
MOD 9.4. Comportement mécanique des Matériaux

Cours 5
Elasticité anisotrope.
Cas de la méso-modélisation des
matériaux composites stratifiés

Cours du 6/11/2018 - L. Blanc (laurent.blanc@ec-lyon.fr)

A. Généralités sur l'élasticité anisotrope

- **Limites de l'hypothèse d'isotropie**
- **Exemples de modèles élastiques anisotropes**
- **Limites de l'hypothèse d'homogénéité**

B. Comportement des composites stratifiés

- **Exemples de réalisations**
- **Caractéristiques d'un pli élémentaire**
- **Plaques multicouches**
- **Exemple de calcul d'une plaque stratifiée**

Limites de l'hypothèse d'isotropie

Causes de l'anisotropie

- Anisotropie due à la structure
 - Monocristaux métalliques
 - Composites à renforts fibrés
 - Matériaux naturellement fibreux
- Anisotropie consécutive à la mise en forme
 - Laminage, forgeage
 - Sols ou roches avec tassement géologique

• composite SiC/Ti

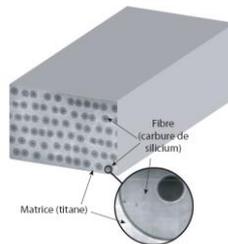


FIG. 1.6: Vue d'un pli unidirectionnel d'un composite SiC/Ti

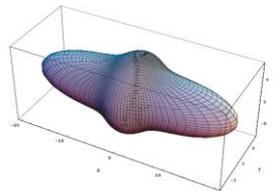
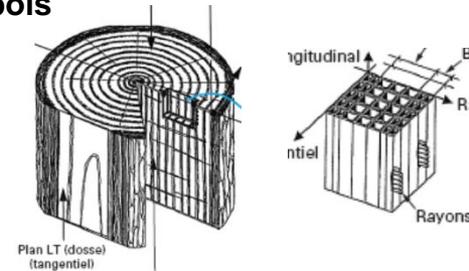
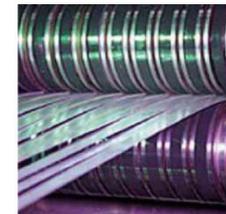
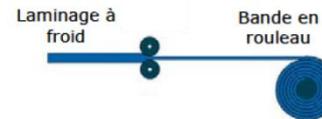


FIG. 1.7: Variation de la rigidité du SiC/Ti en fonction de la direction

• bois



• tôle laminée



• composite 4D

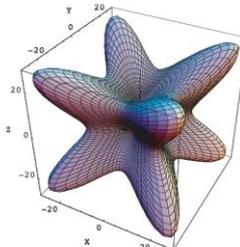


FIG. 1.5: Variation de la rigidité du 4D en fonction de la direction

A. Généralités sur l'élasticité anisotrope

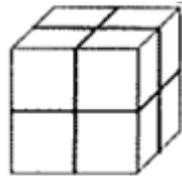
- Limites de l'hypothèse d'isotropie
- Exemples de modèles élastiques anisotropes
- Limites de l'hypothèse d'homogénéité

B. Comportement des composites stratifiés

- Exemples de réalisations
- Caractéristiques d'un pli élémentaire
- Plaques multicouches
- Exemple de calcul d'une plaque stratifiée

Exemples de modèles élastiques anisotropes

Elasticité orthotrope



3 plans de symétrie
orthogonaux

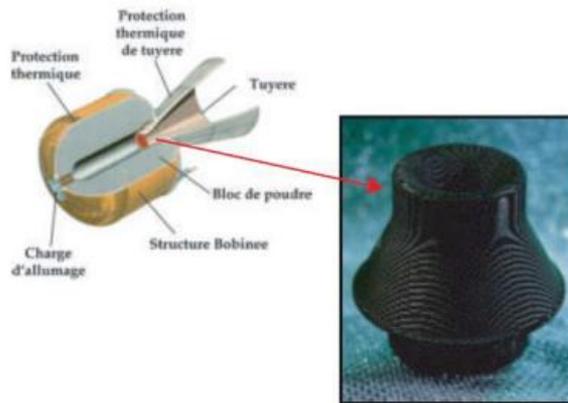


FIG. 1.3: *Vue du col de tuyère*

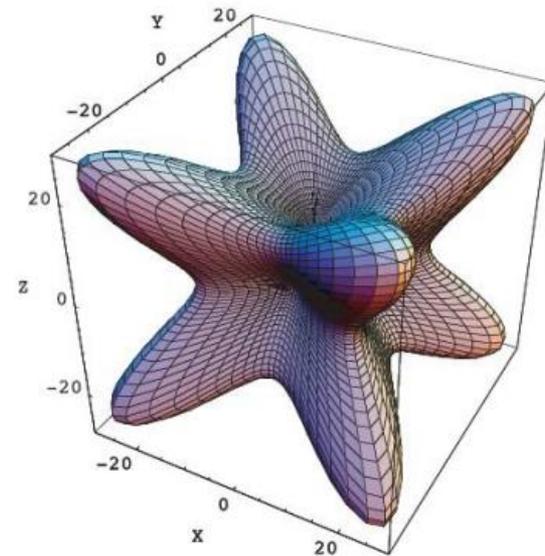
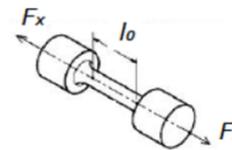
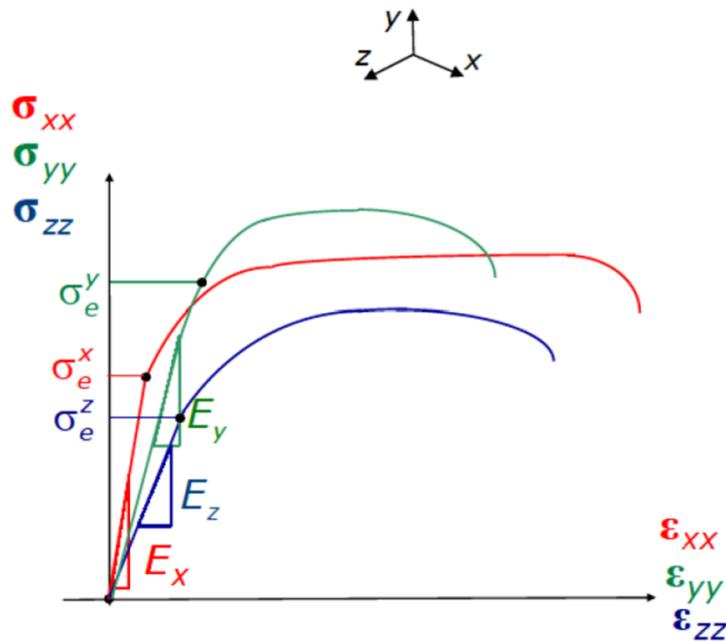


FIG. 1.5: *Variation de la raideur du 4D en fonction de la direction*

Exemples de modèles élastiques anisotropes

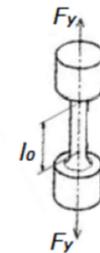
Elasticité orthotrope

- Observation expérimentale
 - Résultats d'un essai de traction simple différent suivant chaque direction d'orthotropie



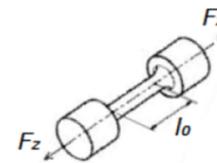
$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}_{xx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_{xz} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{xx} = E_x \underline{\underline{\epsilon}}_{xx}$$



$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}_{yy} \begin{bmatrix} -\nu_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_{yz} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{yy} = E_y \underline{\underline{\epsilon}}_{yy}$$



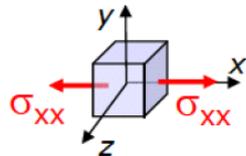
$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}_{zz} \begin{bmatrix} -\nu_{zx} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_{zy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{zz} = E_z \underline{\underline{\epsilon}}_{zz}$$

Exemples de modèles élastiques anisotropes

Elasticité orthotrope

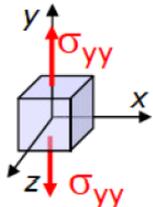
Loi de Hooke 3D



$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E_x} \sigma_{xx}$$

$$\epsilon_{yy} = -\nu_{xy} \epsilon_{xx} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x} \sigma_{xx}$$

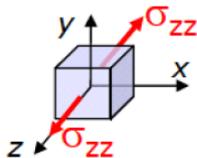
$$\epsilon_{zz} = -\nu_{xz} \epsilon_{xx} = -\frac{\nu_{xz}}{E_x} \sigma_{xx}$$



$$\epsilon_{xx} = -\nu_{yx} \epsilon_{yy} = -\frac{\nu_{yx}}{E_y} \sigma_{yy}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E_y} \sigma_{yy}$$

$$\epsilon_{zz} = -\nu_{yz} \epsilon_{yy} = -\frac{\nu_{yz}}{E_y} \sigma_{yy}$$

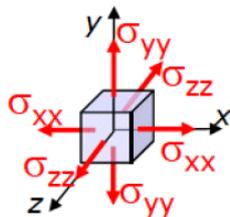


$$\epsilon_{xx} = -\nu_{zx} \epsilon_{zz} = -\frac{\nu_{zx}}{E_z} \sigma_{zz}$$

$$\epsilon_{yy} = -\nu_{zy} \epsilon_{zz} = -\frac{\nu_{zy}}{E_z} \sigma_{zz}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E_z} \sigma_{zz}$$

Par combinaison et superposition des 3 chargements



$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E_x} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{yx}}{E_y} \sigma_{yy} - \frac{\nu_{zx}}{E_z} \sigma_{zz}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E_y} \sigma_{yy} - \frac{\nu_{xy}}{E_x} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{zy}}{E_z} \sigma_{zz}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E_z} \sigma_{zz} - \frac{\nu_{xz}}{E_x} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{yz}}{E_y} \sigma_{yy}$$

Exemples de modèles élastiques anisotropes

Elasticité orthotrope

Loi de Hooke 3D

	$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{1}{G_{xy}} \sigma_{xy}$	0	0
	0	$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{1}{G_{xz}} \sigma_{xz}$	0
	0	0	$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{1}{G_{yz}} \sigma_{yz}$
<p><i>Par combinaison et superposition des 3 chargements</i></p>			
	$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{1}{G_{xy}} \sigma_{xy}$	$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{1}{G_{yz}} \sigma_{yz}$	$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{1}{G_{xz}} \sigma_{xz}$

Exemples de modèles élastiques anisotropes

Elasticité orthotrope

Loi de Hooke 3D

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_x & -\nu_{xz}/E_x & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{yx}/E_y & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_y & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{zx}/E_z & -\nu_{zy}/E_z & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix}$$

avec les conditions de symétries

$$\nu_{yx}/E_y = \nu_{xy}/E_x$$

$$\nu_{zy}/E_z = \nu_{yz}/E_y$$

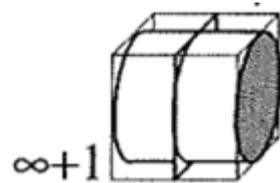
$$\nu_{zx}/E_z = \nu_{xz}/E_x$$

Matériau caractérisé par 9 coefficients indépendants

- 3 modules d'élasticité longitudinale (dans les directions de l'orthotropie) (E_x, E_y, E_z)
- 3 coefficients de contraction $(\nu_{xy}, \nu_{xz}, \nu_{yz})$
- 3 modules de cisaillement (G_{xy}, G_{xz}, G_{yz})

