(z-a)^{-1},$$

avec g'/g holomorphe au voisinage de a donc $Res(f,a)=m$. On peut faire de même pour h ayant un zéros d'ordre m.

Corollaire 6.5.1 *Soit f méromorphe de Ω ouvert connexe dans $\mathbb{C}$, Γ un cycle évitant tout les zéros et pôles et f tel que*
1- $Ind_\Gamma(z)=0,\ \ z\in\mathbb{C}/\Omega$,
2- $Ind_\Gamma(z)\in\{0,1\},\quad z\notin\Gamma^*$,

ALORS

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f'(\eta)}{f(\eta)}d\eta = N - P,$$

avec N *(resp.* P*) qui est le nombre de zéros (resp. pôles) avec multiplicité de* f *dans l'ensemble* $\Omega_1 = \{z \ : \ Ind_\Gamma(z) = 1\}$.

Preuve Il suffit d'utiliser le calcul de l'exemple 5 et le théorème de Cauchy. □

Proposition 6.5.2 *Soit* $\Omega_1 = \{z \in \Omega \ : \ Ind_\Gamma(z) = 1\}$ *et* $f\mathcal{H}(\Omega)$ *ne s'annulant pas sur* Γ^* *alors le nombre de zéros de* f *dans* Ω_1 *est égal à* $\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f'(\eta)}{f(\eta)}d\eta$.

Preuve Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $\Gamma = \sum_i n_i\gamma_i$, γ_i étant un chemin fermé $C^1_m \bigcap C^0$ alors $fo\Gamma = \sum_i n_i fo\gamma_i$ et par définition de l'intégrale sur un chemin, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{fo\Gamma}\frac{1}{\eta}d\eta = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{1}{fo\Gamma(t)}f'o\Gamma(t)\Gamma'(t)dt = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f'(\eta)}{f(\eta)}d\eta = Ind_{fo\Gamma}(0).$$

□

Théorème 6.5.3 *(Théorème de Rouché) :*
Soit Ω *un ouvert,* Γ *un cycle tel que*
1- $\Gamma^* \subset \Omega$
2- $Ind_\Gamma(z) = 0, \ \ z \in \mathbb{C}/\Omega$,
3- $Ind_\Gamma(z) \in \{0, 1\}, \quad z \notin \Gamma^*$,
f, g *deux fonctions holomorphes sur* Ω *tels que*

$$\forall z \in \Gamma^*, \quad | f(z) | > | g(z) |,$$

ALORS
le nombre de zéros de f *sur* $\Omega_1 = \{z \ : \ Ind_\Gamma(z) = 1\}$ *est égal au nombre de zéros de* $f + g$ *sur* Ω_1.

Preuve Puisque l'inégalité $| f(z) | > | g(z) |$ est stricte, ni f ni $f + g$ ne s'annulent sur Γ^* et on trouve que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f'(\eta)}{f(\eta)}d\eta = \text{ nombre de zéros de } f \text{ dans } \Omega_1,$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{(f+g)'(\eta)}{(f+g)(\eta)}d\eta = \text{ nombre de zéros de } f+g \text{ dans } \Omega_1,$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{(f+g)'(\eta)}{(f+g)(\eta)}d\eta = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f'(\eta)}{f(\eta)}d\eta + \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{(1+g/f)'(\eta)}{(1+g/f)(\eta)}d\eta,$$

or $\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{(1+g/f)'(\eta)}{(1+g/f)(\eta)}d\eta = Ind_{(1+g/f)o\Gamma}(0)$ avec

$$(1+g/f)o\Gamma \subset B(1,1),$$

car $\mid (1+g/f)-1 \mid < 1$ sur Γ^* ($\mid f(z) \mid > \mid g(z) \mid$ sur Γ^*) donc 0 est dans la composante connexe non borné de $(1+g/f)o\Gamma$ et $Ind_{(1+g/f)o\Gamma}(0) = 0$. □

Remarque 8 On peut "affaiblir" les hypothèses et prendre $\mid f(z) \mid \geq \mid g(z) \mid$ mais en supposant que ni f ni $f+g$ ne s'annulent sur Γ^* et dans ce cas la conclusion est encore valable. Il suffit pour montrer cela de prendre $f_a = af$ ($a \in]1,\infty[$ et g qui vérifient alors les hypothèses du théorème de Rouché et de passer à la limite lorsque a tend vers 1 en utilisant la continuité des intégrales par rapport au paramètre a et du fait qu'elles ne prennent que des valeurs entières.

Théorème 6.5.4 *Soit f une fonction holomorphe non constante sur Ω ouvert connexe et f ouverte (c'est à dire f(ouvert) est une ouvert) alors*

$$f \text{ injective } \Rightarrow f' \text{ ne s'annule pas.}$$

Preuve
Etape 1- Soit z_0 et w_0 tel que $f(z_0) = w_0$, on va étudier les solutions de $f(z) = w$ lorsque w est proche de w_0. Puisque z_0 est une racine de $f(z) - w_0$, on a par DSE

$$f(z) - w_0 = \sum_1^\infty a_n (z - z_0)^n,$$

la somme commence à $n = 1$ car $a_0 = 0$ car $f(z_0) - w_0 = 0$, et peut s'écrire

$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^{n_0} g(z),$$

avec g ne s'annulant pas dans un voisinage (assez petit) de z_0 car les zéros de $f(z) - w_0$ sont isolés et donc

$$f'(z) = (z - z_0)^{n_0 - 1}[n_0 g(z) + (z - z_0)g'(z)] = (z - z_0)^{n_0 - 1} h(z),$$

avec h qui ne s'annule pas en z_0 et donc quitte à se placer dans un plus petit voisinage de z_0, on a

$$\mid f(z) - w_0 \mid \geq \mid z - z_0 \mid^{n_0} \mid g(z_0) \mid /2, \quad (a)$$

$$\mid f'(z) \mid \geq \mid z - z_0 \mid^{n_0 - 1} \mid h(z_0) \mid /2, \quad (b)$$

On pose $F(z) = f(z) - w_0$ et $G(z) = Constante = w - w_0$ alors

$$f(z) - w = F - G,$$

avec n_0 le nombre de zéros (avec multiplicité) de F dans le disque $D(z_0, r_0)$ ($r_0 > 0$ assez petit). On pose $\Gamma =$ Cercle de centre z_0 et de rayon r_0, dans ce cas $\Omega_1 = D(z_0, r_0)$. On peut appliquer le théorème de Rouché à F et G, en effet quitte à prendre w très proche de w_0,

$$\mid w - w_0 \mid < r_0^{n_0} \mid g(z_0) \mid /2,$$

alors par (b), on a

$$\mid w - w_0 \mid < \mid f(z) - w_0 \mid,$$

et on trouve que $\mid G \mid < \mid F \mid$ sur Γ^* : par conséquent, le nombre de zéros de $f(z) - w_0$ dans le disque $D(z_0, r_0)$ est égal au nombre de zéros de $f(z) - w_0$ dans le disque $D(z_0, r_0)$ c'est à dire n_0.

Etape 2- On suppose que f est injective et f' s'annule, on va montrer que cela est absurde. Puisque f' s'annule en z_0, en prenant w assez proche de $f(z_0)$, on a vu à l'étape 1- qu'il y avait au moins deux zéros de $f(z) - w$ (avec multiplicité) au voisinage de w_0, ce qui veut dire que :
- soit z_1 est racine au moins double de $f(z) - w$,
- soit il existe $z_1 \neq z_2$ racines de $f(z) - w$.

