



ÉCOLE
CENTRALE LYON

MOD 9.4

Comportement Mécanique des Matériaux

La mécanique des matériaux, une science frontière



corrélation essais - calculs

Simulation

modélisation MMC + résolution numérique

Validation par l'expérimentation

essais, identification, recalage

Enjeux

Exemples de problèmes industriels

Mise en forme

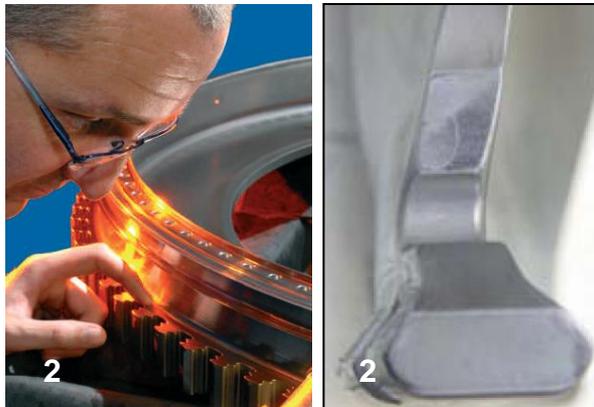
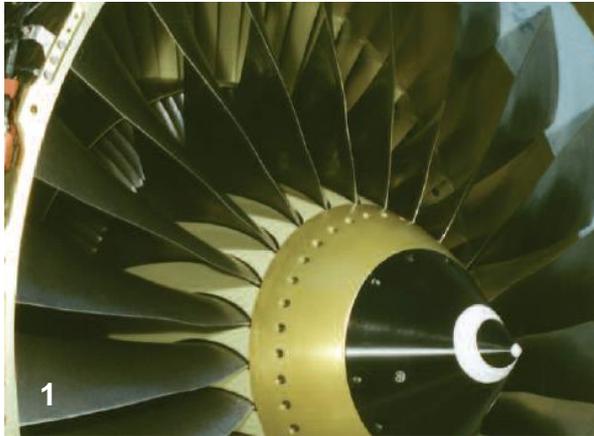