Exemples de modèles élastiques anisotropes

Elasticité isotrope transverse



1 plan de symétrie + une
infinité de plans de symétrie
orthogonaux au premier

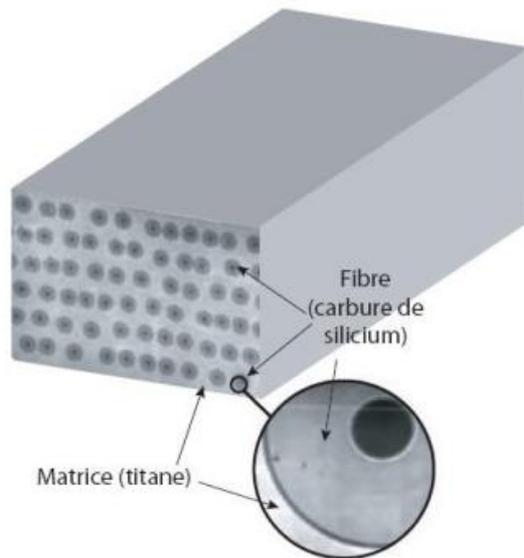


FIG. 1.6: *Vue d'un pli unidirectionnel d'un composite SiC/Ti*

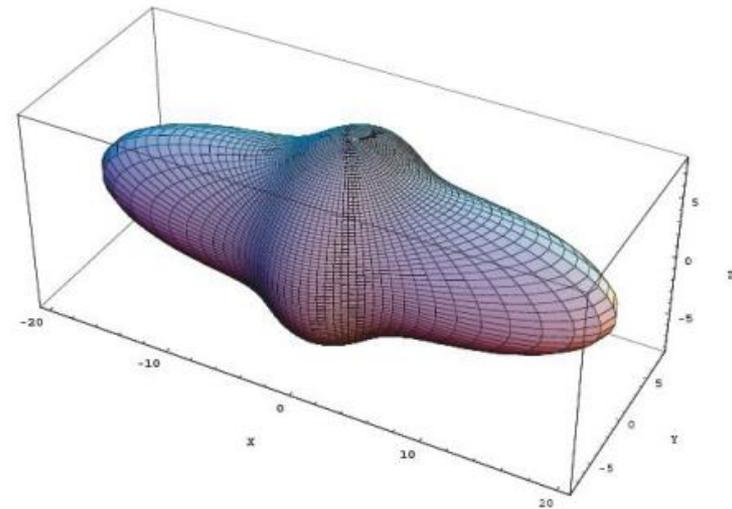


FIG. 1.7: *Variation de la raideur du SiC/Ti en fonction de la direction*

Exemples de modèles élastiques anisotropes

Elasticité isotrope transverse

Loi de Hooke 3D

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_{TT}}{E_T} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{TT}}{E_T} & \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{TT}}{E_T} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & \frac{1}{E_L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{TL}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{TT})}{E_T} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

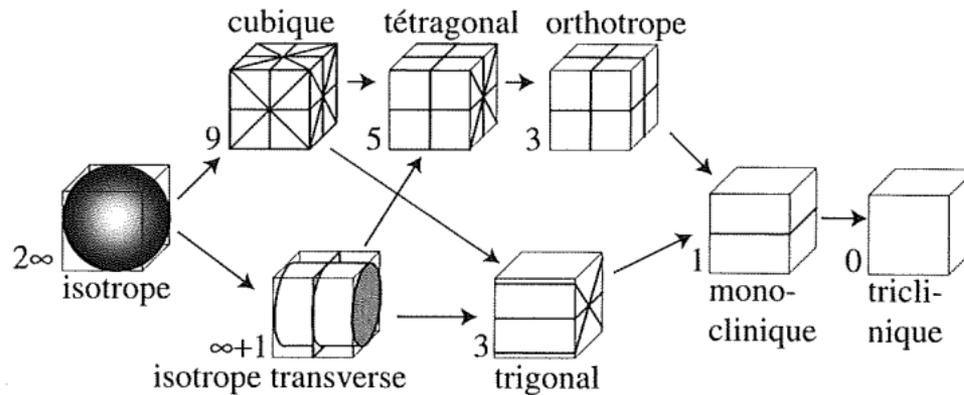
Le matériau est alors caractérisé par 5 coefficients indépendants :

- 2 modules d'Young E_T , E_L ;
- 1 module de cisaillement G_{TL} ;
- 2 coefficients de contraction ν_{TT} et ν_{TL} .

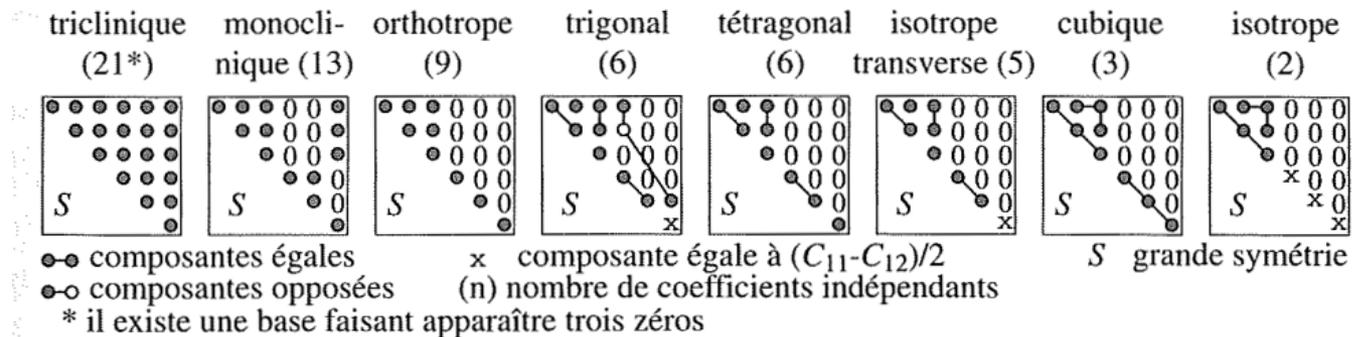
Exemples de modèles élastiques anisotropes

Classes de symétrie des tenseurs d'élasticité

- Plans de symétrie et relations d'inclusion des groupes de symétrie des tenseurs d'élasticité



- Relations entre les composantes du tenseur d'élasticité en base naturelle (écriture matricielle)



A. Généralités sur l'élasticité anisotrope

- Limites de l'hypothèse d'isotropie
- Exemples de modèles élastiques anisotropes
- Limites de l'hypothèse d'homogénéité

B. Comportement des composites stratifiés

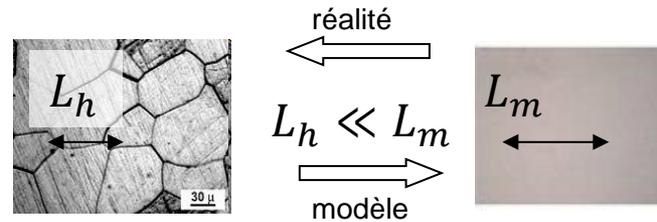
- Exemples de réalisations
- Caractéristiques d'un pli élémentaire
- Plaques multicouches
- Exemple de calcul d'une plaque stratifiée

Limites de l'hypothèse d'homogénéité

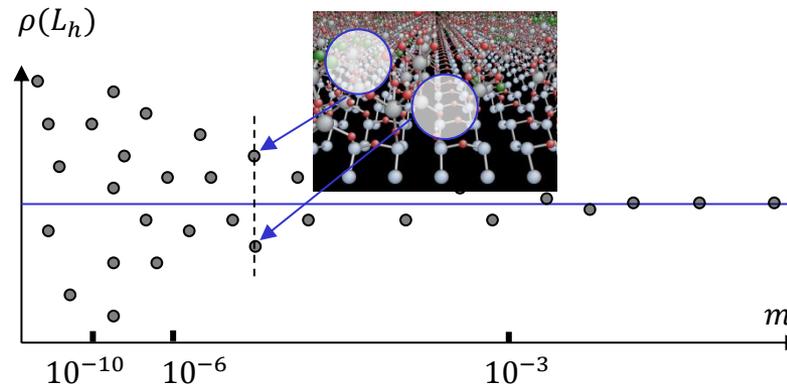
Echelle d'observation

Notion de volume élémentaire représentatif : échelle micro – échelle macro

- La MMC homogénéise une réalité plus complexe



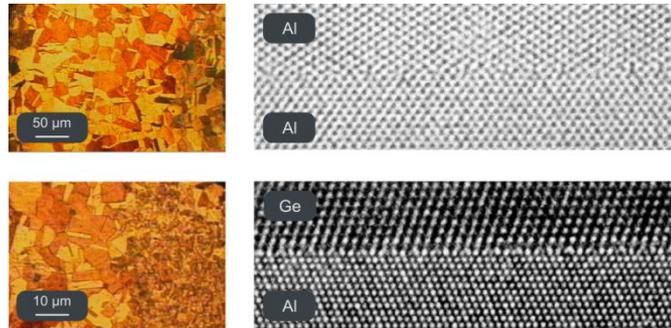
- La grandeur devient constante / position de la « loupe », il y a continuité de la grandeur
- Aux échelles inférieures, les concepts de la MMC (déformation, contrainte) n'ont plus de sens → autres théories



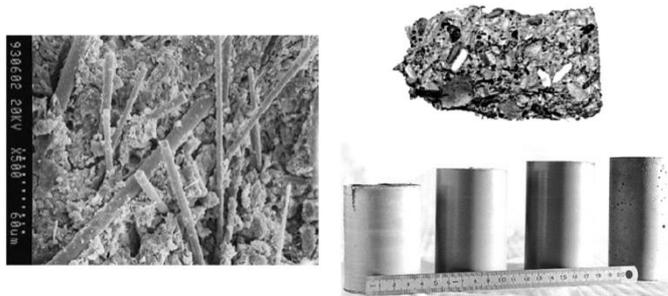
Limites de l'hypothèse d'homogénéité

Echelle d'observation

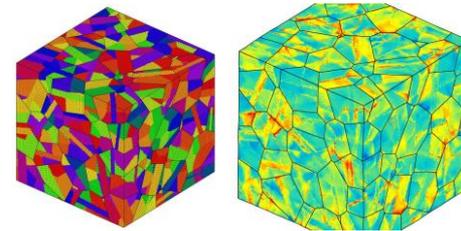
Notion de volume élémentaire représentatif : échelle micro – échelle macro



Joints de grains dans un acier inoxydable



Effets d'échelle dans un béton



Modèle polycristallin d'acier bainitique

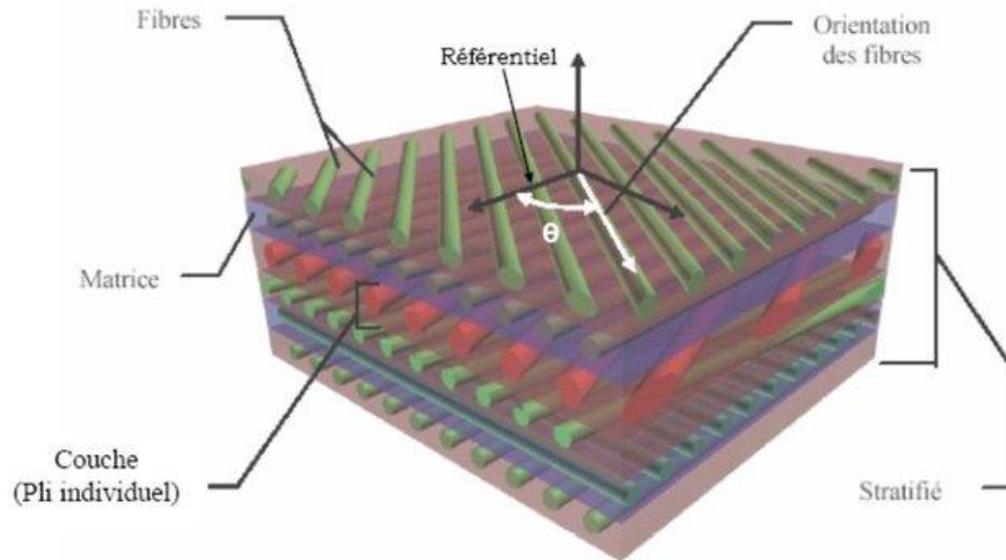
• Ordres de grandeur de la taille du VER

Matériaux	Hétérogénéités	Éléments de volume
Métaux et alliages	cristal (1 μm à 0,1 mm)	0,5 × 0,5 × 0,5 mm ³
Polymères	molécule (10 μm à 0,05 mm)	1 × 1 × 1 mm ³
Bois	fibres (0,1 à 1 mm)	1 × 1 × 1 cm ³
Béton	granulats ≈ 1 cm	10 × 10 × 10 cm ³