Le premier cas est impossible puisque f' est holomorphe donc ses zéros sont isolés et dan un voisinage proche de z_0, il ne peut y avoir d'autre zéros de f' que z_0. Le second cas est aussi impossible car f est injective. Par conséquent on abouti à une absurdité et f est injective implique f' ne s'annule pas. □

Corollaire 6.5.5 *Une fonction holomorphe sur un ouvert Ω, f injective et f' ne s'annulant pas alors f est localement bijective.*

6.6 Résidus : exemples

- Calcul de $\int_0^{2\pi} R(\sin(\theta), \cos(\theta) d\theta$. Par exemple, on veut calculer, pour $a \in \mathbb{C}/[-1, 1]$, l'intégrale

$$I_a = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin(t)} = \frac{1}{i} \int_{C(0,1)} \frac{dz}{a + (z - \bar{z})/2i},$$

on note que sur le cercle de rayon 1 et de centre 0, $\bar{z} = 1/z$, donc

$$I_a = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin(t)} = \frac{1}{i} \int_{C(0,1)} \frac{1}{z} \frac{dz}{a + (z - 1/z)/2i} = 2 \int_{C(0,1)} \frac{dz}{2iaz + z^2 - 1},$$

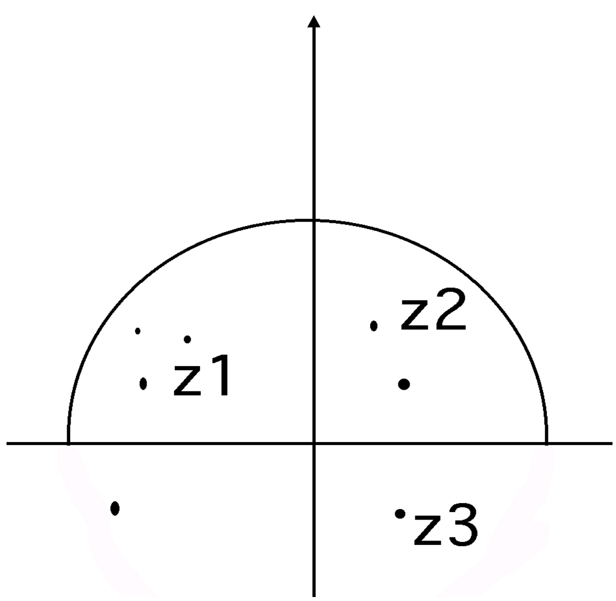
or $2iaz+z^2-1=(z-z_+)(z-z_-)$ avec $z\pm=i(-a\pm\sqrt{a^2-1})$. On note que $\mid z_+z_- \mid = 1$ et $(a\pm\sqrt{a^2-1})=e^{i\theta}$ impliquerait $a=-cos(\theta)$ (impossible) donc il existe $\epsilon\in\{+1,-1\}$ tel que $z_\epsilon\in D(0,1)$ et

$$I_a = 2\int_{C(0,1)} \frac{dz}{2iaz+z^2-1} = 4i\pi[Res(f,z_\epsilon)] = 2\pi/\sqrt{a^2-1}.$$

- Calcul de $I=\int_{\mathbb{R}}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ (fraction rationnelle)

On suppose que Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et le degré de $P\leq$ degré de Q -2. Par le théorème des résidus on a (voir schéma : demi cercle et racines de Q de partie imaginaire >0), pour r assez grand

$$\int_{demi\ \ cercle(0,r)} \frac{P(\eta)}{Q(\eta)}d\eta = 2i\pi \sum_{z\ :Q(z)=0\ \ et\ \ Im(z)>0} Res(\frac{P}{Q},z),$$



d'autre part

$$\int_{demi\ \ cercle(0,r)} \frac{P(\eta)}{Q(\eta)}d\eta = \int_{-r}^{r}\frac{P(x)}{Q(x)}dx + i\int_0^{\pi}[P(re^{it})/Q(re^{it})]re^{it}dt$$

Par passage à la limite, on trouve que

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int_{\mathbb{R}}\frac{P(x)}{Q(x)}dx,$$

et comme le degré de $P\leq$ degré de Q -2 : $[P(re^{it})/Q(re^{it})]r \to_{r\to\infty} 0$, on a

$$\lim_{r\to\infty} i\int_0^{\pi}[P(re^{it})/Q(re^{it})]re^{it}dt = 0,$$

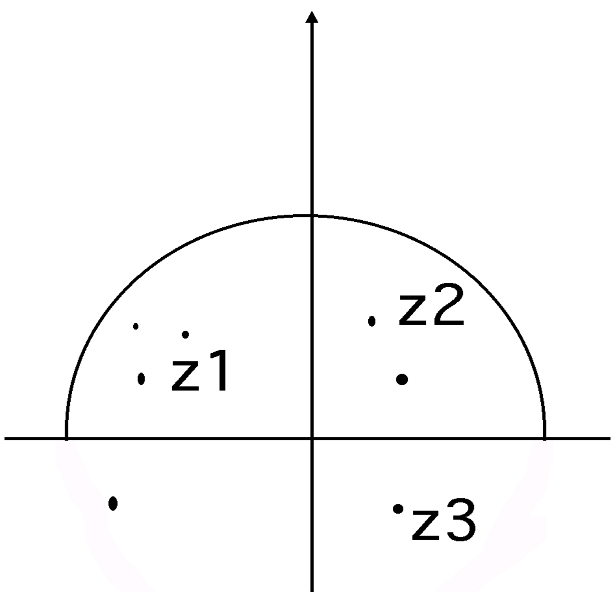
et finalement
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = -2i\pi \sum_{z\ :Q(z)=0\ \ et\ \ Im(z)>0} Res(\frac{P}{Q}, z).$$

- Calcul de $I = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}R(x)dx$ **(**R **fraction rationnelle)** $t \in \mathbb{R}$ Même méthode, en notant que si $t > 0$

$$\lim_{r\to\infty} i\int_0^{\pi} [P(re^{iu})/Q(re^{iu})]re^{iu}e^{itre^{iu}}du = 0,$$

car $\mid e^{itre^{iu}} \mid = e^{-tr\sin(u)} \leq 1$ pour $u \in [0, \pi]$ et si $t < 0$, on prend le demi-cercle inférieur.

- Calcul de $I = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}R(x)dx$ **(**R **fraction rationnelle)** $t \in \mathbb{R}$ Cette fois ci Q peut s'annuler en 0 : 0 doit être un zéro simple et nulle part ailleurs sur la droite réelle



on exclu 0 avec un demi cercle de centre 0 et de rayon ϵ (qui a vocation à tendre vers 0... c'est la fatalité de ϵ).

On note que pour le petit cercle, on a

$$\lim_{\epsilon\to 0} i\int_0^{\pi} [P(\epsilon e^{iu})/Q(\epsilon e^{iu})]\epsilon e^{iu}e^{it\epsilon e^{iu}}du = P(0)/Q'(0).$$

Chapitre 7

Suites et séries de fonctions holomorphes

Théorème 7.0.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et $(f_n)_n \subset \mathcal{H}(\mathbb{C})$ qui converge uniformément sur tout compact (i.e., pour tout compact K, $\sup_K \mid f_n - f \mid \to_{n\to\infty} 0$) ALORS la limite f est holomorphe sur Ω et pour tout k $f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout compact vers $f^{(k)}$.*

Preuve Soit $z \in \Omega$ et $D(z,r) \subset \Omega$, alors

$$f_n(z) = \int_{C(z,r)} \frac{f_n(\eta)}{\eta - z} d\eta,$$

puisqu'il y a convergence uniforme sur tout compact, on peut intervertir limite et intégrale et

$$\int_{C(z,r)} \frac{f_n(\eta)}{\eta - z} d\eta \to_{n\to\infty} \int_{C(z,r)} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta,$$

avec $z \to \int_{C(z,r)} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta$ qui est une intégrale à paramètre holomorphe (donc holomorphe) d'autre part, il y a convergence simple et

$$f_n(z) \to_{n\to\infty} f(z),$$

donc

$$f(z) = \int_{C(z,r)} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Pour les dérivée successive, on note que

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{C(z,r)} \frac{f_n(\eta)}{(\eta - z)^{k+1}} d\eta,$$

et

$$\sup_{D(z,r_0/2)} \mid f_n^{(k)} - f^{(k)} \mid \leq \frac{k!}{r_0^k} \sup_{\bar{D}(z,r_0)} \mid f_n - f \mid$$

donc il y a convergence uniforme sur les disques fermé, donc par le théorème de Borel Lebesgue sur tout compact. □

Théorème 7.0.2 *(Théorème d'Hurwitz)*
1- Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$,
2- $(f_n)_n \subset \mathcal{H}(\Omega)$ convergeant uniformément sur tout compact vers f
3- $\bar{D}(z_0, r) \subset \Omega$ tel que f ne s'annule pas sur $C(z_0, r)$
ALORS
Pour n assez grand, le nombre de zéros de f_n (avec multiplicité) dans $D(z_0, r)$ est égal au nombre de zéros de f (avec multiplicité).