Déchirure
Grande transformation

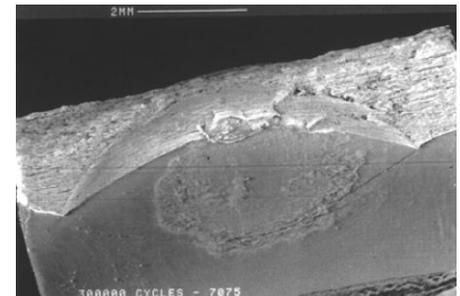
Enjeux

Exemples de problèmes industriels

Aéronautique



Fretting-wear in a blade root



Cracking due to fretting during a test

Enjeux

Exemples de problèmes industriels

Génie civil

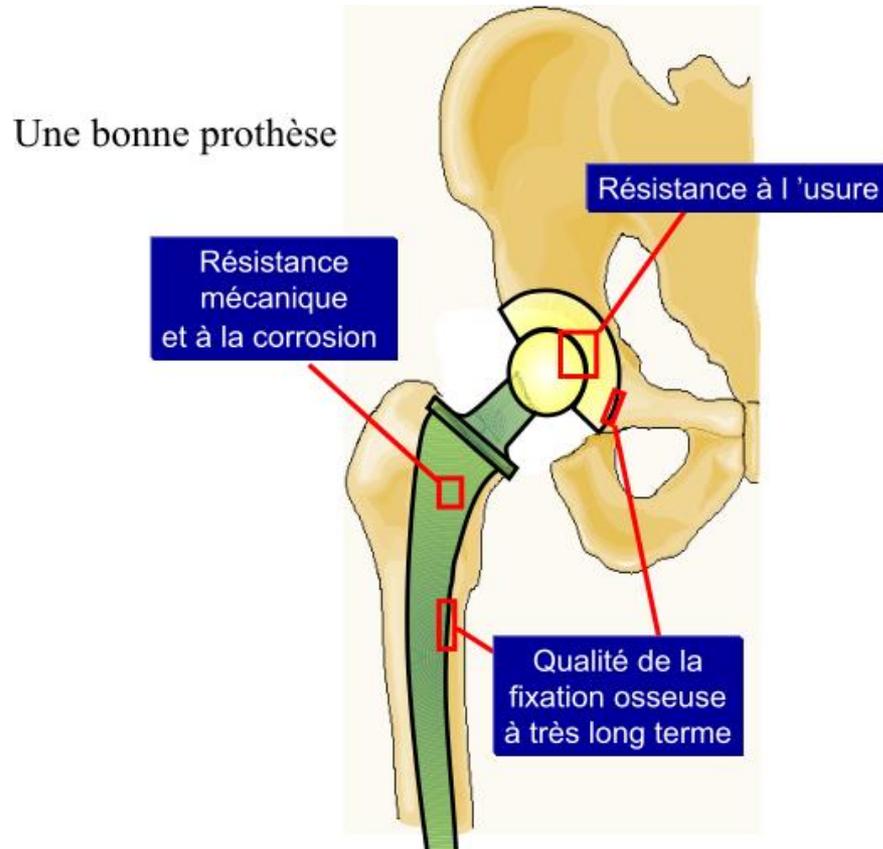


Géomatériaux

Enjeux

Exemples de problèmes industriels

Biomécanique



Contenus du MOD 9.4

8 cours de 2h

1. Introduction : rappel de mécanique des milieux continus : LB
2. Thermodynamique des processus irréversibles : modèle rhéologique : BB
3. Plasticité macro critère de plasticité et écrouissage : BB
4. Mécanique de la rupture : VF
5. Anisotropie en élasticité : LB
6. Microplasticité : dislocation : SB
7. Mécanique du contact : VF
8. Fatigue multiaxiale : BB

- 1 **TP** de 4h : Essai de traction sur tissu osseux : anisotropie (SP)
- 1 **BE** de 4h : Fatigue des matériaux : approche phénoménologique, amorçage et propagation des fissures, prise en compte de la fatigue dans le comportement des matériaux (VF)
- 1 **BE** de 4h : passage de la loi de comportement micro à macro dans un roulement à billes (LB)

Evaluation

- 80% examen avec documents
- 20% compte-rendu de TP



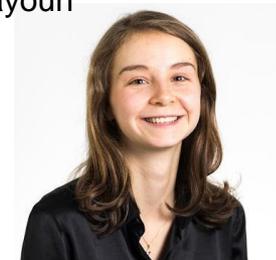
Bruno Berthel



Vincent Fridrici



Stéphane Benayoun



Sarah Pragnère

MOD 9.4. Comportement mécanique des Matériaux

Cours 1
Introduction : rappels de
Mécanique des Milieux Continus

Cours du 9/10/2018 - L. Blanc (laurent.blanc@ec-lyon.fr)

A. Approche « mécanique », rappels de MMC

- Description du mouvement
- Description des efforts
- Nécessité d'une loi de comportement

B. Approche « matériaux »

- Classes de comportement et mots-clefs
- Contenus du MOD 9.4

A. Approche « mécanique », rappels de MMC

- Description du mouvement
- Description des efforts
- Nécessité d'une loi de comportement

B. Approche « matériaux »

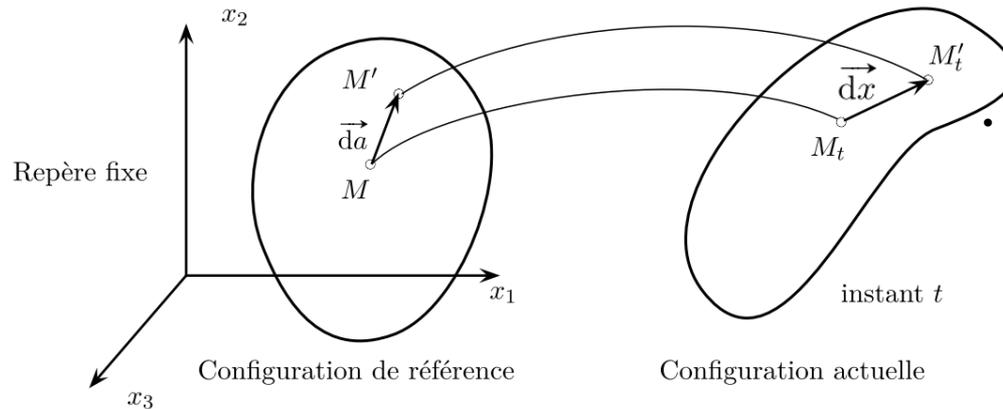
- Classes de comportement et mots-clefs
- Contenus du MOD 9.4

Comment décrire les
mouvements d'un
milieu continu ?
Représentation mathématique
des déformations

Déformations dans le cas d'une cinématique quelconque de MC

Définition du tenseur gradient de la transformation : $\underline{\underline{F}}$

Un peu de géométrie



• Notations

- \vec{a} vecteur position de M dans la config. de référence
- \vec{x} vecteur position du transformé de M , M_t
- le mouvement est décrit par la fonction

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{a}, t)$$

• $\underline{\underline{F}}$ associe à un vecteur matériel \vec{da} son transformé \vec{dx}

$$\vec{dx} = \overline{\overline{grad_{\vec{a}} \vec{x}}} \vec{da} \quad \mathbb{F} = \overline{\overline{grad_{\vec{a}} \vec{x}}}$$

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \frac{\partial x_1}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} da_1 \\ da_2 \\ da_3 \end{bmatrix}$$

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} da_j = x_{i,j} da_j$$

$$\Leftrightarrow F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = x_{i,j}$$

$$\vec{dx} = \mathbb{F} \vec{da} = \mathbf{F} \vec{da}$$

$$dx_i = F_{ij} da_j$$

• $\underline{\underline{F}}$ traduit une transformation « locale », au voisinage de M

Déformations dans le cas d'une cinématique quelconque de MC

Tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit (noté \underline{C})

Insuffisance de \underline{E} comme outil de mesure d'une « déformation »