Limites de l'hypothèse d'homogénéité

Echelle d'observation

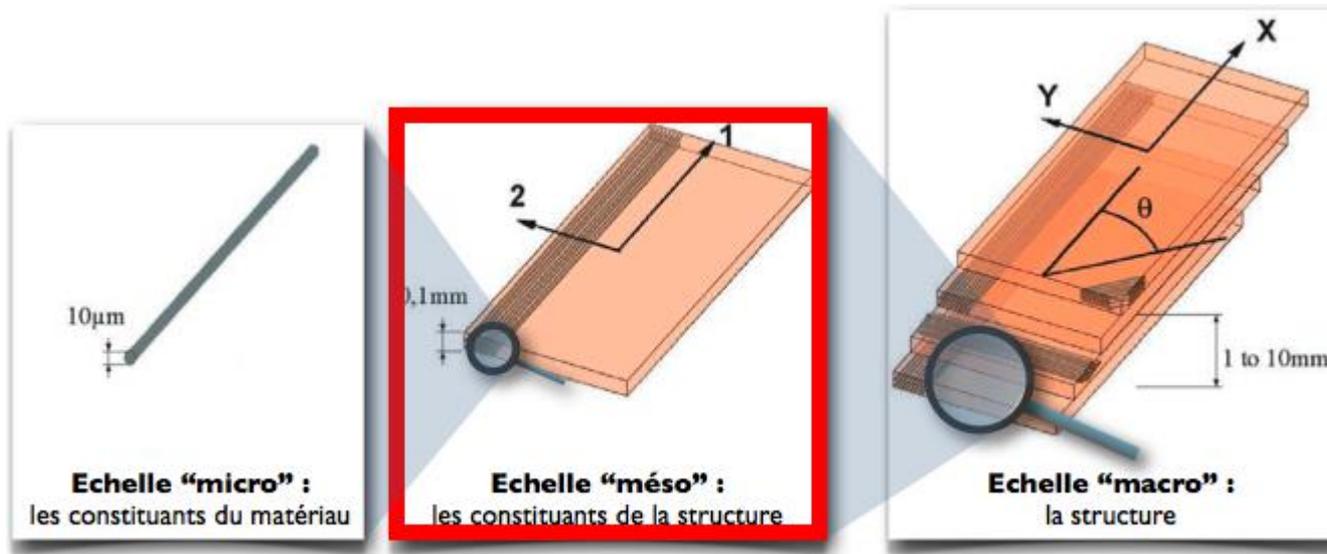
Cas des composites stratifiés. Entre structure et matériau : l'échelle mésoscopique



Limites de l'hypothèse d'homogénéité

Echelle d'observation

Cas des composites stratifiés. Entre structure et matériau : l'échelle mésoscopique



- échelle mésoscopique = celle constituants élémentaires de la structure.
- un pli = 1 couche de fibres prises dans une matrice.
- L'épaisseur d'un pli étant beaucoup plus grande que le diamètre d'une fibre, on modélise le comportement du pli à l'aide d'un modèle homogène, sans tenir compte de la présence des fibres et de la matrice (du moins aux premiers stades du dimensionnement !).

A. Généralités sur l'élasticité anisotrope

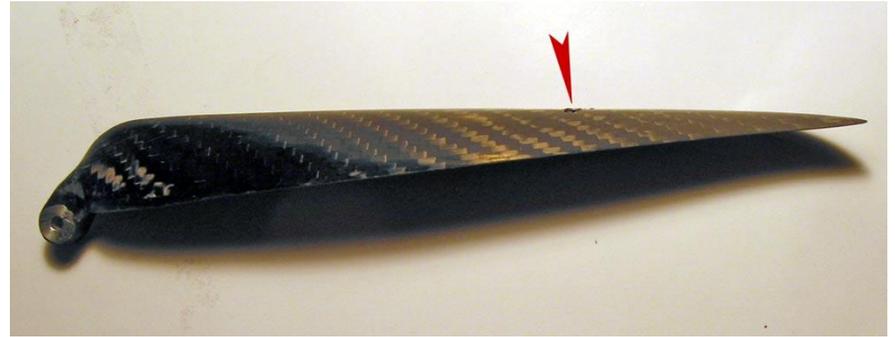
- Limites de l'hypothèse d'isotropie
- Exemples de modèles élastiques anisotropes
- Limites de l'hypothèse d'homogénéité

B. Comportement des composites stratifiés

- Exemples de réalisations
- Caractéristiques d'un pli élémentaire
- Plaques multicouches
- Exemple de calcul d'une plaque stratifiée

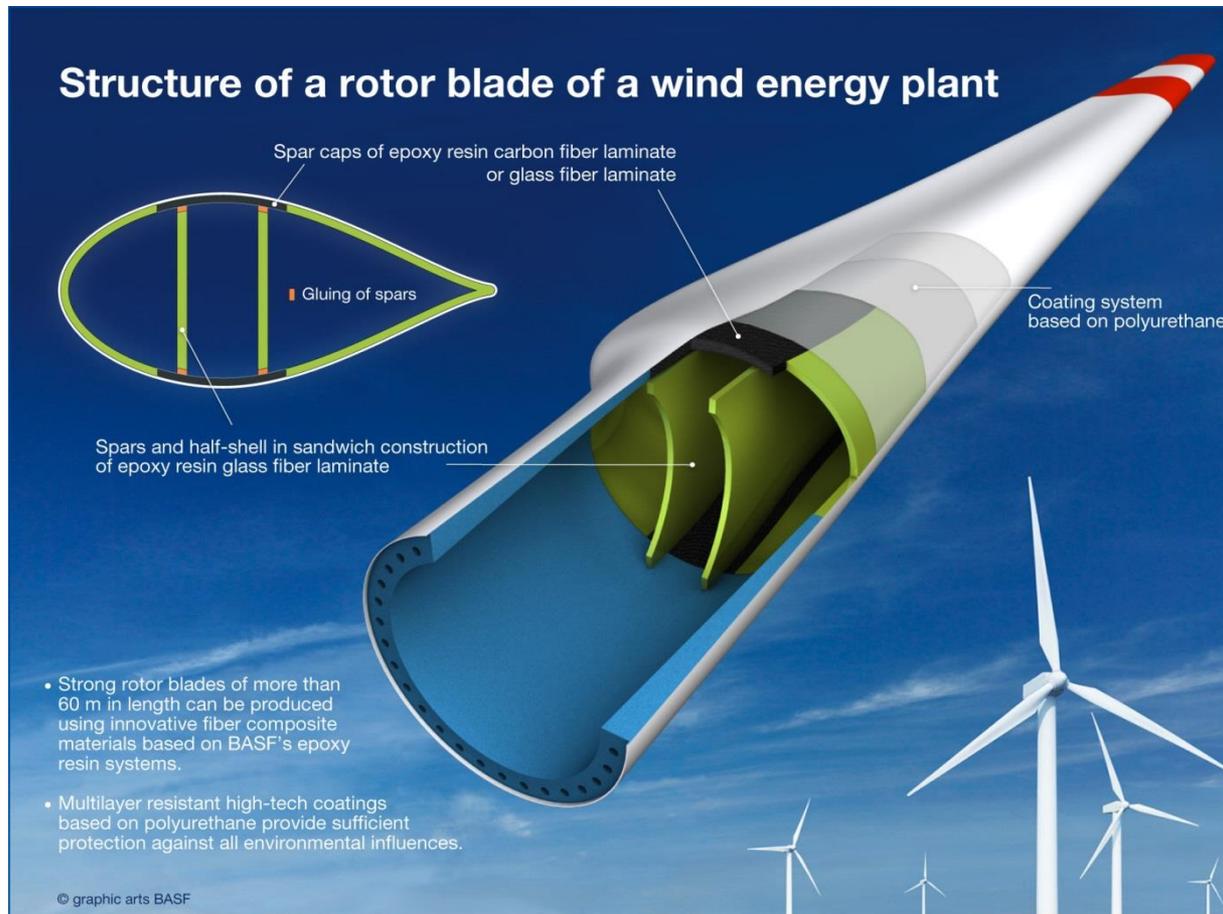
Exemples de réalisations

Définition



Exemples de réalisations

Définition



A. Généralités sur l'élasticité anisotrope

- Limites de l'hypothèse d'isotropie
- Exemples de modèles élastiques anisotropes
- Limites de l'hypothèse d'homogénéité

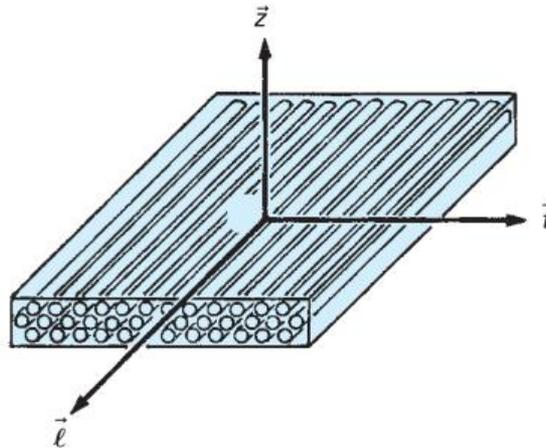
B. Comportement des composites stratifiés

- Exemples de réalisations
- **Caractéristiques d'un pli élémentaire**
- Plaques multicouches
- Exemple de calcul d'une plaque stratifiée

Caractéristiques d'un pli élémentaire

Définition

- Le pli est unidirectionnel : fibres longues // + matrice
- Le matériau est orthotrope : repère local $(0, \vec{l}, \vec{t}, \vec{z})$
- Objectifs : caractériser rigidité et résistance



Pli unidirectionnel

Caractéristiques d'un pli élémentaire

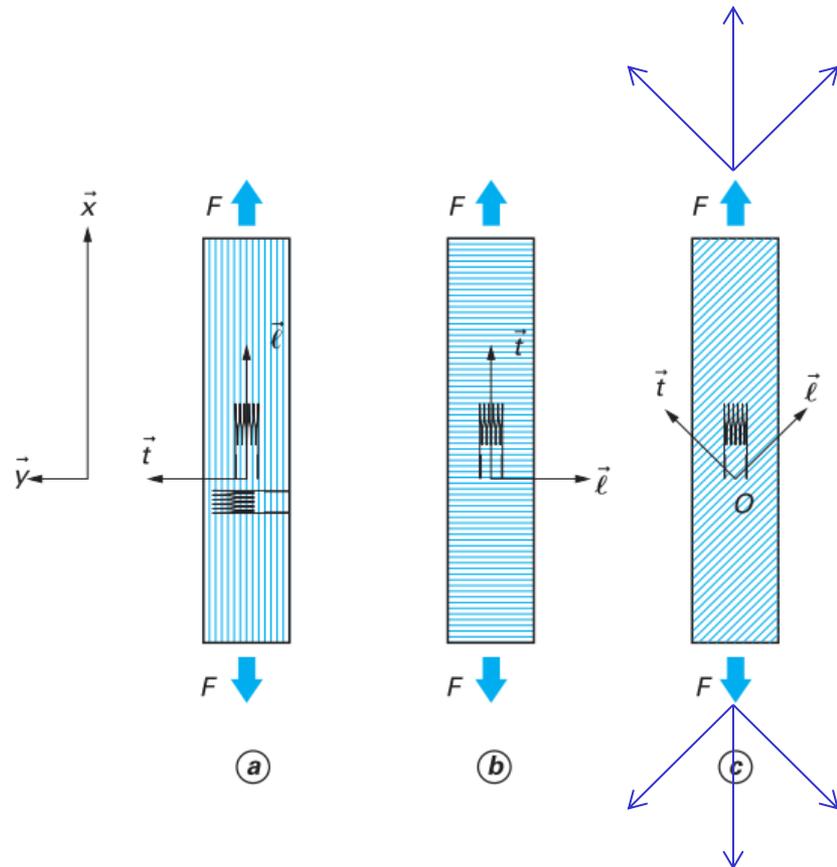
Relations contraintes – déformations

- Pour tout chargement, les déformations sont proportionnelles aux efforts : élasticité linéaire

- Les propriétés sont différentes selon les directions considérées

- Stratégie : étude MACRO du comportement dans le repère d'orthotropie

- TC longi
 - TC transverse
 - cisaillement pur longi / transverse
- puis combinaison linéaire



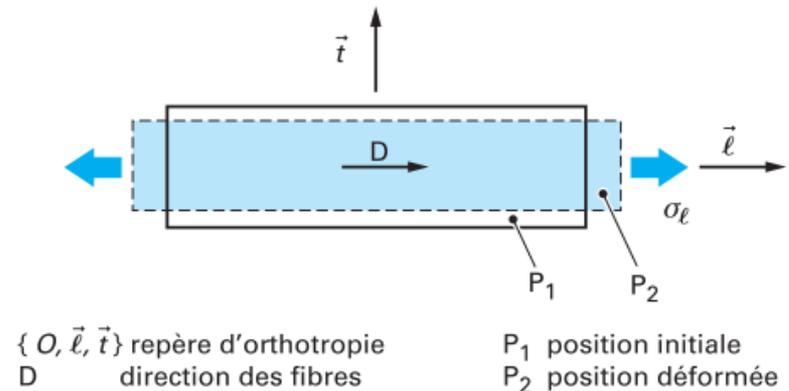
Caractéristiques d'un pli élémentaire

Relations contraintes – déformations

Traction – compression simple suivant le sens long (O, \vec{l}) puis suivant le sens travers (O, \vec{t})

$$\varepsilon_l = \left(\frac{1}{E_l} \right) \sigma_l \quad ; \quad \varepsilon_t = -\nu_{lt} \varepsilon_l = - \left(\frac{\nu_{lt}}{E_l} \right) \sigma_l$$

$$\varepsilon_t = \left(\frac{1}{E_t} \right) \sigma_t \quad ; \quad \varepsilon_l = -\nu_{t\ell} \varepsilon_t = - \left(\frac{\nu_{t\ell}}{E_t} \right) \sigma_t$$