Preuve Soit $c = \inf_{C(z_0,r)} \mid f \mid > 0$ (fonction continue sur un compact et ne s'annulant pas), alors pour n assez grand, on a $\sup_{C(z_0,r)} \mid f_n - f \mid < c/2$ donc $\inf_{C(z_0,r)} \mid f_n \mid > c/2 > 0$. On peut donc décomposer

$$f_n = (f_n - f) + f,$$

et utiliser le théorème de Rouché. □

Corollaire 7.0.3 *Soit Ω un ouvert connexe, $(f_n)_n \subset \mathcal{H}(\Omega)$ convergeant uniformément sur tout compact vers f et $f_n^{-1}(0) = \emptyset$ ALORS soit f est la fonction nulle, soit $f^{-1}(0) = \emptyset$.*

Preuve On raisonne par l'absurde, si f est non nulle et s'annule, alors les zéros de f sont isolés et autour d'un zéro on peut trouver un cercle centré en ce zéro tel que f ne s'y annule pas et par le théorème précédent, pour n assez grand, f_n devrait s'annuler : c'est absurde. □

Corollaire 7.0.4 *Soit Ω un ouvert connexe, $(f_n)_n \subset \mathcal{H}(\Omega)$ convergeant uniformément sur tout compact vers f et f_n injective ALORS soit f est constante, soit f est injective.*

Preuve On raisonne par l'absurde, si f est non constante et non injective, alors il existe z_1, z_2 telle que $f(z_1) = f(z_2)$ et $f(z) - f(z_1)$ admet deux racines, donc pour n assez grand $f_n - f(z_1)$ admet aussi au moins deux racines : f_n est non injective : absurde. □

Corollaire 7.0.5 *Soit Ω un ouvert connexe, $(f_n)_n \subset \mathcal{H}(\Omega)$ convergeant uniformément sur tout compact vers f et $f_n(\Omega) \subset A \subset \mathbb{C}$ ALORS soit f est constante, soit $f(\Omega) \subset A$.*

Preuve On raisonne par l'absurde, si f est non constante et il existe z_0 tel que $f(z_0) \notin A$, alors $f(z) - f(z_0)$ admet une racine, donc pour n assez grand $f_n - f(z_0)$ admet aussi au moins une racine : $f_n(\Omega) \not\subset A$: absurde. □

Théorème 7.0.6 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et $(f_n)_n \subset \mathcal{H}(\mathbb{C})$ dont la série converge uniformément sur tout compact et converge normalement ALORS $\sum_n f_n$ est holomorphe sur Ω et pour tout k $\sum_n f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout compact vers $(\sum_n f_n)^{(k)}$.*

Définition 7.0.7 *Soit Ω un ouvert, et $(u_n)_n$ une suite de fonctions méromorphes sur Ω alors on dit que*

la série de terme général $(u_n)_n$ converge uniformément (resp. normalement) sur les compact de Ω si et seulement si :
1- $\forall K$ compact $\subset \Omega$, il existe $N(K) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N(K)$ u_n n'a pas de pôle dans K
2- $\sum_{n>N(K)} u_n$ converge uniformément (resp. normalement) sur K.

Théorème 7.0.8 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et $(f_n)_n$ une suite de fonctions méromorphes sur Ω dont la série converge uniformément sur tout compact (resp. converge normalement) ALORS $\sum_n f_n$ est méromorphe sur Ω et pour tout k $\sum_n f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout compact vers $(\sum_n f_n)^{(k)}$.*

Preuve Soit $P_n = \{$ pôle de $u_n\}$, et $P = \{$ pôle de $\sum_n u_n\}$, alors

$$P \subset \bigcup_n P_n, \text{ formé de points isolés,}$$

donc pour tout compact K, l'intersection $\bigcup_n P_n \bigcap K$ est finie. Soit U un ouvert de Ω tel que $\bar{U}$ soit compact alors

$$\sum_n u_n = \sum_{n \leq N(K)} u_n + H$$

avec H holomorphe sur U. Comme la somme finie de fonctions méromorphes est méromorphe, on a le résultat souhaité. Pour conclure, on se reporte à Annexe-topologie pour montrer que pour tout K compact il existe U ouvert, tel que $\bar{U}$ compact et U contient K (suite exhaustive de compact). □

Exemple amusant et non trivial

Proposition 7.0.9 *On a*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = (\frac{\pi}{\sin(\pi z)})^2.$$

Preuve
Etape 1. On montre que la série $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ converge au sens du théorème 7.0.8. La suite $u_n(z) = 1/(z-n)^2$ à un pôle sur $\mathbb{C}$ en $z = n$. Pour tout compact K, il existe n_0 tel que $K \subset B(0, n_0)$ et donc pour tout $n \geq n_0 + 1$, u_n n'a pas de pôle dans K, et

$$\mid 1/(z-n)^2 \mid \leq 1/(n_0 - n)^2$$

donc la série $\sum_{n \geq n_0+1} u_n$ converge normalement sur tout compact et la limite S est méromorphe.

Etape 2. $S(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n \neq 0} 1/(z-n)^2$ avec $\sum_{n \neq 0} 1/(z-n)^2$ qui est holomorphe au voisinage de 0 (série de fonctions holomorphes dans $B(0, 1/2)$ par exemple et convergeant normalement). De plus la limite S est $1-$périodique donc les pôles de S contiennent $\mathbb{Z}$ or les pôles de S sont inclues dans $\bigcup_n$ pôles de $u_n = \mathbb{Z}$ donc les pôles de S se répartissent exactement sur $\mathbb{Z}$.