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{da} = da \vec{n} \\ \overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{\delta a} = \delta a \vec{m} \end{cases}$$

• « Déformation » = variation de longueur, d'angle, donc variation de produit scalaire

- Etude d'un milieu ayant un mouvement de solide rigide caractérisé par une translation \vec{c} et une rotation Q (matrice orthogonale, ie inverse = transposée)

$$x_i = c_i(t) + Q_{ij}(t)a_j$$

- Le gradient de la transformation n'est pas nul alors qu'il n'y a pas de déformation, en effet

$$F_{ij}(a, t) = Q_{ij}(t)$$

- Explication : \underline{E} contient à la fois une rotation et une déformation qu'il conviendra de séparer

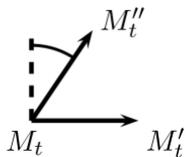
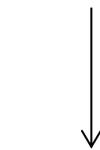
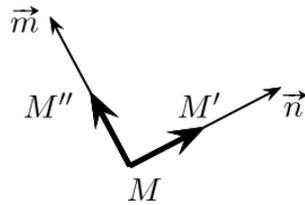
• Caractérisation d'une variation de produit scalaire : tenseur de Cauchy-Green \underline{C}

- On introduit en plus de \overrightarrow{da} un deuxième vecteur $\overrightarrow{\delta a}$, ils se transforment en \overrightarrow{dx} en $\overrightarrow{\delta x}$
- Leur produit scalaire s'écrit

$$\overrightarrow{dx} \cdot \overrightarrow{\delta x} = dx_i \delta x_i = F_{ij} F_{ik} da_j \delta a_k = C_{jk} da_j \delta a_k$$

$$C_{jk} = F_{ij} F_{ik}, \quad \underline{C} = \underline{F}^T \underline{F}$$

$$\overrightarrow{dx} \cdot \overrightarrow{\delta x} = \underline{C}(\overrightarrow{da}, \overrightarrow{\delta a}) = \overrightarrow{da} \cdot \underline{C} \overrightarrow{\delta a}$$



$$\begin{cases} \overrightarrow{MtMt'} = \overrightarrow{dx} \\ \overrightarrow{MtMt''} = \overrightarrow{\delta x} \end{cases}$$

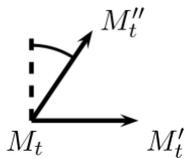
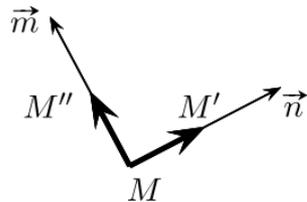
Déformations dans le cas d'une cinématique quelconque de MC

Tenseur de Green-Lagrange des déformations (noté $\underline{\underline{E}}$)

Insuffisance de $\underline{\underline{C}}$ comme outil de mesure d'une « déformation »

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{da} = da \vec{n} \\ \overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{\delta a} = \delta a \vec{m} \end{cases}$$

• Caractérisation d'une variation de forme : tenseur de Green-Lagrange $\underline{\underline{E}}$



$$\begin{cases} \overrightarrow{M_t M'_t} = \overrightarrow{dx} \\ \overrightarrow{M_t M''_t} = \overrightarrow{\delta x} \end{cases}$$

- Dans un mouvement de solide rigide $\underline{\underline{C}} = \text{Identité}$ (conservation du produit scalaire)

$$x_i = c_i(t) + Q_{ij}(t)a_j \quad F_{ij}(a, t) = Q_{ij}(t) \quad C_{jk} = Q_{ij}Q_{ik} = \delta_{jk}$$

- L'idée est donc de soustraire l'identité correspondant à la contribution du mouvement de solide rigide dans $\underline{\underline{C}}$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{1}}), \quad E_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ij} - \delta_{ij})$$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}})$$

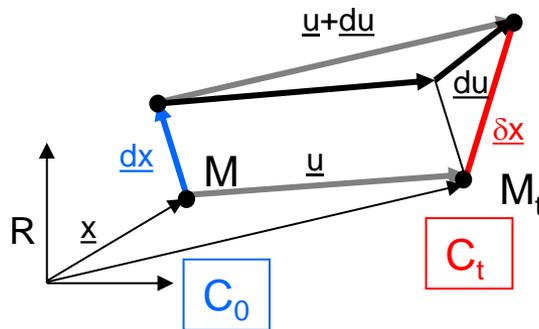
- $\underline{\underline{E}}$ donne la variation de produit scalaire entre deux vecteurs

$$\overrightarrow{dx} \cdot \overrightarrow{\delta x} = \underline{\underline{C}} (\overrightarrow{da}, \overrightarrow{\delta a}) = \overrightarrow{da} \cdot \underline{\underline{C}} \overrightarrow{\delta a} \longrightarrow \overrightarrow{dx} \cdot \overrightarrow{\delta x} - \overrightarrow{da} \cdot \overrightarrow{\delta a} = 2 \overrightarrow{da} \cdot \underline{\underline{E}} \overrightarrow{\delta a}$$