Chargement de cisaillement pur

$$\tau_{lt} = 2 G_{lt} \varepsilon_{lt}$$

$$\tau_{lt} = G_{lt} \gamma_{lt}$$

Caractéristiques d'un pli élémentaire

Relations contraintes – déformations

Cas général (matrice de souplesse 2D du pli)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_\ell \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{\ell t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_\ell} & -\frac{\nu_{t\ell}}{E_t} & 0 \\ -\frac{\nu_{\ell t}}{E_\ell} & \frac{1}{E_t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{\ell t}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_\ell \\ \sigma_t \\ \tau_{\ell t} \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\}_{\ell t} = [S]_{\ell t} \{\sigma\}_{\ell t} \text{ avec } [S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$

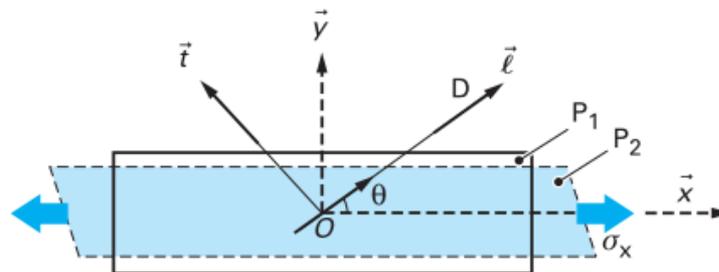
Symétrie : à cause de la symétrie des contraintes et déformations

$$\frac{\nu_{\ell t}}{E_\ell} = \frac{\nu_{t\ell}}{E_t}$$

Nombre de coeffs à déterminer : 4

$$E_\ell, E_t, G_{\ell t}, \nu_{\ell t}$$

Couplages : ces termes sont nuls dans le repère d'orthotropie, ils ne le seraient pas dans le cas général (\neq cas isotrope)



Caractéristiques d'un pli élémentaire

Relations contraintes – déformations

Cas général (matrice de raideur)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\ell \\ \sigma_t \\ \tau_{\ell t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_\ell}{1-\nu_{\ell t}\nu_{t\ell}} & \frac{\nu_{t\ell}E_\ell}{1-\nu_{\ell t}\nu_{t\ell}} & 0 \\ \frac{\nu_{\ell t}E_t}{1-\nu_{\ell t}\nu_{t\ell}} & \frac{E_t}{1-\nu_{\ell t}\nu_{t\ell}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{\ell t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_\ell \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{\ell t} \end{Bmatrix}$$

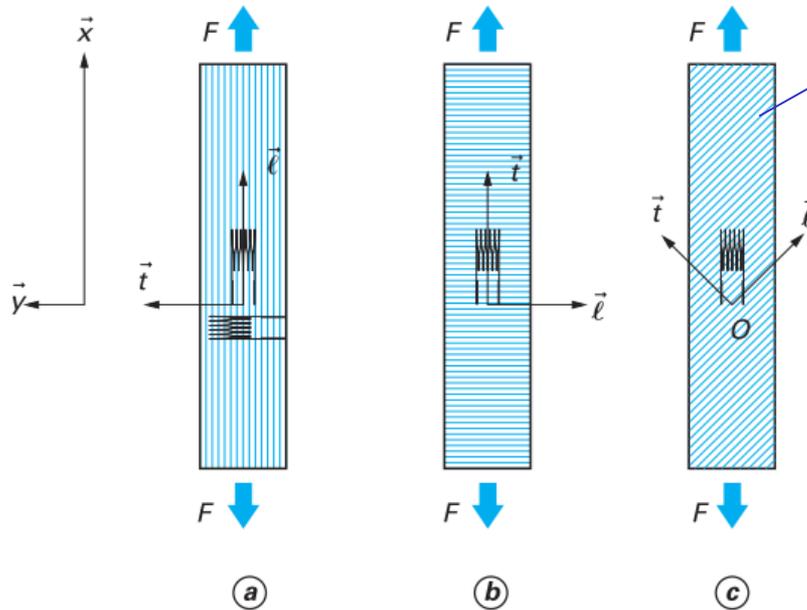
$$\begin{Bmatrix} \sigma_\ell \\ \sigma_t \\ \tau_{\ell t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha E_\ell & \alpha \nu_{t\ell} E_\ell & 0 \\ \alpha \nu_{\ell t} E_t & \alpha E_t & 0 \\ 0 & 0 & G_{\ell t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_\ell \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{\ell t} \end{Bmatrix} = [Q]_{\ell t} \begin{Bmatrix} \varepsilon_\ell \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{\ell t} \end{Bmatrix}$$

$$\alpha = \frac{1}{1-\nu_{\ell t}\nu_{t\ell}}$$

Caractéristiques d'un pli élémentaire

Relations contraintes – déformations

Détermination expérimentale des coefficients



Essais de caractérisation

$$[\sigma]_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{F}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Changement de base

$$[\sigma]_{\ell t} = \begin{bmatrix} \frac{F}{S}c^2 & \frac{F}{S}sc & 0 \\ \frac{F}{S}sc & \frac{F}{S}s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$ avec ici $\theta = 45^\circ$

$$[\varepsilon]_{\ell t} = \frac{F}{S} \begin{bmatrix} \left(\frac{c^2}{E_\ell} - \frac{\nu_{\ell t} s^2}{E_t} \right) & \frac{sc}{2G_{\ell t}} & 0 \\ \frac{sc}{2G_{\ell t}} & \left(\frac{s^2}{E_t} - \frac{\nu_{\ell t} c^2}{E_\ell} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice de souplesse

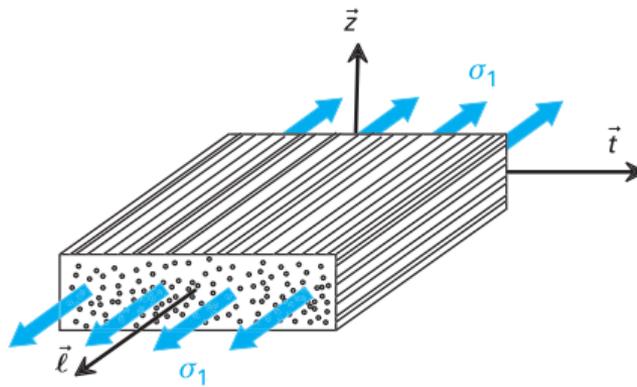
Def selon x

$$\varepsilon_x = \frac{F}{S} \left(\frac{c^4}{E_\ell} + \frac{s^4}{E_t} - 2 \frac{s^2 c^2 \nu_{\ell t}}{E_\ell} + \frac{1}{G_{\ell t}} s^2 c^2 \right)$$

Caractéristiques d'un pli élémentaire

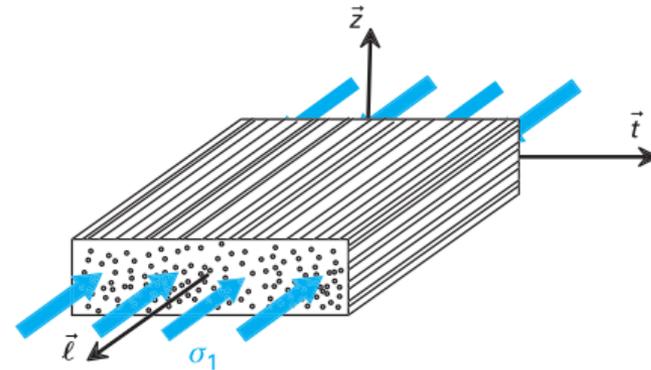
Critères de rupture du pli

Sollicitations élémentaires



(a) traction longitudinale

Comportement fragile des fibres



(b) compression longitudinale

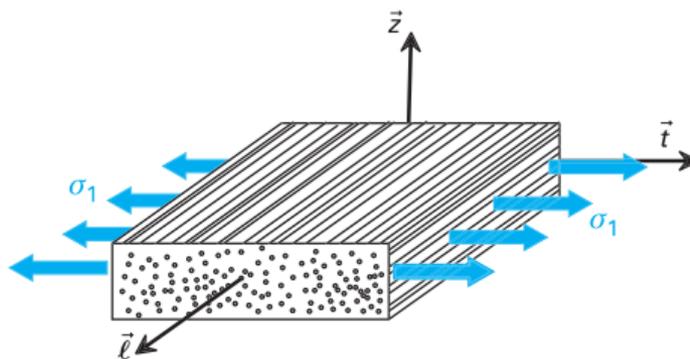
Flambement des fibres, stabilisées par la matrice

Sollicitations élémentaires d'un pli UD : traction et compression longitudinales, traction et compression transverses, et cisaillement plan

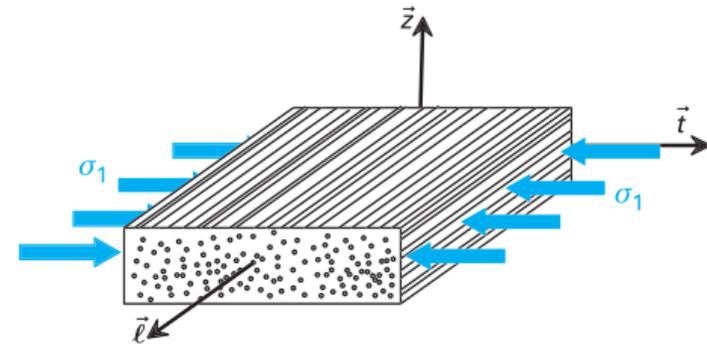
Caractéristiques d'un pli élémentaire

Critères de rupture du pli

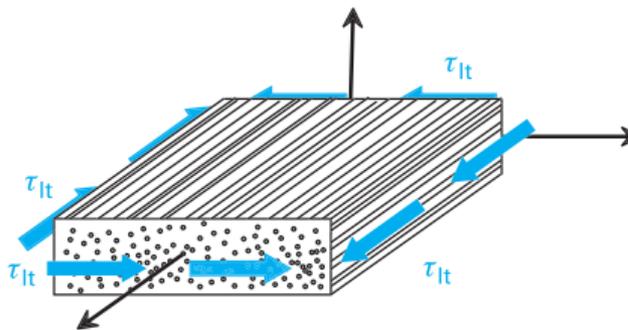
Sollicitations élémentaires



(c) traction transverse



(d) compression transverse



(e) cisaillement plan

Le matériau le plus faible (la matrice) gouverne la résistance. Les concentrations de contraintes aux interfaces fibres – matrices minorent la résistance

Sollicitations élémentaires d'un pli UD : traction et compression longitudinales, traction et compression transverses, et cisaillement plan

Caractéristiques d'un pli élémentaire

Critères de rupture du pli

Sollicitations élémentaires

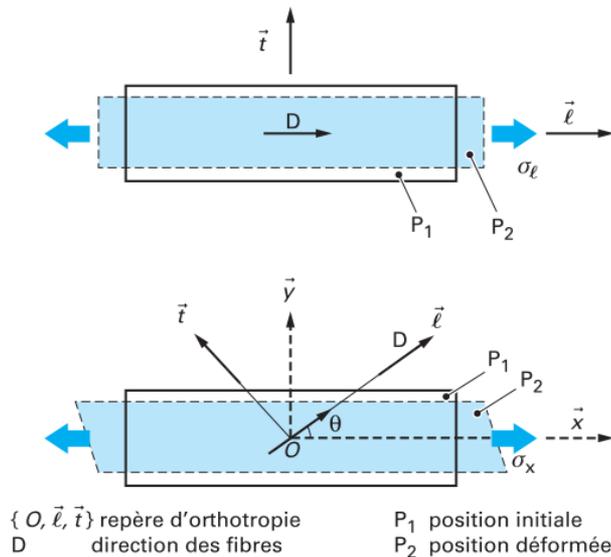
Matériau	Carbone			Verre			Kevlar 49/époxy	Bore/époxy
	UD IM IM7/époxy	UD HM M50/époxy	Tissu taffetas M20/époxy	UD E/époxy	UD R/époxy	Tissu satin R/époxy		
Module								
E_ℓ (GPa)	160	225	65	45	52	26	72	200
E_t (GPa)	10	7	65	12	13,8	26	5,5	18,5
$G_{\ell t}$ (GPa)	4,6	4,5	4,2	4,4	4,5	4,2	2,1	5,59
ν_{xy}	0,34	0,3	0,03	0,25	0,25	0,03	0,34	0,23
Fraction volumique de fibres..... (%)	60	60	52	60	60	60	60	60
Densité	1,58	1,66	1,54	2	2	2	1,38	2
Résistance								
σ_ℓ^t (MPa)	2 900	1 080	870	1 030	1 380	500	1 380	1 300
σ_ℓ^c (MPa)	- 1 800	- 830	- 840	- 550	- 660	- 350	- 280	- 2 500
σ_t^t (MPa)	60	45	850	41	41	500	41	61
σ_t^c (MPa)	- 250	- 250	- 800	- 138	- 138	- 350	- 138	- 202
$\tau_{\ell t}^r$ (MPa)	110	60	100	55	55	70	55	67