Etape 3.

$$\sup_{x \in [-1/2, 1/2]} \mid S(x+iy) \mid \leq \frac{1}{y^2} + \sum_{\mathbb{Z}^*} \frac{1}{y^2 + \mid n - 1/2 \mid^2},$$

donc par $1-$périodicité on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \mid S(x+iy) \mid \leq \frac{1}{y^2} + \sum_{\mathbb{Z}^*} \frac{1}{y^2 + \mid n - 1/2 \mid^2},$$

et par convergence normale,

$$\lim_{y \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \mid S(x+iy) \mid = 0.$$

et

$$\sup_{x \in \mathbb{R}, |y| \geq 1} \mid S(x+iy) \mid \leq 3.$$

Etape 4. En utilisant le DSE de $\sin(\pi z)$ on a $(\frac{\pi}{\sin(\pi z)})^2 = (\frac{1}{z})^2 + H(z)$ avec H holomorphe au voisinage de 0. On a également $(\frac{\pi}{\sin(\pi z)})^2$ $1-$périodique car $\sin(z)$ est $1-$périodique $(= (e^{iz} - e^{-iz})/(2i))$.

$$\sup_{x \in [-1/2, 1/2]} \mid (\frac{\pi}{\sin(\pi(x+iy))})^2 \mid \leq \pi^2/(4(e^{|\pi y|} - 1/e)^2),$$

$$\lim_{y \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \mid (\frac{\pi}{\sin(\pi(x+iy))})^2 \mid = 0.$$

et

$$\sup_{x \in \mathbb{R}, |y| \geq 1} \mid (\frac{\pi}{\sin(\pi(x+iy))})^2 \mid \leq 3.$$

Etape 5. $S(z)-(\frac{\pi}{\sin(\pi z)})^2$ est une fonction holomorphe au voisinage de 0, $1-$périodique et en fait c'est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ (par périodicité tout les pôles sont éliminés), cette fonction est bornée et tend vers 0 lorsque $Im(z) \to \infty$ donc par Liouville cette fonction est nulle et on a

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = (\frac{\pi}{\sin(\pi z)})^2.$$

□

Exemple 6 On peut montrer de même que

$$\frac{\pi}{\tan(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z+n}.$$

En effet, on a

$$(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z+n})' = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2},$$

$$(\frac{\pi}{\tan(\pi z)})' = -(\frac{\pi}{\sin(\pi z)})^2$$

donc

$$W(z) = (\frac{\pi}{\tan(\pi z)} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z+n})$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$ (qui est un ouvert connexe), de dérivée nulle : c'est donc une constante. En l'infini $x+iy$ avec $y \to \infty$ on note que W tend vers 0 cette constante est donc nulle et $W=0$.

Théorème 7.0.10 *Soit $(z_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ telle que $\mid z_j \mid \to_{j\to\infty} 0$ et*

$$\forall j \;\; Q_j(z) = \sum_{l=0}^{n_j} a_{lj}/(z-z_j)^l,$$

ALORS il existe une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$: $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}/\bigcup_j\{z_j\})$ et

$$\forall j \;\; \exists B(z_j,r_j) \;\; : \;\; f(z) = Q_j(z) + f_j(z), \quad f_j \in \mathcal{H}(B(z_j,r_j).$$

Preuve Si la série des des Q_j est normalement convergente (au sens des séries de fonctions méromorphes) alors $f=\sum_j Q_j$ est solution.

Si $z_j = 0$, on pose $P_j = 0$
Si $z_j \neq 0$ alors $Q_j \in \mathcal{H}(B(0, \mid z_j \mid))$, $Q_j(z) = \sum_0^\infty a_{n,j} z^n$ et sur $\bar{D} = \bar{B}(0, \mid z_j \mid /2)$ on a

$$\exists n_j \in \mathbb{N} \ : \ \forall z \in \bar{D} \ \mid Q_j(z) - \sum_0^{n_j} a_{n,j} z^n \mid \leq 2^{-j},$$

on pose

$$P_j(z) = \sum_0^{n_j} a_{n,j} z^n,$$

et pour tout $R > 0$, il existe j_0 tel que pour tout $j \geq j_0 \mid z_j \mid > 2R$ rt donc Q_j n'a pas de pôle dans $\bar{B}(0, R)$ et

$$\sum_{j \geq j_0} \sup_{z \in \bar{B}(0,R)} \mid Q_j(z) - P_j(z) \mid \leq 1/2^{j_0} < \infty,$$

la série converge normalement sur tout compact (au sens méromorphe). Alors

$$f(z) = \sum_j [Q_j(z) - P_j(z)],$$

est solution. □

Chapitre 8

Produit infini

Définition 8.0.11 *On dit que* $\prod_{i=0}^{\infty} u_i$, $u_i \in \mathbb{C}$ *converge si et seulement si la suite* $(\prod_{i=0}^{n} u_i)_n$ *converge dans* $\mathbb{C}^*$ *et* $\prod_{i=0}^{\infty} u_i = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n} u_i$.

Proposition 8.0.12 *Si* $\prod_{i=0}^{\infty} u_i$, $u_i \in \mathbb{C}$ *converge alors* $u_i \neq 0$ *pour tout* i, $u_i \to_{i\to\infty} 1$ *et*

$$\prod_{i=0}^{\infty} u_i = \prod_{i=0}^{p} u_i \prod_{i=p+1}^{\infty} u_i.$$

Proposition 8.0.13 $\prod_{i=0}^{\infty} u_i$, $u_i \in \mathbb{C}$ *converge si et seulement si*
1- $u_i \neq 0$ *pour tout* i,
2- $\exists i_0\ \forall i \geq i_0\ Re(u_i) > 0$ *et* $\sum_{i_0}^{\infty} \log(u_i)$ *converge*
et on a

$$\prod_{i=0}^{\infty} u_i = \prod_{i=0}^{i_0-1} u_i e^{\sum_{i_0}^{\infty} \log(u_i)}.$$

Preuve
$\Leftarrow$ Lorsque $Re(z) > 0$, on a$e^{log(z)} = z$ et $e^{\sum} = \prod exp$ avec $z \to e^z$ continue (pour le passage à la limite).

$\Rightarrow$ Lorsque $u_i \to 1$, $\exists i_0\ \forall i \geq i_0\ Re(u_i) > 0$ et $u_i \neq 0$ donc $\log(u_i)$ a un sens (à partir de i_0). Puisque le produit $\prod_{i_0}^{\infty} u_i$ converge dans $\mathbb{C}^*$ vers une limite l, il existe p_0 tel que pour tout $p \geq p_0 \mid \prod_{i_0}^{p} u_i - l \mid < \mid l \mid /2$. Puisque $l \neq 0$, il existe un relèvement du logarithme dans $0 \notin B(l, \mid l \mid /2)$: c'est à dire il existe $\Phi \in \mathcal{H}(B(l, \mid l \mid /2))$ tel que $e^{\Psi(z)} = z$ dans $B(l, \mid l \mid /2)$. Donc :

$$e^{\Psi(\prod_{i_0}^{p} u_i)} = \prod_{i_0}^{p} u_i,$$

$$\Psi(\prod_{i_0}^{p} u_i) = \sum_{i_0}^{p} \log(u_i) + 2i\pi k_p$$

et $\Psi(\prod_{i_0}^{p} u_i) \to \Psi(l)$, $\Psi(\prod_{i_0}^{p+1} u_i) \to \Psi(l)$ et $\log(u_{p+1}) \to 0$ donc $k_p - k_{p+1}$ est une suite stationnaire égale à 0 (i.e. k_p est constante) à partir d'un certain rang : ce qui prouve le résultat. $\square$

En posant $u_i = 1 + v_i$, on remarque que $u_i \to 1$ revient à dire que $v_i \to 0$.

Proposition 8.0.14 *(avec les v_i) En supposant $Re(v_i) > 0$ pour tout i, on a $\sum_{i_0}^{\infty} \mid v_i \mid$ converge $\Leftrightarrow \sum_{i_0}^{\infty} \mid \log(u_i) \mid$ converge.*

Preuve Soit $\mid z \mid \leq 1/2$ alors $\mid z \mid /2 \leq \mid \log(1+z) \mid \leq 3 \mid z \mid /2$ car

$$\mid 1 - \log(1+z)/z \mid = \mid \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{n-1}/n \leq 1/2 \quad \textit{pour} \quad \mid z \mid < 1/2.$$

Le résultat en découle. $\square$

Chapitre 9

Produit infini de fonctions holomorphes

Définition 9.0.15 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω, on dit que*

le produit infini $\prod_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact si et seulement si :

Pour tout compact $K \subset \Omega$, $\exists n_0 : \forall n \geq n_0\ \forall z \in K : Re(f_n(z)) > 0$ et $\sum_{n \geq n_0} \log(f_n(z))$ converge uniformément (resp. normalement) sur K.