Déformations dans le cas d'une cinématique quelconque de MC

Propriétés du tenseur de Green-Lagrange $\underline{\underline{E}}$

Unités, écriture en fonction des déplacements, autres descripteurs des déformations



• Introduction du champ des déplacements, vecteur déplacement \vec{u}

- \vec{u} est utile en mécanique des solides

$$\vec{x} = \vec{a} + \vec{u}(\vec{a}, t) \leftrightarrow x_i = a_i + u_i(a_1, a_2, a_3, t)$$

- $\underline{\underline{F}}$ et $\underline{\underline{E}}$ deviennent

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \overline{\overline{\text{grad}}_{\vec{a}}} \vec{u} \leftrightarrow F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j}$$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\text{grad}}_{\vec{a}}} \vec{u} + \left(\overline{\overline{\text{grad}}_{\vec{a}}} \vec{u} \right)^T + \overline{\overline{\text{grad}}_{\vec{a}}} \vec{u} \left(\overline{\overline{\text{grad}}_{\vec{a}}} \vec{u} \right)^T \right)$$

$$\leftrightarrow E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right)$$

Déformations en petites perturbations (HPP)

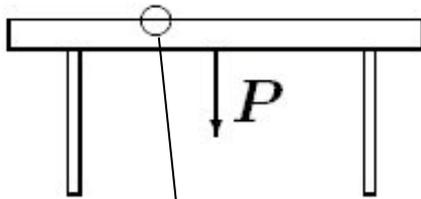
L'hypothèse des petites perturbations

Une cinématique linéarisée

- Idée générale

- Le solide s'écarte peu de sa configuration de référence
- Déplacements et déformations restent « petits » (et aussi : petites rotations)

- Conséquences



- « petits déplacements » :
 - Intérêt pour le calcul des efforts intérieurs et des chargements imposés, sur la config. de référence et pas la config. déformée

$$\|\vec{u}(\vec{a}, t)\| \ll L \quad \text{et} \quad \vec{a} \approx \vec{x}$$

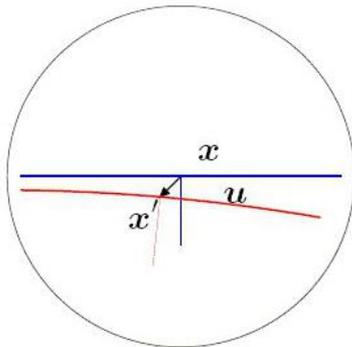
- « petites déformations » :
 - On linéarise autour de la config. de référence

$$\|\overline{\overline{\text{grad}}}_{\vec{x}} \vec{u}\| = \text{Max}_{(i,j)} \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \right| \right) \ll 1$$

- Introduction du tenseur linéarisé des déformations

- Il est unique et correspond aux linéarisations de Green-Lagrange, Euler-Almansi etc
- Il s'écrit

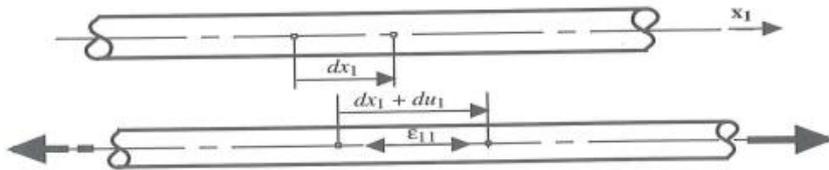
$$\mathbb{E}(\vec{u}, t) \approx \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\text{grad}}}_{\vec{x}} \vec{u} + \left(\overline{\overline{\text{grad}}}_{\vec{x}} \vec{u} \right)^T \right) = \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{x}, t)$$



Déformations en petites perturbations (HPP)

Propriétés du tenseur linéarisé des déformations

Interprétation physique des ε_{ij}



- Le tenseur des déformations linéarisé est l'application linéaire qui lie $\vec{\varepsilon}$ à \vec{n}

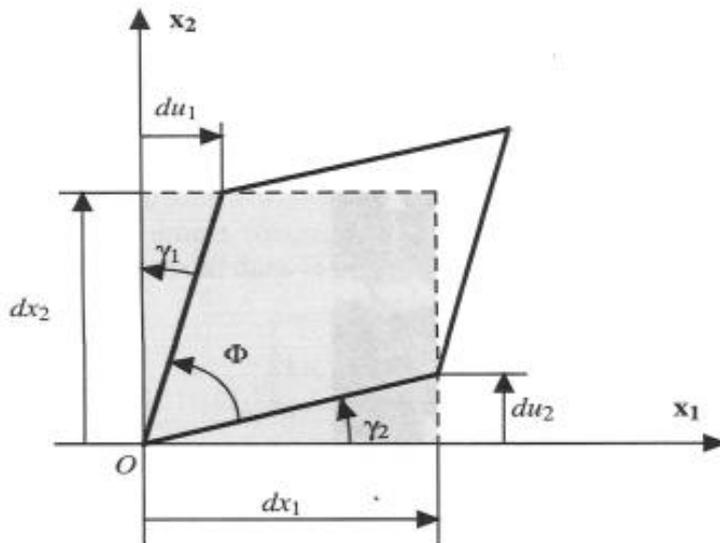
$$\vec{\varepsilon}(M, \vec{n}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}_R \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}_R$$