Caractéristiques mécaniques de quelques matériaux composites

Caractéristiques d'un pli élémentaire

Critères de rupture du pli

Sollicitation complexe – Lien essais en repère d'orthotropie / chargement quelconque



$$[\sigma]_{xy} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec $\sigma_x = F/S$ contrainte appliquée,
 F force exercée,
 S section de l'éprouvette.

$$\{\sigma\}_{xy} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ soit } \{\sigma\}_{lt} = \begin{bmatrix} c^2 \sigma_x \\ s^2 \sigma_x \\ sc \sigma_x \end{bmatrix}$$

Caractéristiques d'un pli élémentaire

Critères de rupture du pli

Sollicitation complexe

- de la contrainte maximale

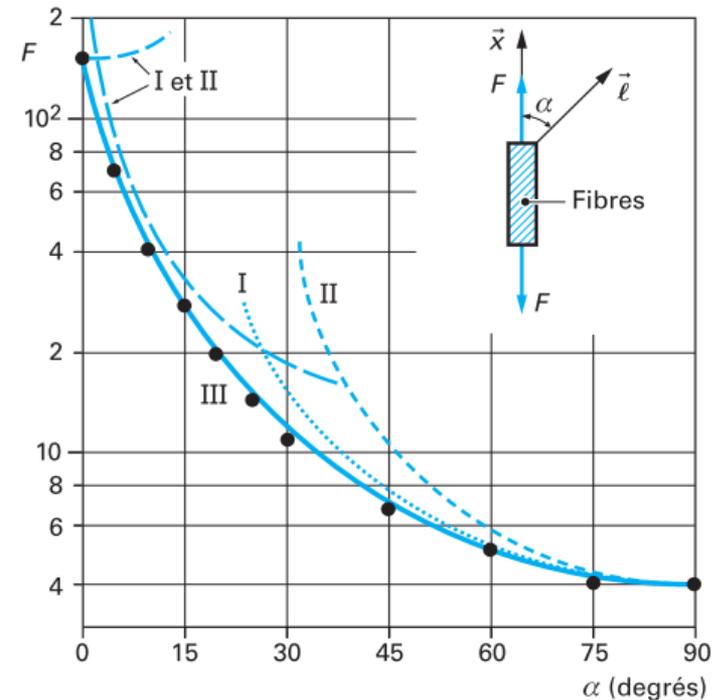
$$\begin{cases} \sigma_{\ell}^c \leq \sigma_{\ell} \leq \sigma_{\ell}^t \\ \sigma_{\ell}^c \leq \sigma_t \leq \sigma_t^t \\ |\tau_{\ell t}| \leq \tau_{\ell t}^r \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \sigma_{\ell}^c \leq 0 \\ \sigma_t^c \leq 0 \end{cases}$$

- pas conservatif !
- influence forte du désalignement

- de Tsai-Hill

$$\left(\frac{\sigma_{\ell}}{\sigma_{\ell}^{\pm}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_t^{\pm}}\right)^2 - \frac{\sigma_{\ell}\sigma_t}{(\sigma_{\ell}^{\pm})^2} + \left(\frac{\sigma_{\ell t}}{\tau_{\ell t}^r}\right)^2 \leq 1$$

- analogue à Von Mises (retire la partie hydrostatique)
- bonne concordance en 1D
- sous estime l'effet positif de la compression transverse en 2D



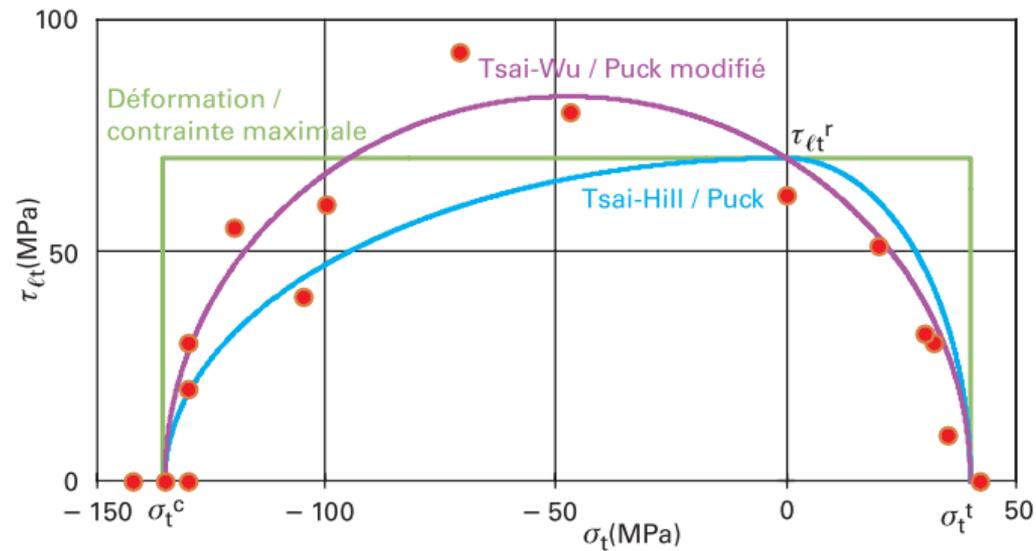
- points expérimentaux
- I critère de la contrainte maximale
- II critère de la déformation maximale
- III critère de Hill

Comparaison de critères de rupture pour une éprouvette en traction

Caractéristiques d'un pli élémentaire

Critères de rupture du pli

Sollicitation complexe



Comparaison de différents critères de rupture sous sollicitation biaxiale

A. Généralités sur l'élasticité anisotrope

- Limites de l'hypothèse d'isotropie
- Exemples de modèles élastiques anisotropes
- Limites de l'hypothèse d'homogénéité

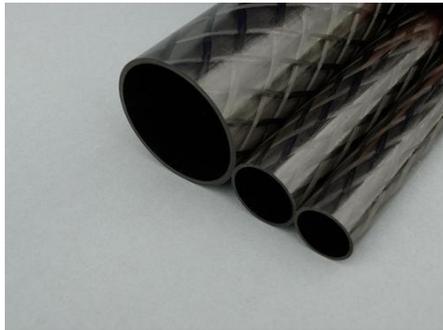
B. Comportement des composites stratifiés

- Exemples de réalisations
- Caractéristiques d'un pli élémentaire
- **Plaques multicouches**
- Exemple de calcul d'une plaque stratifiée

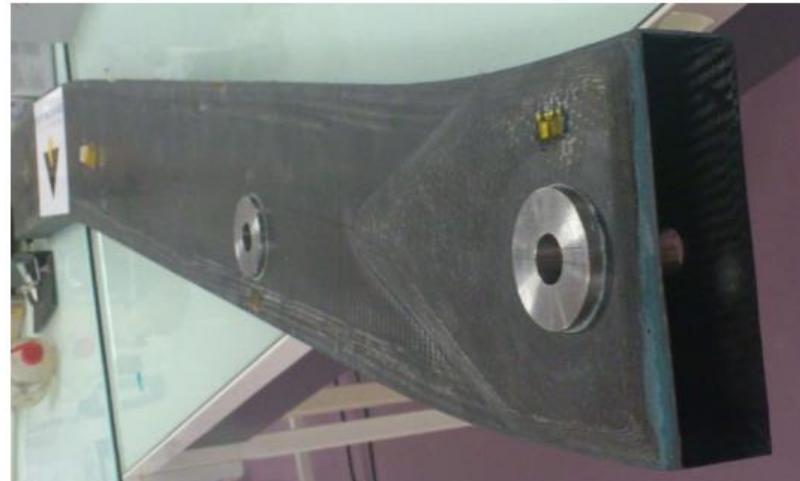
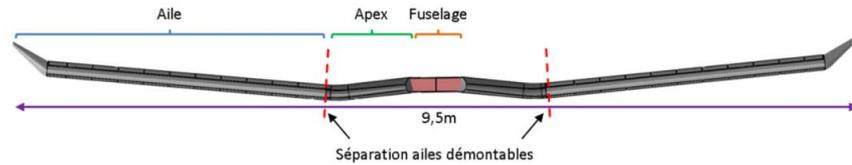
Plaques multicouches

Présentation

Structures minces



***Tubes en fibres
de carbone***



***Longeron pour aile
d'avion de voltige***

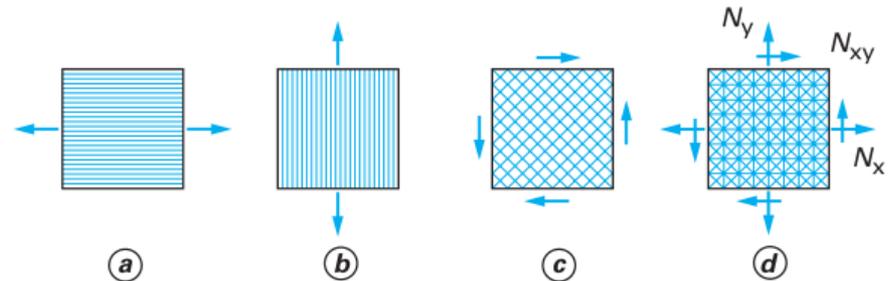
Plaques multicouches

Présentation

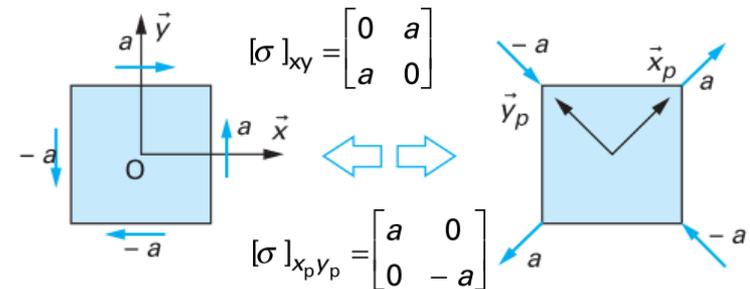
Orientation des fibres

- La + grande résistance est dans le sens des fibres : nécessité de disposer des fibres suivant plusieurs orientations

- La contrainte de cisaillement équivaut à des traction – compression dans le repère principal -> des fibres doivent être orientées selon ces directions !