Théorème 9.0.16 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω, tel que le produit infini $\prod_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact alors la limite $\Pi(z) = \prod_0^{\infty} f_n(z)$ est holomorphe sur Ω et $(\Pi(z) = 0) \Leftrightarrow (\exists n : f_n(z) = 0)$.*

De plus si Ω est connexe et $f_n \not\equiv 0$ alors $\Pi'(z)/\Pi(z)$ est méromorphe sur Ω : $\Pi'(z)/\Pi(z) = \sum_n f_n'/f_n$ qui est une série qui converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact (sens méromorphe).

Preuve Soit $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$ alors il existe n_0 tel que $\forall z \in \overline{D(z_0, r)} : Re(f_n(z)) > 0$ donc $\log(f_n(z))$ a un sens et $\sum_{n \geq n_0} \log(f_n(z))$ converge uniformément (resp. normalement) sur $\overline{D(z_0, r)}$. Par conséquent, sur $\overline{D(z_0, r)}$, par le théorème de Heine

$$\sum_{n \geq n_0} \log(f_n(z)) \to_{Conv.\ unif.\ (resp.\ norm.)} g(z) \Rightarrow e^{\sum_{n \geq n_0} \log(f_n(z))} \to_{Conv.\ unif.\ (resp.\ norm.)} e^g(z),$$

et

$$\Pi(z) = \prod_0^{\infty} f_n(z) = \underbrace{\prod_0^{n_0-1} f_n(z)}_{\text{les zéros se trouvent là}} \prod_{n_0}^{\infty} f_n(z) = [\prod_0^{n_0-1} f_n(z)] \underbrace{e^{\sum_{n \geq n_0} \log(f_n(z))}}_{\text{ne s'annule pas}},$$

le produit des premiers termes est holomorphe (produit fini) et l'exponentielle de la somme est holomorphe par limite uniforme (reps. normale) de série de fonctions holomorphe, donc Π est holomorphe.

Sur $B(z_0, r/2) \subset \bar{B}(z_0, r)$, on a $(\sum_{n\geq n_0} \log(f_n(z)))' = \sum_{n\geq n_0} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$ (la convergence étant uniforme (resp. normale) sur tout compact de $D(z_0, r/2)$ et on trouve la décomposition : partie holomorphe et méromorphe suivante

$$\Pi'(z)/\Pi(z) = \frac{(\prod_0^{n_0-1} f_n(z))'}{\prod_0^{n_0-1} f_n(z)} + \frac{(e^{\sum_{n\geq n_0} \log(f_n(z))})'}{e^{\sum_{n\geq n_0} \log(f_n(z))}} = \sum_{n\leq n_0-1} f_n'/f_n + \sum_{n\geq n_0} f_n'/f_n.$$

$\square$

Proposition 9.0.17 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(v_n)_n \subset \mathcal{H}(\Omega)$ alors $\prod(1+v_n(z))$ converge unif. (resp. normal.) sur tout compact de $\Omega \Leftrightarrow \sum_n v_n$ converge unif. (resp. normal.) sur tout compact de Ω.*

Voir prop. 8.0.14.

Exemple 7 On a

$$\Pi(z) = \prod_{n\in\mathbb{N}} (1 - \frac{z^2}{n^2}) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}.$$

En effet, en fixant $R > 0$, $\mid z_2 \mid /n^2 \leq R^2/n^2$ pour $\mid z \mid \leq R$ et il y a convergence normale sur les compact (sens holomorphe) et la limite est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et s'annule sur $\mathbb{Z}$ donc

$$\Pi'(z)/\Pi(z) = \sum_n 2z/(z^2-n^2) = 1/\tan(\pi z) - 1/z = (\sin(\pi z)/z)'/(\sin(\pi z)/z), \quad z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z},$$

donc $\Pi/(\sin(\pi z)/z))' = 0$ sur $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ ouvert connexe or $\Pi(0) = \sin(\pi z)/z \mid_{z=0} = 1$ donc $\Pi/(\sin(\pi z)/z) = 1$.

9.1 Produit de Weirstrass

Lemme 9.1.1 *$E_p(z) = (1-z)e^{\sum_{j=1}^p z^j/j}$ vérifie $\mid 1 - E_p(z) \mid < \mid z \mid^{p+1}$ si $\mid z \mid < 1$.*

Preuve On a

$$E_p'(z) = -z^p e^{\sum_{j=1}^p z^j/j},$$

donc

$$\mid E_p(z) - E_p(0) \mid = \mid z^{p+1} \int_0^1 t^p e^{\sum_{j=1}^p z^j t^j/j} dt \mid \leq \mid z^{p+1} \mid \int_0^1 t^p \mid e^{\sum_{j=1}^p z^j t^j/j} \mid dt,$$

or par produite de DSE, on a

$$e^{\sum_{j=1}^{p} z^j t^j / j} = \sum_k a_k (zt)^k,$$

avec $a_k \geq 0$ donc $\mid e^{\sum_{j=1}^{p} z^j t^j / j} \mid \leq e^{\sum_{j=1}^{p} |z^j| t^j / j}$ et

$$\mid E_p(z) - E_p(0) \mid \leq \mid z^{p+1} \mid \int_0^1 t^p \mid e^{\sum_{j=1}^{p} t^j / j} \mid dt < \mid z^{p+1} \mid, \quad \mid z \mid < 1.$$

□

Théorème 9.1.2 *(Théorème de Weirstrass) Soit $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de complexe et $(m_j)_j$ un suite d'entiers non nuls tel que $\mid z_j \mid \to_{j \to \infty} \infty$ et $z_j \neq z_k$ si $j \neq k$ ALORS il existe une fonction holomorphe telle que*

$$f^{-1}(0) = \{(z_j)_j\},$$

avec z_j de multiplicité m_j.

Preuve Quitte à multiplier la fonction par z^{m_j} on peut supposer que les z_j sont non nuls.
On montre que pour $p_j = m_j + j$,

$$\prod_j (E_{p_j}(z/z_j))^{m_j}$$

converge normalement sur les compacts, pour cela il suffit de s'intéresser au logarithme

$$\sum_j m_j \log(E_{p_j}(z/z_j)),$$

ou de manière équivalente pour

$$\sum_j m_j (1 - E_{p_j}(z/z_j)).$$

Soit $R > 0$, il existe j_0 tel que pour tout $j \geq j_0$: $\mid z_j \mid \geq 2R$ et $\mid z/z_j \mid < 1/2$ pour $z \in \bar{B}(0, R)$ donc par le lemme précédent

$$m_j \mid 1 - E_{p_j}(z/z_j) \mid < \mid z/z_j \mid^{p_j+1} \leq m_j (1/2)^{p_j+1} \leq (m_j/2^{m_j})(1/2^j) \leq 1/2^{j+1},$$

on a donc convergence normale sur tout compact et $Re(E_p(z/z_j)) \geq 1/2 > 0$. □

Corollaire 9.1.3 *Soit f un fonction méromorphe sur Ω alors il existe $g, h \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $f = g/h$.*

Preuve Les pôles sont formés de points isolés, qui vérifient les hypothèses du théorème de Weirstrass, et donc $h(z) = \prod_j E_p(z/z_j)^m_j$ et $g = fh$ peut se prolonger en une fonction holomorphe sur Ω : les singularités sont effaçables. □