$\vec{\varepsilon}(\vec{X}_1)$ $\vec{\varepsilon}(\vec{X}_2)$ $\vec{\varepsilon}(\vec{X}_3)$ \vec{n}

- Signification physique des composantes de ε

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}_R$$

Déformations normales, allongements ou dilatations
 Déformations tangentielles, glissements



- Illustration graphique pour un milieu continu élémentaire (déf. homogène)

$$\varepsilon(\vec{e}_1) = \varepsilon_{11} = \vec{e}_1 \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \vec{e}_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$\gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \vec{e}_1 \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \vec{e}_2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

Évaluer la déformation moyenne de traction subie par une lanière de l'élastomère de la figure 2.2 pour laquelle les points matériels représentés par des croix avant et après déformation ont été repérés par une technique de corrélation d'images explicitée au chapitre 4.

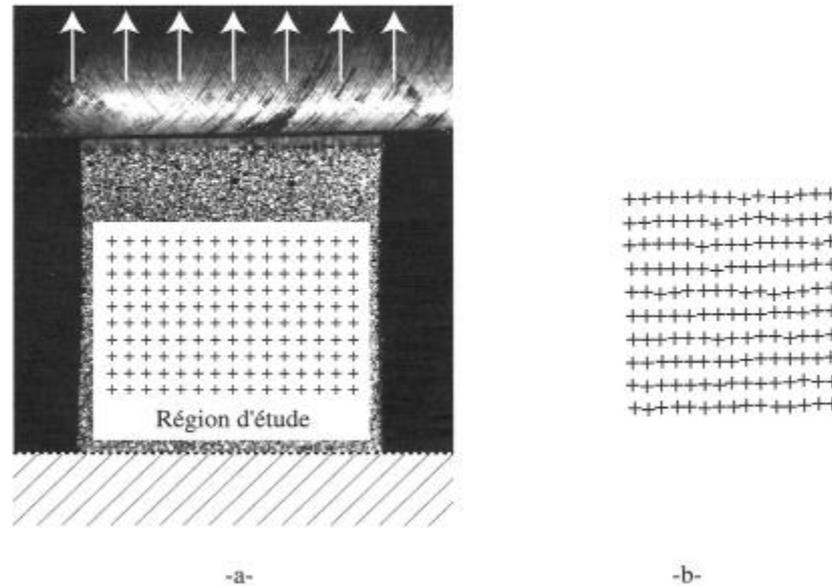


Figure 2.2 a) Vue partielle d'une lanière en élastomère et région d'étude avec l'ensemble des points de mesure. b) Points dans la configuration déformée lors d'un essai de traction.

Essai

Exemple. La figure 2.4 montre le principe de l'essai ARCAN en cisaillement sur une tôle en acier. Les points de mesure sont tracés dans leur configuration de référence et dans la configuration déformée. On remarque que seul un glissement dans la direction verticale a été obtenu. Un angle d'environ 20° est relevé. On en conclut Déterminer la déformation tangentielle associée.

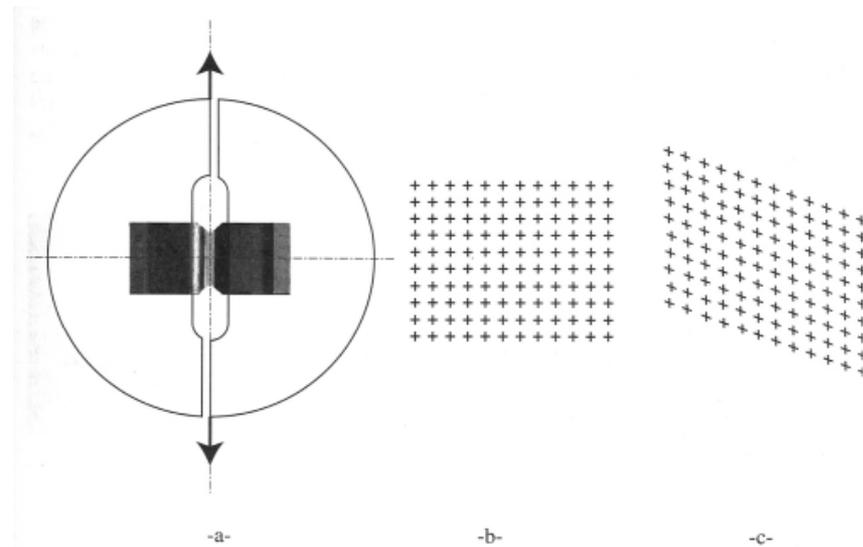
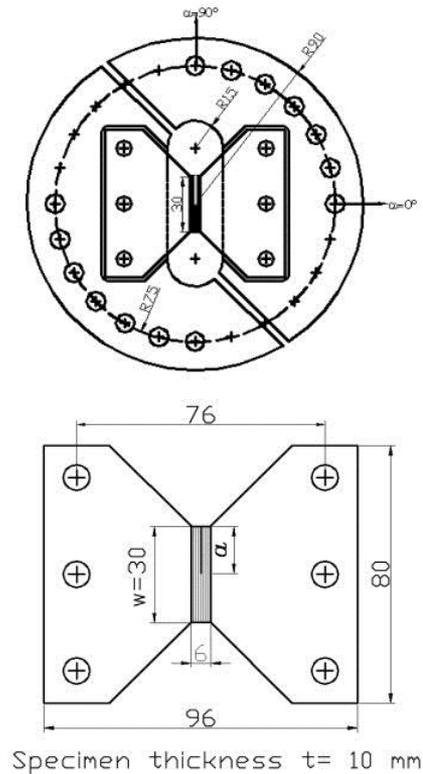
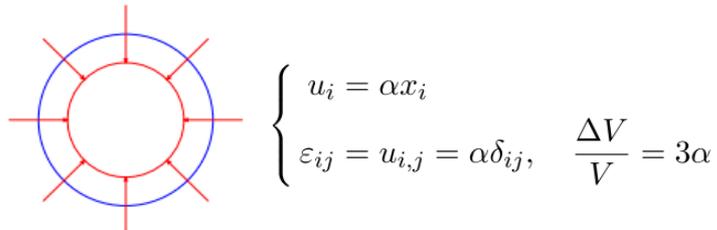