Orientation optimale des plis en fonction des flux extérieurs



Équivalence cisaillement-traction compression

Plaques multicouches

Présentation

Stratégie pour définir l'orientation des couches

- Première approximation, en supposant qu'il n'y a pas d'interaction entre les couches
- En proportion des flux d'efforts à encaisser (= contrainte moyenne x épaisseur)

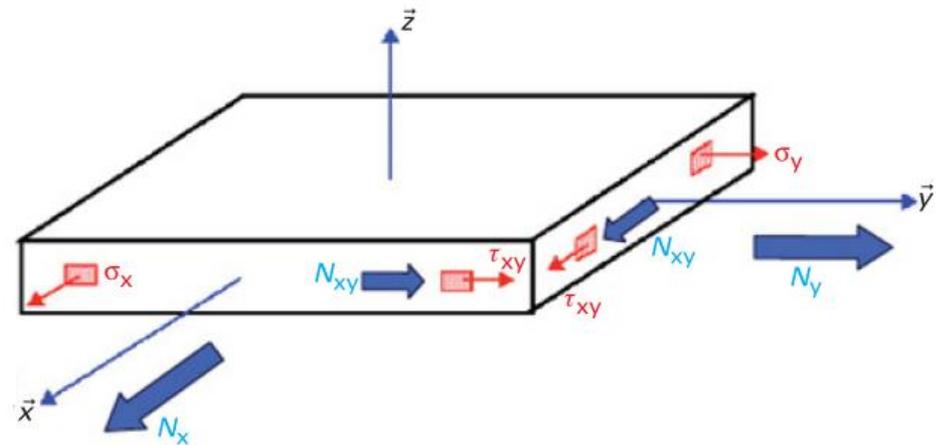
$$N_x = \sigma_x h ; N_y = \sigma_y h ; T = \tau_{xy} h$$

P_1 % de plis à 0°

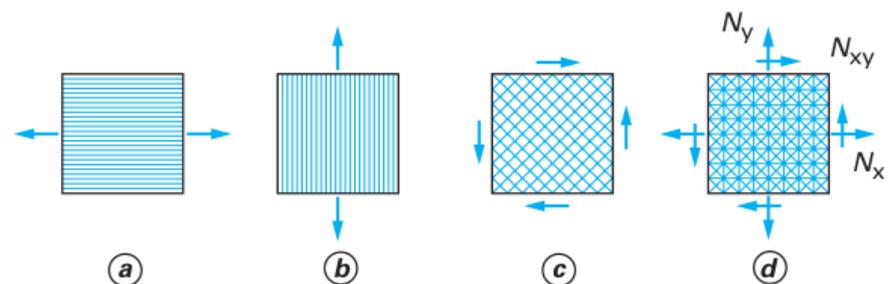
P_2 % de plis à 90° , avec P_2 % = P_1 % $\times N_y / N_x$

P_3 % de plis à 45° , avec P_3 % à -45° avec P_3 % = P_1 % $\times N_{xy} / N_x$

- La seule inconnue reste l'épaisseur h !



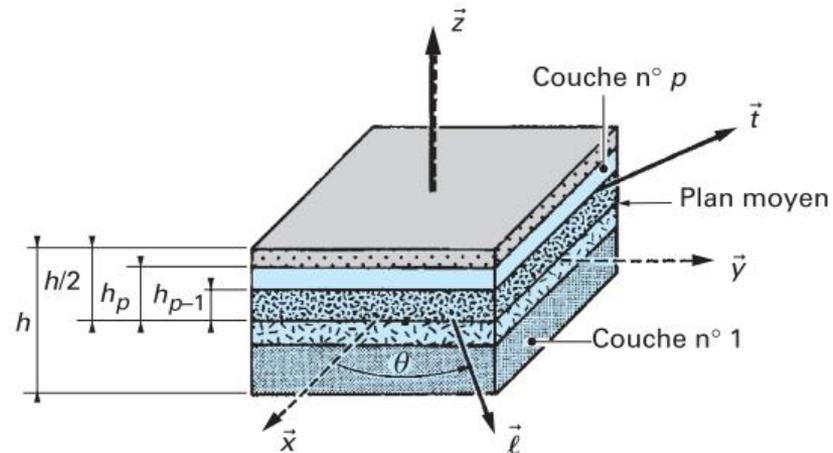
Flux d'efforts globaux



Plaques multicouches

Présentation

Définition d'une plaque stratifiée



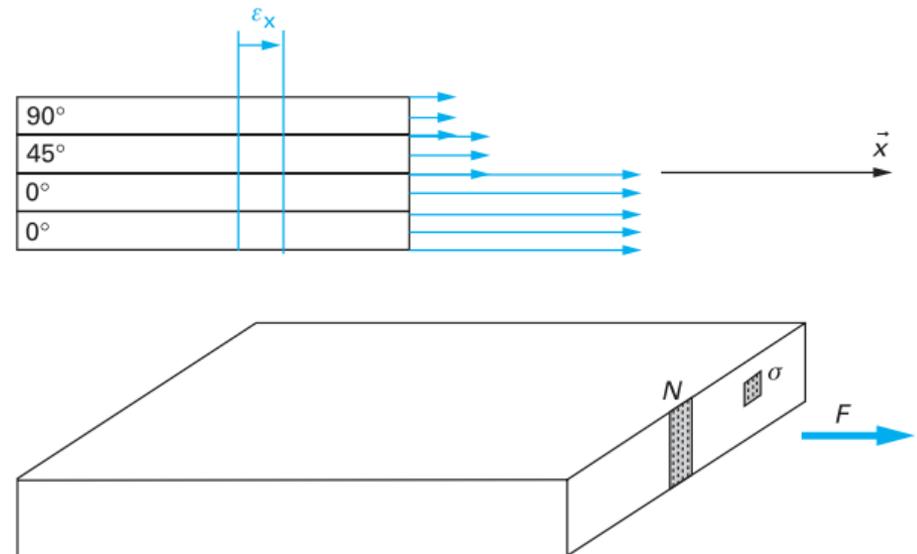
Plaque multicouche

Plaques multicouches

Flux d'efforts

Le concept

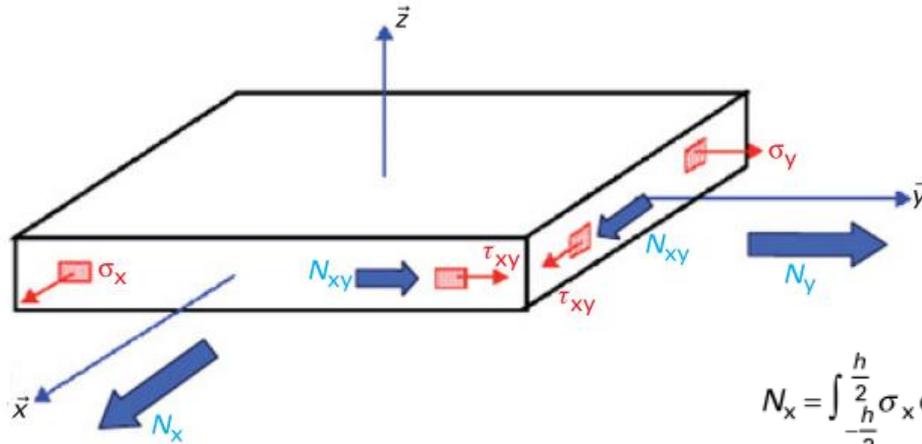
- Pourquoi raisonner en « flux d'efforts » ?
- L'hypothèse est celle d'un déplacement plan (= de membrane) : les contraintes sont continues par morceaux
- On intègre ces contraintes dans l'épaisseur pour obtenir un flux d'efforts (en N/mm)



Plaques multicouches

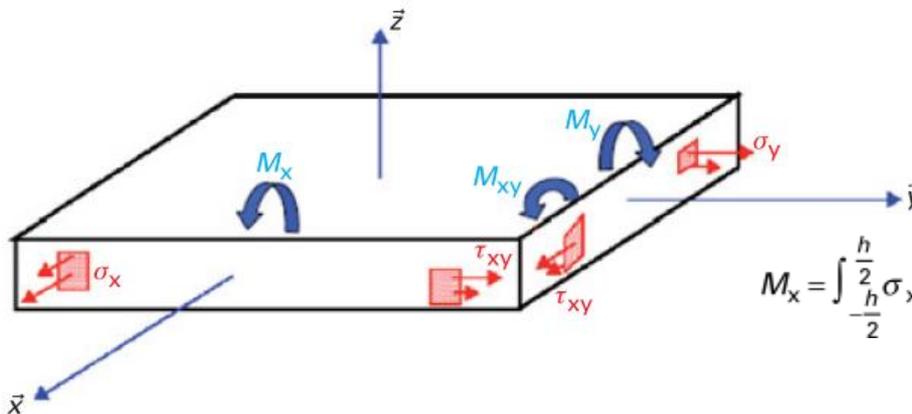
Flux d'efforts

Flux de membrane et flux de moments



$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \quad ; \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz \quad ; \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz$$

Flux d'efforts de membrane



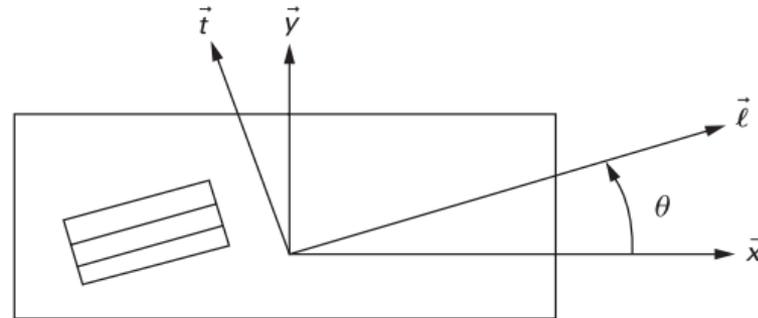
$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \quad ; \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \quad ; \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz$$

Flux de moments

Plaques multicouches

Loi de comportement du pli dans le repère du stratifié

- Le repère d'orthotropie n'est en général pas celui de la plaque...
- Pour calculer le flux les contraintes dans les différentes couches doivent être exprimées dans le même repère



- Stratégie : changer le repère des contraintes et des déformations, identifier la nouvelle RC

Changement de repère

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_\ell \\ \sigma_t \\ \tau_{\ell t} \end{Bmatrix} \quad \text{et on peut poser} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [P_\sigma] \begin{Bmatrix} \sigma_\ell \\ \sigma_t \\ \tau_{\ell t} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_\ell \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{\ell t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & cs & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{et on peut poser} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_\ell \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{\ell t} \end{Bmatrix} = [P_\varepsilon] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Plaques multicouches

Loi de comportement du pli dans le repère du stratifié

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [P_\sigma] \begin{bmatrix} \alpha E_\ell & \alpha \nu_{\ell t} E_\ell & 0 \\ \alpha \nu_{\ell t} E_t & \alpha E_t & 0 \\ 0 & 0 & G_{\ell t} \end{bmatrix} [P_\epsilon] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$[Q]_{xy} = [P_\sigma] \begin{bmatrix} \alpha E_\ell & \alpha \nu_{\ell t} E_\ell & 0 \\ \alpha \nu_{\ell t} E_t & \alpha E_t & 0 \\ 0 & 0 & G_{\ell t} \end{bmatrix} [P_\epsilon]$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{33} \\ Q_{13} \\ Q_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & s^4 & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 \\ s^4 & c^4 & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 \\ s^2c^2 & s^2c^2 & c^4 + s^4 & -4s^2c^2 \\ s^2c^2 & s^2c^2 & -2s^2c^2 & (s^2 - c^2)^2 \\ sc^3 & -s^3c & s^3c - sc^3 & 2sc(s^2 - c^2) \\ s^3c & -sc^3 & sc^3 - s^3c & 2sc(s^2 - c^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha E_\ell \\ \alpha E_t \\ \alpha \nu_{\ell t} E_t \\ G_{\ell t} \end{Bmatrix}$$

Plaques multicouches

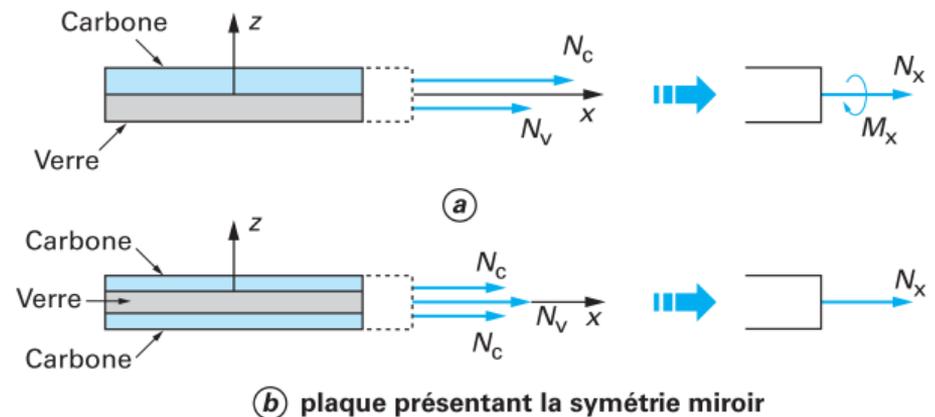
Loi de comportement des stratifiés

Analyse physique du comportement / efforts de membrane

- Soit une plaque bicouche avec 2 couches de même épaisseur :
 - on applique un effort d'allongement du plan moyen
 - la différence de rigidité fait que l'effort se répartit inégalement, d'où un moyen résultant
 - on ne peut pas allonger la plaque sans courber son plan moyen !