Exemple

Proposition 9.1.4 *Soit*

$$\Pi(z) = z(z+1)\prod_{j\geq 2}(1+z/j)(1-/j)^z,$$

qui converge normalement sur les compact. On pose

$$\Gamma(z) = 1/\Pi(z).$$

Preuve On a
a) $\mid e^u - 1 - u \mid \leq \mid u \mid^2 e^{|u|}/2, \quad \forall u \in \mathbb{C}$
b) $\mid \log(1-x) + x \mid \frac{1}{2}\big(x^2/(1-x^2)\big)$
c) donc

$$(1-1/j)^z = e^{z\log(1-1/j)} = 1+z\log(1-1/j)+\epsilon(z) \mid z\log(1-1/j) \mid^2 e^{|\log z(1-1/j)|}/2, \quad \mid \epsilon(z) \mid \leq 1,$$

avec

$$z\log(1-1/j) = z/j + z/2\epsilon'(z) \mid z/j^2 \mid, \quad \mid \epsilon'(z) \mid \leq 1,$$

et

$$u_j(z) = \epsilon(z) \mid z\log(1-1/j) \mid^2 e^{|\log z(1-1/j)|}/2, \quad v_j(z) = z/2\epsilon'(z) \mid z \mid /j^2,$$

sont les termes généraux de séries normalement convergente sur tout compact de K de $\mathbb{C}$. Par conséquent

$$(1+z/j)(1-1/j)^z = 1 - \underbrace{z^2/j^2 + (z/j+1)Reste(z,j)}_{\text{Convergence sur tout compact : } O(1/j^2)}$$

et par la proposition 9.0.17 on a la convergence du produit. □

Proposition 9.1.5 *On a*

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z(z+1)\prod_{j\geq 2}(1+z/j)(1-/j)^z} \in Meromorphe(\mathbb{C}),$$

les pôles sont sur $\mathbb{N}$. *La fonction* Γ *ne s'annule pas.*

Car Π est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (pas de singularité).

Proposition 9.1.6 *On a*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(1) = 1 \text{ et } \Gamma(n) = (n-1)!$$

Preuve On a

$$z(z+1)\prod_{j=2}^{n}(1+z/j)(1-/j)^z = z\prod_{j=1}^{n}(1+z/j)\frac{\prod_{j=2}^{n}(j-1)^z}{\prod_{j=2}^{n}(j)^z} = \frac{z}{n^z}\prod_{j=1}^{n}(1+z/j),$$

donc

$$\Gamma(z)/z\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty}\frac{z\frac{z+1}{n^{z+1}}\prod_{j=1}^{n}(1+(z+1)/j)}{\frac{z}{n^z}\prod_{j=1}^{n}(1+z/j)} = \frac{n+z+1}{n} \to_{n\to\infty} 1,$$

$$\frac{1}{n^1}\prod_{j=1}^{n}(1+1/j) = (n+1)/n \to 1 = 1/\Gamma(1),$$

et en combinant les deux résultats, on trouve $\Gamma(n) = (n-1)!$. □

Proposition 9.1.7 *(Formule des compléments) On a*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z), \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Preuve En effet, en utilisant la proposition 9.1.5 et l'exemple 7 on trouve que

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{1}{z^2(1-z^2)\prod_{j\geq 2}(1-(z/j)^2)(1-/j)^z} = -\pi/(z\sin(\pi z)),$$

or $\Gamma(-z+1) = -z\Gamma(-z)$ ce qui montre le premier résultat. En posant $z = 1/2$ dans la formule des compléments on trouve le second. □

Chapitre 10

L'espace $\mathcal{H}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et K_n une suite exhaustive de compacts (voir annexe) de Ω alors

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{\sup_{K_n} \mid f-g \mid}{1+\sup_{K_n} \mid f-g \mid} \subset \mathbb{R}^+,$$

définit une distance sur $\mathcal{H}(\Omega)$.

Preuve Il suffit d'avoir l'inégalité triangulaire (les autres propriétés étant triviale) or $c \leq a+b$ implique $c/(1+c) \leq a/(1+a)+b/(1+b)$, car $x \to x/(1+x)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $a, b > 0$, on a

$$\begin{aligned}(1+a)(a+b)/(a(1+a+b)) - 1 &= [(1+b/a)(1+a)-1-a-b]/(1+a+b) \\ &= (b/a)1/(1+a+b) \leq (b/a)(1+a)/(1+b)\end{aligned}$$

donc

$$(a+b)/(1+a+b) \leq a/(1+a)+b/(1+b).$$

□

Proposition 10.0.8 *Soit $(f_p)_p \subset \mathcal{H}(\Omega)$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ alors*

$$f_n \to_{Conv.\ unif.\ compact} f \Leftrightarrow d(f_p, f) \to_{p\to\infty} 0.$$

Preuve
$\Rightarrow \sum \lim_p = \lim_p \sum$ par convergence dominée
$\Leftarrow \sup_{K_n} \mid f_p - f \mid \to 0$ et la suite K_n est exhaustive (tout compact peut être inclue dans un K_n). □

Proposition 10.0.9 $(\mathcal{H}(\Omega), d)$ *est complet.*

Preuve
Une suite de Cauchy, est telle que f_p est une suite de Cauchy sur tout compact donc converge uniformément sur tout compact et la limite est holomorphe. □

Définition 10.0.10 *Un suite de fonction holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *telle que*

$$\forall K \subset \Omega \text{ compact } \exists C_K \geq 0 \ : \ \sup_K \mid f_n \mid \leq C_K,$$

est une **famille normale**.

Théorème 10.0.11 *(Théorème de Montel) Soit* $(f_p)_p$ *une famille normale alors il existe une sous suite de* $(f_p)_p$ *qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction holomorphe sur* Ω.

Par conséquent une suite bornée est compacte!!!

Corollaire 10.0.12 $A \subset \mathcal{H}(\Omega)$ *est d'adhérence compacte si et seulement si* $\forall K \subset \Omega$ *compact* $\exists C_K \geq 0 \ : \ \sup_K \mid f_n \mid \leq C_K$.

Preuve (du théorème de Montel)

- Etape1 :

Lemme 10.0.13 *Soit* $f \in \mathcal{H}(B(z_0, r))$ *borné par* M *et* $A \subset \bar{B}(z_0, r/2)$ *alors*

$$\sup_{\bar{B}(z_0,r/2)} \mid f \mid \leq \sup_A \mid f \mid + \frac{2M}{r} \sup_{z \in \bar{B}(z_0,r/2)} \mid d(z, A) \mid .$$

preuve du lemme : En utilisant l'inégalité de Cauchy, on a

$$\mid f'(\eta) \mid \leq \frac{2M}{r}, \quad \eta \in \bar{B}(z_0, r/2),$$

et $f(z) - f(a) = \int_[a, z] f'(\eta) d\eta$ par intégration, implique que pour tout $z \in \bar{B}(z_0, r/2)$ (donc pour le sup), on a

$$\mid f(z) \mid \leq \mid f(a) \mid + \frac{2M}{r} \mid z - a \mid \leq \sup_A \mid f \mid + \frac{2M}{r} \sup_{z \in \bar{B}(z_0,r/2)} \mid d(z, A) \mid .$$

□

Lemme 10.0.14 *Soient*
1- $B \subset \bar{B}(z_0, r/2)$ et $\bar{B} = \bar{B}(z_0, r/2)$
2- $(f_p)_p \subset \mathcal{H}(B(z_0, r))$ borné par M
3- pour tout $b \in B$, la suite $f_p(b)$ converge
ALORS

La suite $(f_p)_p$ converge uniformément sur $\bar{B}(z_0, r/2)$ vers une fonction holomorphe.

preuve du lemme : On montre que la suite est de Cauchy.
i) Puisque B est dense dans $\bar{B}(z_0, r/2)$, pour tout $\epsilon > 0$ on peut en extraire un sous ensemble $A_\epsilon = \{b_1, ..., b_{n(\epsilon)}\}$ tel que $\sup_{z \in \bar{B}(z_0, r/2)} \mid d(z, A_\epsilon) \mid < \epsilon/2$.
ii) De plus, par convergence simple sur B, et puisque A_ϵ est un ensemble fini, il existe $N(\epsilon, n(\epsilon))$ tel que

$$\forall b \in A_\epsilon \quad \forall p \geq q \geq N(\epsilon) \; : \; \sup_{A_\epsilon} \mid f_p - f_q \mid < \epsilon/2.$$