Figure 2.4 a) Schéma d'un montage ARCAN pour l'étude du comportement en cisaillement de tôles en acier ou en matériau composite ; b) points de mesure dans leur configuration de référence ; c) points de mesure dans la configuration déformée.

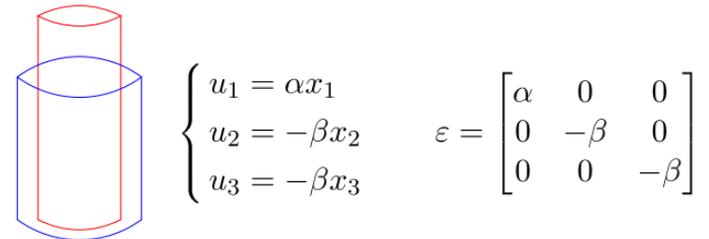
Déformations en petites perturbations (HPP)

Exemples d'état de déformation homogène remarquables

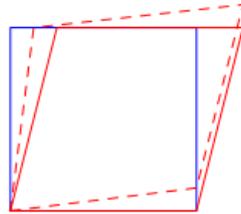
• Dilatation uniforme



• Extension simple



• Glissement simple

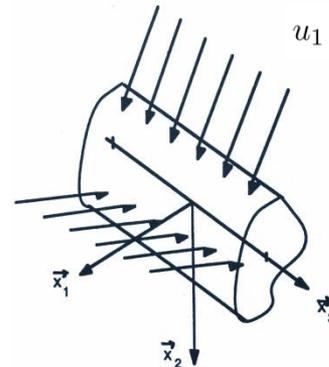


$$\begin{cases} u_1 = \gamma x_2 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases} \quad u'_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• Déformation plane

- Hypothèse faite pour des pièces longues ou des pièces dont on bloque le déplacement selon \vec{x}_3 aux extrémités
- Le chargement est dans le plan (\vec{x}_1, \vec{x}_2) et indépendant de x_3



$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A. Approche « mécanique », rappels de MMC

- Description du mouvement
- **Description des efforts**
- Nécessité d'une loi de comportement

B. Approche « matériaux »

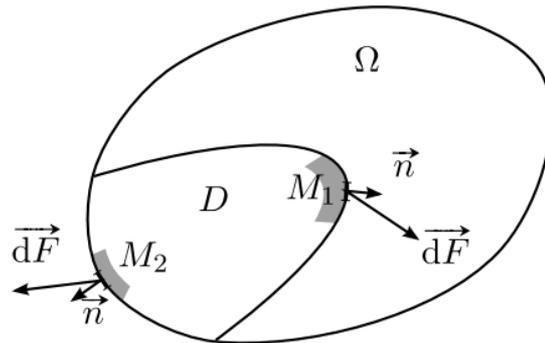
- Classes de comportement et mots-clefs
- Contenus du MOD 9.4

Comment décrire les efforts
s'exerçant à l'intérieur
ou à la surface d'un milieu
continu ?
Représentation mathématique
des contraintes

Modélisation des actions mécaniques sur le domaine isolé

Vecteur contrainte

Définition



• Efforts extérieurs ou intérieurs ? Notion de coupure

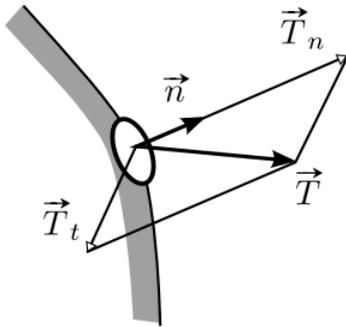
- la coupure « extériorise » les efforts intérieurs...
- efforts intérieurs = efforts extérieurs exercés par une sous-partie du système sur la partie complémentaire

$$\vec{T} = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{dS}$$

Modélisation des actions mécaniques sur le domaine isolé

Vecteur contrainte

Conventions



$$\vec{T} = T_n \vec{n} + \vec{T}_t$$

- **Convention de signe**

- \vec{n} est choisie normale SORTANTE, extérieure au domaine isolé (sauf en Méca des Sols...)
-