- Pour découpler les effets de couplage entre N et M : utiliser la symétrie miroir !

idée
conception



Exemple de couplage

Plaques multicouches

Loi de comportement des stratifiés

Analyse physique du comportement / efforts de membrane

- Calcul des efforts de membrane :

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz = \sum_{p=1}^N \int_{h_{p-1}}^{h_p} \sigma_x^p dz$$

- la plaque reste plane, donc les déformations sont les mêmes dans toutes les couches (ε_{ij}^0)

$$\sigma_x^p = Q_{11}^p \varepsilon_x^0 + Q_{12}^p \varepsilon_y^0 + Q_{13}^p \gamma_{xy}^0 \quad Q_{ij}^p \text{ raideurs du pli } p \text{ dans le repère du stratifié}$$

- la RC pour une orientation quelconque permet d'obtenir la raideur de chaque pli selon son orientation

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [P_\sigma] \begin{bmatrix} \alpha E_\ell & \alpha \nu_{\ell t} E_\ell & 0 \\ \alpha \nu_{\ell t} E_t & \alpha E_t & 0 \\ 0 & 0 & G_{\ell t} \end{bmatrix} [P_\varepsilon] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$[Q]_{xy} = [P_\sigma] \begin{bmatrix} \alpha E_\ell & \alpha \nu_{\ell t} E_\ell & 0 \\ \alpha \nu_{\ell t} E_t & \alpha E_t & 0 \\ 0 & 0 & G_{\ell t} \end{bmatrix} [P_\varepsilon]$$

- on intègre ensuite dans les différentes couches

$$N_x = \sum_{p=1}^N Q_{11}^p (h_p - h_{p-1}) \varepsilon_x^0 + \sum_{p=1}^N Q_{12}^p (h_p - h_{p-1}) \varepsilon_y^0 + \sum_{p=1}^N Q_{13}^p (h_p - h_{p-1}) \gamma_{xy}^0$$

$$N_x = A_{11} \varepsilon_x^0 + A_{12} \varepsilon_y^0 + A_{13} \gamma_{xy}^0$$

- même stratégie pour tous les efforts dans le plan

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}$$

$$A_{ij} = \sum_{p=1}^N Q_{ij}^p (h_p - h_{p-1}) = \sum_{p=1}^N Q_{ij}^p e_p$$

Plaques multicouches

Loi de comportement des stratifiés

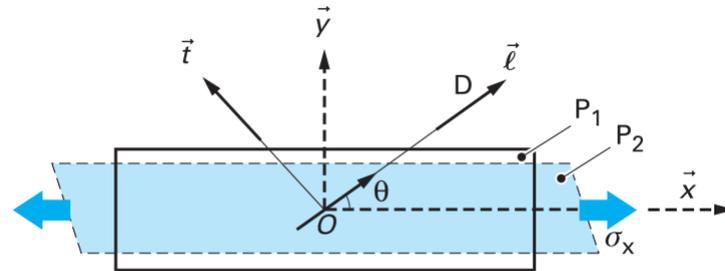
Analyse physique du comportement / efforts de membrane

• Remarques utiles à la conception :

- La matrice **A** est symétrique (héritage de **Q**), mais dans le cas général les termes de couplage A_{12} et A_{13} ne sont pas nuls ! : un effort normal génère une déformation angulaire.

- Pour éviter cela il faut une symétrie par rapport au plan **Oxy**, chaque couche orientée θ doit avoir une homologe orientée par $-\theta$

idée conception



$\{ O, \vec{\ell}, \vec{t} \}$ repère d'orthotropie
D direction des fibres

P₁ position initiale
P₂ position déformée

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}$$

$$N_x = \sum_{p=1}^N Q_{11}^p (h_p - h_{p-1}) \varepsilon_x^0 + \sum_{p=1}^N Q_{12}^p (h_p - h_{p-1}) \varepsilon_y^0 + \sum_{p=1}^N Q_{13}^p (h_p - h_{p-1}) \gamma_{xy}^0$$

$$[Q]_{xy} = [P_\sigma] \begin{bmatrix} \alpha E_\ell & \alpha \nu_{\ell t} E_\ell & 0 \\ \alpha \nu_{t\ell} E_t & \alpha E_t & 0 \\ 0 & 0 & G_{\ell t} \end{bmatrix} [P_\varepsilon]$$

Plaques multicouches

Loi de comportement des stratifiés

Analyse physique du comportement / efforts de membrane

- Remarques utiles à la conception :

- La matrice **A** peut s'écrire

$$A_{ij} = \sum_{p=1}^N Q_{ij}^p (h_p - h_{p-1}) = \sum_{p=1}^N Q_{ij}^p e_p$$

$$[A] = [Q]_{xy}^1 e_1 + \dots + [Q]_{xy}^p e_p + \dots + [Q]_{xy}^N e_N$$

- ses termes ne dépendent que

1/ des caractéristiques matériaux

2/ de l'épaisseur des couches et NON de leur position

idée
conception

Plaques multicouches

Loi de comportement des stratifiés

Analyse physique du comportement / efforts de membrane

• **Caractéristiques orthotropes équivalentes / relation de comportement homogénéisée :**

- dans le cas sans couplage plan (A_{12} et A_{13} nuls), la plaque est orthotrope !

- on définit des modules équivalents utiles pour avoir des ordres de grandeur du comportement global, renseigner un code EF etc

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x^m = N_x/h \\ \sigma_y^m = N_y/h \\ \tau_{xy}^m = N_{xy}/h \end{Bmatrix}$$

$$E_1 = \frac{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}{h A_{22}} ; E_2 = \frac{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}{h A_{11}} ;$$

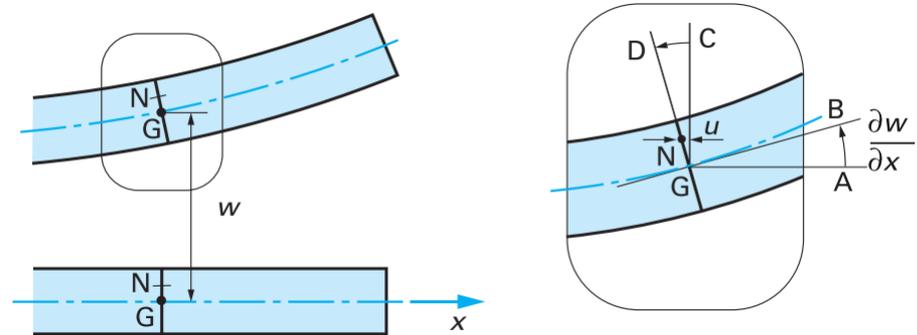
$$G_{12} = \frac{A_{33}}{h} ; \nu_{12} = \frac{A_{12}}{A_{22}} ; \nu_{21} = \frac{A_{12}}{A_{11}}$$

Plaques multicouches

Loi de comportement des stratifiés

Analyse physique du comportement / efforts de flexion

- L'hypothèse de Kirchhoff-Love : permet de lier les déplacements du plan moyen aux efforts exercés dans la section
 - analogue d'Euler – Bernoulli pour les poutres
 - la cinématique locale est décrite par les courbures



Déplacement d'un point N de la plaque sous l'hypothèse de Kirchhoff-Love

$$u = -z \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right); v = -z \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}; \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}; \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}; \kappa_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}; \kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

Plaques multicouches

Loi de comportement des stratifiés

Analyse physique du comportement / efforts de flexion

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \quad ; \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \quad ; \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz$$

- Calcul des moments dans la section : par intégration des contraintes x distance au plan moyen

- les termes cubiques proviennent de l'intégration des z^2 ,

- on peut les approcher en faisant intervenir l'épaisseur moyenne de la couche p , Z_p .

$$\int_{h_{p-1}}^{h_p} z^2 dz \approx (Z_p)^2 e_p$$

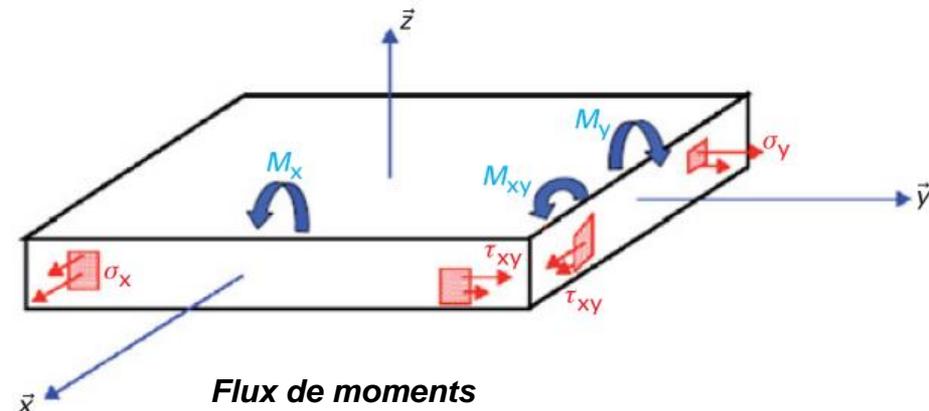
- I_p désigne l'inertie de la couche p .

$$I_p = \frac{1}{3} (h_p^3 - h_{p-1}^3) \approx (Z_p)^2 e_p$$

$$[C] = [Q]_{xy}^1 I_1 + \dots + [Q]_{xy}^p I_p + \dots + [Q]_{xy}^N I_N$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$C_{ij} = \sum_{p=1}^N Q_{ij}^p \left(\frac{h_p^3 - h_{p-1}^3}{3} \right)$$



Plaques multicouches

Loi de comportement des stratifiés

Analyse physique du comportement / efforts de flexion

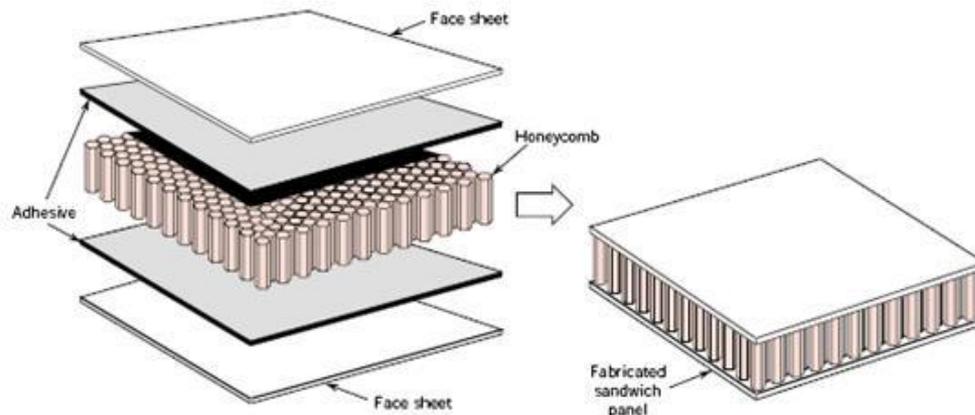
- Pour avoir une bonne rigidité de flexion, on peut jouer sur :
 - l'épaisseur des couches
 - les matériaux
 - la position des couches / plan moyen

idées
conception

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$[C] = [Q]_{xy}^1 I_1 + \dots + [Q]_{xy}^p I_p + \dots + [Q]_{xy}^N I_N$$

$$I_p = \frac{1}{3} (h_p^3 - h_{p-1}^3) \approx (Z_p)^2 e_p$$



Plaques multicouches

Loi de comportement des stratifiés

Plaque quelconque

- On ne peut plus découpler les effets de membrane de ceux de flexion...

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{12} & B_{12} & B_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ A_{13} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

A. Généralités sur l'élasticité anisotrope

- Limites de l'hypothèse d'isotropie
- Exemples de modèles élastiques anisotropes
- Limites de l'hypothèse d'homogénéité

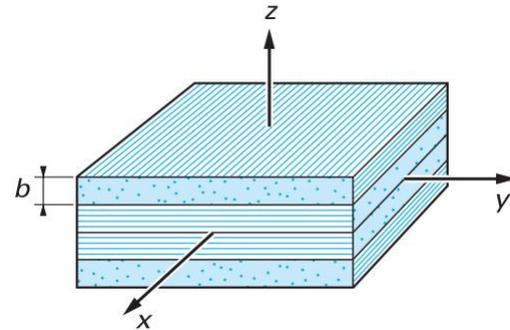
B. Comportement des composites stratifiés

- Exemples de réalisations
- Caractéristiques d'un pli élémentaire
- Plaques multicouches
- Exemple de calcul d'une plaque stratifiée

Exemple de calcul d'une plaque stratifiée

Position du problème

- Une plaque est constituée de 4 couches UD carbone – époxy d'épaisseur b , orientées 0-90°
- On veut déterminer les contraintes et la résistance sous un effort de traction par unité de longueur donné N_x (avec $N_y = N_{xy} = 0$)



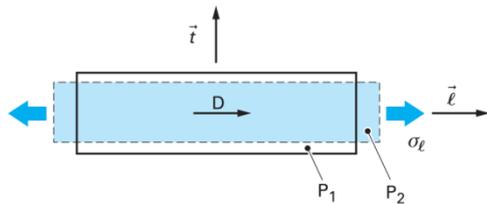
Les caractéristiques d'un pli élémentaire sont, dans le repère d'orthotropie

- rigidité : $E_\ell = 140 \text{ GPa}$; $E_t = 5 \text{ GPa}$; $\nu_{\ell t} = 0,35$; $G_{\ell t} = 5 \text{ GPa}$;
- résistance : $X_t = 1\,200 \text{ MPa}$; $X_c = -1\,000 \text{ MPa}$; $Y_t = 50 \text{ MPa}$;
 $Y_c = -120 \text{ MPa}$; $Q = 65 \text{ MPa}$;
- épaisseur : $b = 2 \text{ mm}$.