En utilisant le lemme précédent avec $A = A_\epsilon$, on trouve

$$\sup_{\bar{B}(z_0, r/2)} \mid f_p - f_q \mid \leq \sup_{A} \mid f_p - f_q \mid + \frac{2M}{r} \sup_{z \in \bar{B}(z_0, r/2)} \mid d(z, A) \mid < \epsilon,$$

donc

$$\forall \epsilon, \; \exists N(\epsilon) \;\; \forall p \geq q \geq N(\epsilon) \quad \sup_{\bar{B}(z_0, r/2)} \mid f_p - f_q \mid < \epsilon.$$

□

Lemme 10.0.15 *Soient*
1- Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et B un sous ensemble dense dans Ω
2- $(f_p)_p \subset \mathcal{H}(B(z_0, r))$ borné sur les compacts de Ω
3- pour tout $b \in B$, la suite $f_p(b)$ converge
ALORS

La suite $(f_p)_p$ converge uniformément sur les compact de Ω vers une fonction holomorphe.

preuve du lemme : Il suffit de se restreindre aux boules $B(z_0, r)$ et noter que $B \bigcap B(z_0, r/2)$ est dense dans $\bar{B}(z_0, r)$. □

preuve du théorème : Soit $B = \Omega \bigcap \mathbb{Q}$ dénombrable dense dans Ω, alors

$$B = \{b_1, b_2, ...\},$$

et puisque la suite $(f_p(b_1))_p$ est bornée, on peut en extraire une sous suite convergente $(f_{\phi_0(p)}(b_1))_p$. Puisque la suite $(f_{\phi_0(p)}(b_2))_p$ est bornée, on peut en extraire une sous suite convergente $(f_{\phi_0(\phi_1(p))}(b_2))_p$... par procédé diagonal : on pose $\psi(p) = \phi_0 o \phi_1 ... o \phi_p(p)$ on a

$$\forall b \in B \text{ la suite } f_{\psi_p(p)}(b) \text{ convergente.}$$

Chapitre 11

Compléments

Définition 11.0.16 *Un ouvert de $\mathbb{C}$ est dit* **propre** *si il est non vide et non $\mathbb{C}$.*

Théorème 11.0.17 *(Riemann) Soit Ω un ouvert propre, connexe, simplement connexe alors il existe une application biholomorphe $\psi : \Omega \to D(0,1)$.*

Preuve
On montre que l'ensemble suivant

$$\Sigma = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) \quad : f(\Omega) \subset D(0,1) \ \ et \ \ f \ \ injective\},$$

vérifie :
1- $\Sigma \neq \emptyset$
2- Si $z_0 \in \Omega$ alors $\{| f'(z_0) |, \quad f \in \Sigma\}$ est borné par un réel m qui est atteint par une fonction de Σ.
3- Si $\Psi \in \Sigma$ et $\Psi'(z_0) = m$ alors Ψ est biholomorphe de Ω sur $D(0,1)$.

- Etape 1 : $\Sigma \neq \emptyset$

Puisque l'ouvert est propre, il existe $z_1 \in \mathbb{C}/\Omega$, donc $z \to z - z_1$ est une fonction holomorphe se s'annulant pas sur Ω. En utilisant le corollaire 5.0.28 (Ω est simplement connexe), il existe un logarithme de $z - z_1$ sur Ω et donc une racine carré de $z - z_1$ holomorphe sur Ω : g et

$$g^2(z) = z - z_1.$$

La fonction g est clairement injective et holomorphe, est Ω est un ouvert connexe (et g' ne s'annule pas) donc elle est donc localement bijective (voir corollaire 6.5.5) et donc ouverte : $O = g(\Omega)$ est un ouvert.

Lemme 11.0.18 *Soit $O = g(\Omega)$ alors*

$$O \bigcap (-O) = \emptyset.$$

En effet, si $x \in O\bigcap(-O)$ alors il existe η_1 et η_2 tels que $g(\eta_1) = x$, $-g(\eta_2) = x$ donc en passant au carré : $\eta_1 - z_1 = \eta_2 - z_2 = x^2$ donc $\eta_1 = \eta_2$ et : $x = -x = 0$ or g ne s'annule pas : donc $O\bigcap(-O) = \emptyset$. $\square$

Par conséquent, il existe $D(z_2, r) \subset \mathbb{C}/g(\Omega)$ avec $r > 0$ et la fonction

$$h(z) = \frac{r/2}{g(z) - z_2},$$

est holomorphe et injective sur Ω et $\mid h(z) \mid \leq 1/2 < 1$ donc Σ est non vide.

- Etape 2 : $\{\mid f'(z_0) \mid, \quad f \in \Sigma\}$ est borné Soit $z_0 \in \Omega$ alors il existe $r > 0$ tel que $\bar{D}(z_0, r) \subset \Omega$ et pour tout $f \in \Sigma$, par l'inégalité de Cauchy, on a

$$\mid f'(z_0) \mid \leq \frac{1}{r} \sup_{\bar{D}(z_0,r)} \mid f \mid \leq \frac{1}{r} \quad \text{borné},$$

donc $\{\mid f'(z_0) \mid, \quad f \in \Sigma\}$ est un ensemble borné de $\mathbb{R}_+$, il admet une borne supérieure m

- Etape 3 : la borne sup est atteinte : Soit f_n une suite de Σ telle que $\mid f_n'(z_0) \mid \rightarrow_{n\rightarrow\infty} m$ (limite par valeur inférieure) alors $f_n(\Omega) \subset D(0, 1)$ est donc une suite bornée sur les compact de Ω : on peut en extraire une sous suite convergente (théorème de Montel) uniformément sur tout compact de Ω et la limite f est holomorphe sur Ω. La limite f vérifie :

i) $f \in \mathcal{H}(\Omega)$
ii) en passant à la limite pour la sous suite $\mid f'(z_0) \mid = m$
iii) on a une suite de fonctions injectives convergeant uniformément sur les compact : la limite est injective ou constante (voir corollaire corolt2). Or $m > 0$ car la dérivée de la fonction h ne peut s'annuler donc le $m = \sup \mid f'(z_0) \mid \geq \mid h'(z - 0) \mid > 0$ et f ne peut être constante. iv) on a une suite de fonctions telles que $f_n(\Omega) \subset D(0, 1)$ convergeant uniformément sur les compact : la limite vérifie $f(\Omega) \subset D(0, 1)$ ou est constante. Par le point précédent, elle ne peut être constante donc $f(\Omega) \subset D(0, 1)$. Finalement, on a

$$f \in \Sigma, \quad \mid f'(z_0) \mid = m = \max\{\mid f'(z_0) \mid, \quad f \in \Sigma\}.$$