- **Notion de facette, composantes normale et tangentielle**

- facette = un élément de surface + \vec{n} associée
-

- **Composantes normale et tangentielle**

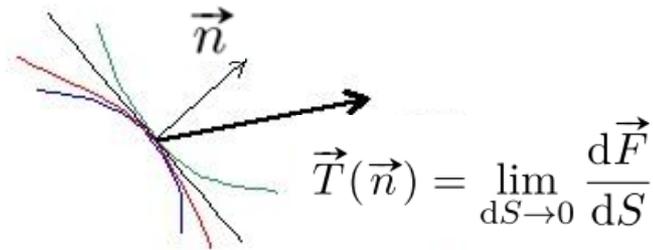
- T_n est la contrainte normale (scalaire) positive en traction, négative en compression
- \vec{T}_t est la contrainte tangentielle, ou de cisaillement

Intro du tenseur des contraintes à partir du PFS

Postulat de Cauchy

L'hypothèse fondatrice

- \vec{T} ne dépend que du point M considéré et du vecteur normal \vec{n} à ∂D : $\vec{T}(\mathbf{M}, \vec{n})$
 - on suppose que \vec{T} est le même pour les surfaces ci-contre



Intro du tenseur des contraintes à partir du PFS

Le PFD donne des indications sur la répartition des contraintes

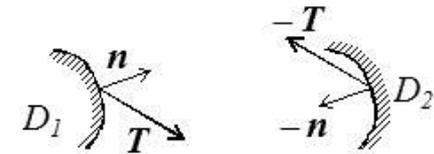
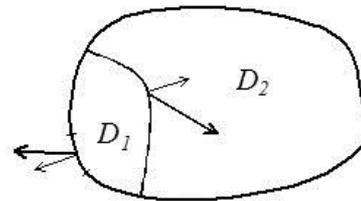
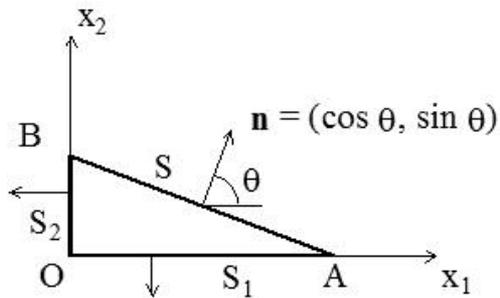
L'équilibre d'un triangle (en 2D) montre la relation linéaire entre \vec{T} et \vec{n}

- Isolons un triangle (pour simplifier la démo)

- Il n'y a que des forces surfaciques sur les côtés
- on applique l'équation de la résultante :

$$\vec{T}(\vec{n}) S + \vec{T}(-\vec{x}_2) S_1 + \vec{T}(-\vec{x}_1) S_2 = \vec{0}$$

- on applique le théorème de l'action et de la réaction



$$\vec{T}(\vec{n}) = -\vec{T}(-\vec{n})$$

- On obtient :

$$\vec{T}(\vec{n}) = \vec{T}(\vec{x}_2) \frac{S_1}{S} + \vec{T}(\vec{x}_1) \frac{S_2}{S}$$

$$\vec{T}(\vec{n}) = \vec{T}(\vec{x}_2) \sin \theta + \vec{T}(\vec{x}_1) \cos \theta = \vec{T}(\vec{x}_i) n_i$$

Intro du tenseur des contraintes à partir du PFS

Le PFD donne des indications sur la répartition des contraintes

Une matrice permet de décrire la relation linéaire entre \vec{T} et \vec{n}

- Il suffit, pour calculer \vec{T} de connaître les vecteurs contraintes associés aux vecteurs de base \vec{x}_i , donc aux facettes normales aux axes de coordonnées

$$\vec{T}(\vec{n}) = \vec{T}(\vec{x}_i) n_i$$

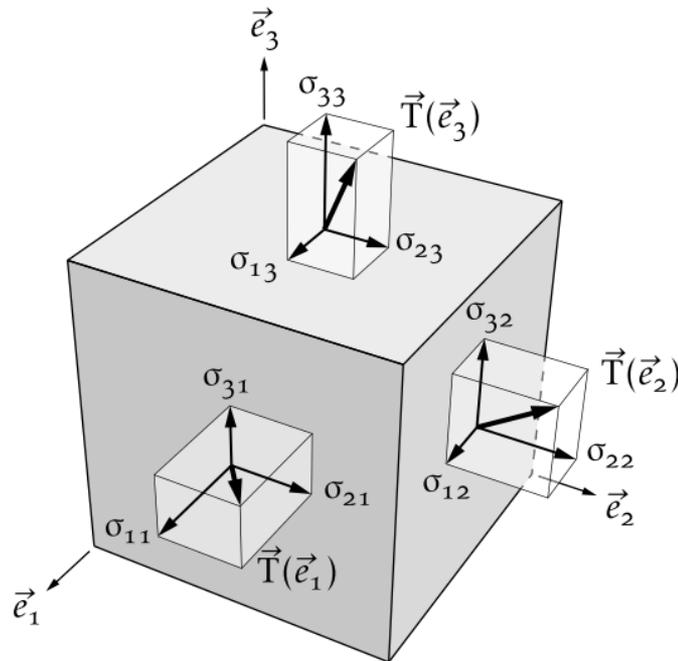
- On appelle tenseur des contraintes l'application linéaire qui lie \vec{T} à \vec{n}