Exemple de calcul d'une plaque stratifiée

Résolution du problème

Etape 1 : pour le pli de base, calcul de la matrice de rigidité Q_{lt} dans le repère d'orthotropie



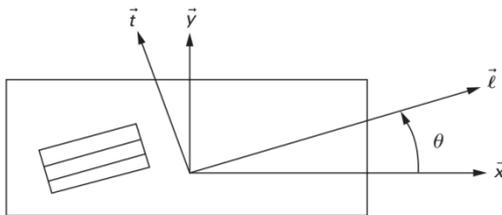
$$\frac{\nu_{lt}}{E_l} = \frac{\nu_{tl}}{E_t}$$

$$\alpha = \frac{1}{1 - \nu_{lt} \nu_{tl}}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} = [Q]_{lt} \begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix}$$

$$[Q]_{lt} = \begin{bmatrix} \alpha E_l & \alpha \nu_{tl} E_l & 0 \\ \alpha \nu_{lt} E_t & \alpha E_t & 0 \\ 0 & 0 & G_{lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140,61 & 1,76 & 0 \\ 1,76 & 5,02 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ (GPa)}$$

Etape 2 : pour chaque pli, passage de la matrice de rigidité dans le repère de la plaque



• Plis à 0° :

$$[Q^{0^\circ}]_{xy} = [Q]_{lt}$$

• Plis à 90° :

$$[Q^{90^\circ}]_{xy} = \begin{bmatrix} \alpha E_t & \alpha \nu_{tl} E_l & 0 \\ \alpha \nu_{lt} E_t & \alpha E_l & 0 \\ 0 & 0 & G_{lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,02 & 1,76 & 0 \\ 1,76 & 140,61 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ (GPa)}$$

Exemple de calcul d'une plaque stratifiée

Résolution du problème

Etape 3 : calcul de la matrice de souplesse de la plaque, A

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}$$

$$A_{ij} = \sum_{p=1}^N Q_{ij}^p (h_p - h_{p-1}) = \sum_{p=1}^N Q_{ij}^p e_p$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 2b\alpha(E_\ell + E_t) & 4b\alpha\nu_{\ell t}E_t & 0 \\ 4b\alpha\nu_{\ell t}E_t & 2b\alpha(E_\ell + E_t) & 0 \\ 0 & 0 & 4bG_{\ell t} \end{bmatrix}$$

par inversion on obtient
les déformations dans le
repère du stratifié

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = 10^{-9} \begin{bmatrix} 1,71 & -0,041 & 0 \\ -0,041 & 1,71 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}$$

Etape 4 : calcul des contraintes dans chaque pli à partir du flux d'effort global

- **Choix : une contrainte moyenne de 100 Mpa s'applique, soit un effort par unité de longueur :**

$$N_x = \sigma_x \times 4b = 800 \times 10^3 \text{ N/m}$$

$$N_y = N_{xy} = 0$$

- **Les contraintes dans chaque pli sont déduites des relations de l'étape 3 puis 2**

– Plis supérieurs et inférieurs à 0° :

$$\sigma_x = \sigma_\ell = 193,16 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \sigma_t = 2,25 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 0$$

– Plis médians à 90° :

$$\sigma_x = \sigma_t = 6,84 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \sigma_\ell = -2,25 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 0$$

Exemple de calcul d'une plaque stratifiée

Résolution du problème

Etape 5 : estimation de la résistance de chaque pli

- Le critère de Tsai-Hill est appliqué dans chaque couche :

$$\left(\frac{\sigma_{\ell}}{\sigma_{\ell}^{\pm}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{t}}{\sigma_{t}^{\pm}}\right)^2 - \frac{\sigma_{\ell}\sigma_{t}}{(\sigma_{\ell}^{\pm})^2} + \left(\frac{\sigma_{\ell t}}{\tau_{\ell t}^{\pm}}\right)^2 \leq 1$$

- Plis supérieurs et inférieurs à 0° :

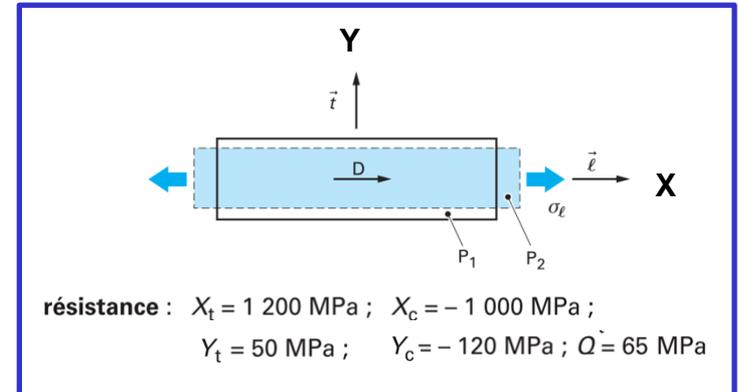
$$(193,16/1\,200)^2 + (2,25/50)^2 - (193,16 \times 2,25)/(1\,200)^2 = 0,02763 = (0,166)^2$$

- Plis médians à 90° :

$$(-2,25)^2/(1\,000)^2 + (6,84)^2/(50)^2 + (2,25 \times 6,84)/(1\,000)^2 = 0,0187 = (0,137)^2$$

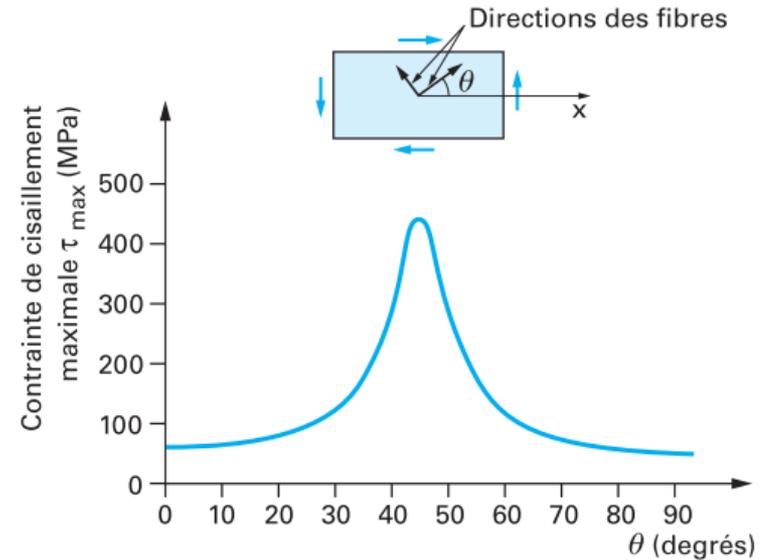
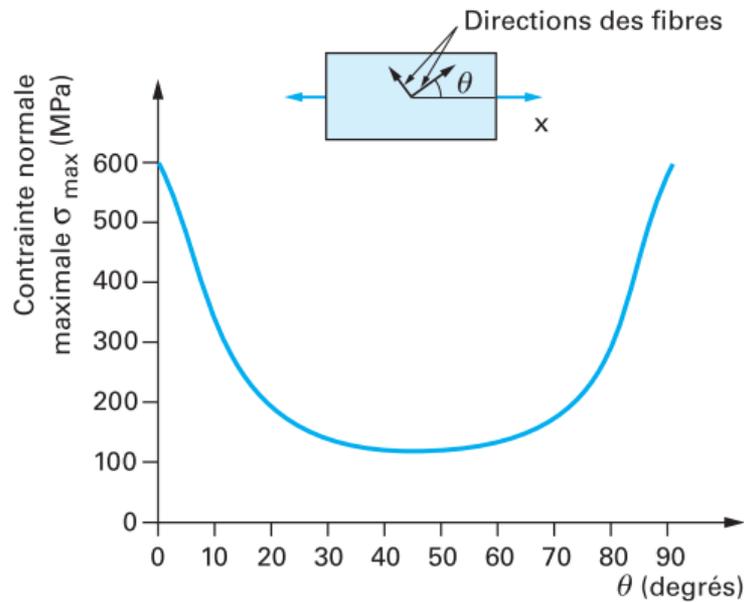
- La contrainte admissible est rescalée par rapport aux 100 Mpa de référence :

$$(\sigma_x)_{\max} = 100/0,166 = 602 \text{ MPa}$$



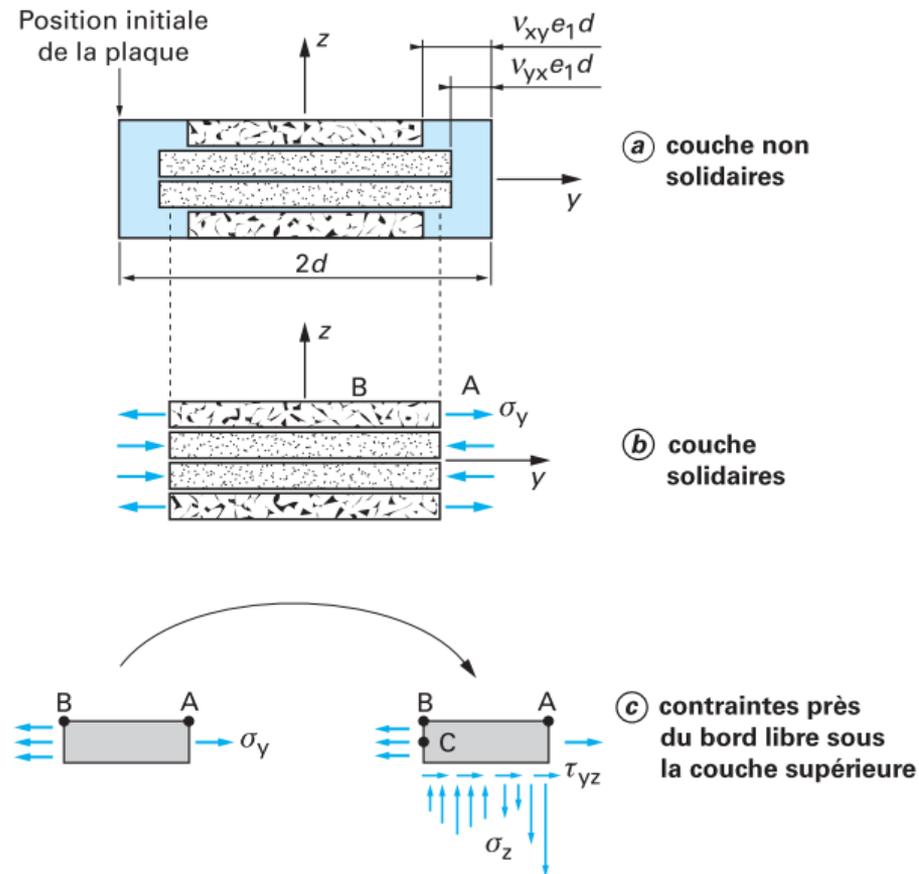
Exemple de calcul d'une plaque stratifiée

Évolution de la résistance de la plaque en fonction de l'orientation



Exemple de calcul d'une plaque stratifiée

Effet des contraintes interlaminaires



Bibliographie succincte

- Techniques de l'Ingénieur, BM5080 v2, Castanié – Bouvet – Guédra-Degeorges
- J. Lemaître, J.-L. Chaboche, A. Benallal, R. Desmorat. Mécanique des matériaux solides, 3^e ed.. Dunod 2009
- Gay (D.), Matériaux composites. Hermes/ Lavoisier (2005).
- Berthelot (J.M.), Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures. Éditions Technique et documentation (1999).
- Barbero (E. J.), Finite elements analysis of composite materials using Ansys. CRC Press