- Etape 4 : Surjectivité : Soit $\Psi \in \Sigma, \quad \mid \Psi'(z_0) \mid = m = \max\{\mid f'(z_0) \mid, \quad f \in \Sigma\}$ et Ψ non surjective sur $D(0, 1)$ alors il existe $z_1 \in D(0, 1)/\Psi(\Omega)$ et

$$A_{z_1} : z \rightarrow \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}$$

vérifie $A_{z_1} o\Psi \in \Sigma$. Puisque Ω est simplement connexe, il existe $\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$tel que

$$\phi^2 = A_{z_1} o\Psi, \quad sur \;\; \Omega.$$

La fonction ϕ est injective et $\phi \in \Sigma \; \phi(z_0) = z_2$. Soit Θ la fonction

$$\Theta(z) = A_{z_2} o\phi \in \Sigma,$$

avec A_{z_2} définit comme A_{z_1}. On a

$$\phi^2 = (A_{z_2}^{-1} o\Theta)^2 \quad et \quad \Phi = A_{z_1}^{-1} o(A_{z_2}^{-1} o\Theta)^2,$$

donc pour $S(z) = z^2$, on trouve que

$$\Psi = A_{z_1}^{-1} oSoA_{z_2}^{-1} o\Theta = Fo\Theta,$$

et

$$\Psi'(z_0) = F'(\Theta(z_0))\Theta'(z_0) = F'(0)\Theta'(z_0).$$

Lemme 11.0.19 *On a* $\mid F'(0) \mid< 1$ *(et donc* $\mid \Theta'(z_0) \mid>\mid \Psi'(z_0) \mid$ *ce qui est absurde par maximalité).*

On a $F = A_{z_1}^{-1} oSoA_{z_2}^{-1}$ qui est une fonction holomorphe de $D = D(0,1)$ dans D

- si $F(0) = 0$ alors par le lemme de Schwarz 3.0.19, si $\mid F'(0) \mid= 1$ alors $F(z) = ze^{iu}$ avec $u \in \mathbb{R}$ or F n'est pas injective car S ne l'est pas donc $\mid F'(0) \mid< 1$.

- si $F(0) = \alpha \neq 0$ alors $A_\alpha : z \to (z-\alpha)/(1-\bar{\alpha}z)$ vérifie $A_\alpha oF : D \to D$ et $A_\alpha oF(0) = 0$ donc par le lemme de Schwarz 3.0.19 : $\mid (A_\alpha oF)'(0) \mid\leq 1$ or $A'_\alpha(\alpha) = 1/(1- \mid \alpha \mid^2)$ donc $\mid F'(0) \mid\leq (1- \mid \alpha \mid^2) \leq 1$ (et l'égalité implique $\alpha = 0$ cas précédent). Par conséquent on a également $\mid F'(0) \mid< 1$.

Ceci montre que l'hypothèse : non surjective est absurde et Ψ est bijective et biholomorphe. □

Corollaire 11.0.20 *On a*
a) $\Psi(z_0) = 0$
b) $g \in \mathcal{H}(\Omega) : g(\Omega) \subset D(0,1)$ *alors* $\mid g'(z_0) \mid\leq m$ *(et égalité si et seulement g est biholomorphe)*

Preuve
a) $\Psi(z_0) = \alpha \neq 0$ alors $A_\alpha o\Psi \in \Sigma$ et $\mid (A_\alpha o\Psi)'(z_0) \mid= \frac{1}{1-|\alpha|^2} m > m$ (c'est absurde par maximalité)

b) Soit $h = go\Psi^{-1} : D \to D$ alors $\mid h'(0) \mid\leq 1$ et $= 1$ si et seulement si $h(z) = ze^{iu}$ or

$$\mid h'(0) \mid=\mid g'(z_0) \mid / \mid \Psi'(z_0) \mid\leq 1.$$

□

Corollaire 11.0.21 *Soit Ω un ouvert propre connexe, alors*
1- Ω simplement connexe
$\Downarrow$ *2- $\forall \Gamma$ cycle de Ω et pour tout $z \notin \Omega$ $Ind_\Gamma(z) = 0$*
$\Downarrow$ *3- $\forall f \in \mathcal{H}(\Omega)$ f admet une primitive holomorphe*
$\Downarrow$ *4- toute fonction holomorphe ne s'annulant pas admet un logarithme*
$\Downarrow$ *5- toute fonction holomorphe ne s'annulant pas admet une racine carré*
$\Downarrow$ *6- il existe $\Psi : \Omega \to D(0,1)$ biholomorphe* $\Downarrow$ *4-*
$\Downarrow$ *2.*

Preuve
1-$\Rightarrow$2-$\Rightarrow$3-$\Rightarrow$4-$\Rightarrow$5-$\Rightarrow$6- Déjà vu dans le cours.
6-$\Rightarrow$4- Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $f(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$ et Ψ biholomorphe de Ω sur $D(0,1)$ alors

$$fo\Psi^{-1} \in \mathcal{H}(D),$$

et ne s'annule pas, D est un ouvert étoilé donc il existe g holomorphe sur D telle que $e^g = fo\Psi^{-1}$ et $f = e^{go\Psi}$ (voir conséquences du théorème de Cauchy Local).
4-$\Rightarrow$2- $z \to 1/(z - z_0)$ est holomorphe et ne s'annule pas donc elle admet une primitive holomorphe et l'indice est nul et $Ind_\Gamma(z_0) = \int_\Gamma 1/(z - z_0)dz = 0$. $\square$

Autres conséquences Automorphismes de Ω :

$$Aut(\Omega) := \{f \in \mathcal{H}(\Omega) \ : \ f \ bijective \ de \ \Omega \ sur \ \Omega\},$$

Puisque $Id : z \to z$ est dans $Aut(\Omega)$ cet ensemble est non vide. C'est un groupe pour la composition (Aut, o).

1- Si $\Omega = D(0,1)$ alors les automorphismes sont de la forme :

$$\phi(z) = e^{i\theta}\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad \mid a \mid< 1, \ \ \theta \in \mathbb{R}.$$

2- Si Ω est connexe, simplement connexe et propre alors les automorphismes sont de la forme :

$$g(z) = \Psi^{-1}\big(e^{i\theta}\frac{\Psi(z) - a}{1 - \bar{a}\Psi(z)}\big).$$

Il suffit de se ramener au disque par composition par $\Psi : \Omega \to D$ biholomorphe.

3- $P_+ = \{z \in \mathbb{C} \ : \ Im(z) > 0\}$ (cas 2-)

$$\Psi(z) = (i - z)/(i + z)$$

et les automorphismes de P_+ sont de la forme

$$\phi(z) = (az + b)/(cz + d), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \ \ ad - bc > 0.$$

4- $Aut(\mathbb{C}) = \{z \to az + b\}$

En effet, si $\phi \in Aut(\mathbb{C})$ alors $\phi(1/z)$ admet une singularité qui ne peut être ni essentielle ni un pôle d'ordre strictement plus grand que 1 (sinon $\phi(1/z)$ n'est pas injective) donc $\phi(1/z) - a/z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et borné : c'est une constante (Liouville).

5- $Aut(D(0,1)/\{0\}) = \{z \to ze^{i\theta}\}$

6- pour une couronne $C_1 = D(0, r_1, r_2)$ et $C_2 = D(0, R_1, R_2)$: il existe une fonction biholomorphe de C_1 sur C_2 si et seulement si $r_1/r_2 = R_1/R_2$.

The END

Chapitre 12

Annexe

12.1 topologie

Définition 12.1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, on dit que $(K_n)_n$ est une suite* **exhaustive de compact** *de Ω si*
1- K_n est compact
2- $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$
3- $\bigcup_n K_n = \Omega$

Proposition 12.1.2 *Soit K un compact de Ω et K_n une suite exhaustive de compacts de Ω alors il existe n tel que $K \subset K_n$.*

Preuve En effet, $K \subset \bigcup_n \mathring{K}_{n+1}$ donc par Borel Lebesgue $K \subset \bigcup_{finie} \mathring{K}_j$ et donc il existe n tel que $K \subset \mathring{K}_n \subset K_n$. □

Proposition 12.1.3 *Tout ouvert de $\mathbb{C}$ possède une suite exhaustive de compact.*

Preuve Si $\Omega = \mathbb{C}$, c'est direct $K_n = \bar{B}(0,n)$. Sinon, on pose

$$K_n = \left\{z \quad : \quad dist(z, \mathbb{C}/\omega) \geq 1/(n+1)\right\} \bigcap \bar{B}(0,n).$$

□