$$\vec{T}(\mathbf{M}, \vec{n}) = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_R \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}_R$$

$\begin{matrix} \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \nwarrow \\ \vec{T}(\vec{x}_1) & \vec{T}(\vec{x}_2) & \vec{T}(\vec{x}_3) & \vec{n} \end{matrix}$

Propriétés du tenseur des contraintes

Interprétation physique des σ_{ij}



- Le terme σ_{ij} est la composante suivant \vec{e}_i du vecteur contrainte représentant la densité d'effort $\vec{T}(\vec{e}_j)$ sur la face de normale j

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{\mathbb{R}}$$

Contraintes
normales

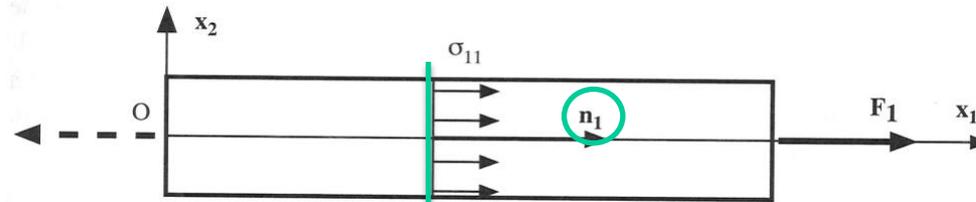
Contraintes
tangentielles

Propriétés du tenseur des contraintes

Interprétation physique des σ_{ij}

Exemples canoniques

- Barre en traction - Contrainte normale



- La répartition des contraintes dans la section de la barre colorée en vert, orientée par \vec{x}_1 assure la transmission de la force \vec{F}_1 qui sollicite la barre à son extrémité dans la direction \vec{x}_1 , pour équilibrer la force égale et opposée dans la direction $-\vec{x}_1$
- Sous l'hypothèse de répartition uniforme des contraintes dans la section, on a :

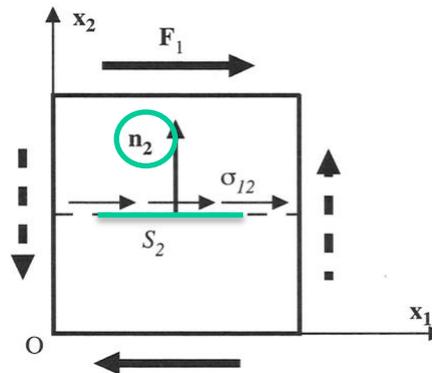
$$\sigma_{11} = \frac{F_1}{S_1}$$

Propriétés du tenseur des contraintes

Interprétation physique des σ_{ij}

Exemples canoniques

- Lopin cisailé - Contrainte tangentielle



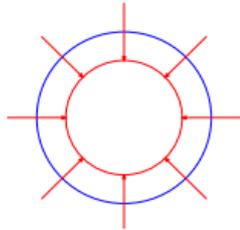
- La force \vec{F}_1 sollicite le lopin comme précédemment dans la direction \vec{x}_1 .
- On s'intéresse à son action sur la section colorée en vert, orientée par \vec{x}_2 .
- Sous l'hypothèse de répartition uniforme des contraintes dans la section, la contrainte σ_{12} qui assure la transmission de l'effort de cisaillement est :

$$\sigma_{12} = \frac{F_1}{S_2}$$

Quelques exemples de tenseurs des contraintes

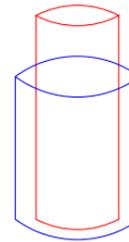
Etats de d'état de contraintes homogènes remarquables

• Dilatation uniforme



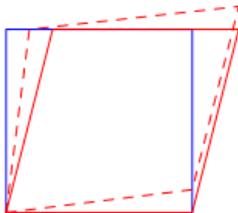
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

• Extension simple



$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

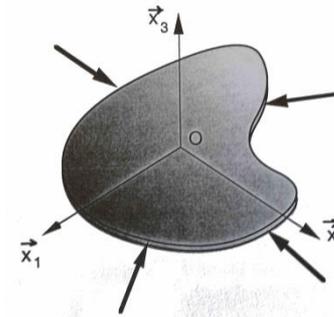
• Glissement simple



$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• Contrainte plane

- Hypothèse faite pour des pièces minces chargées dans leur plan moyen

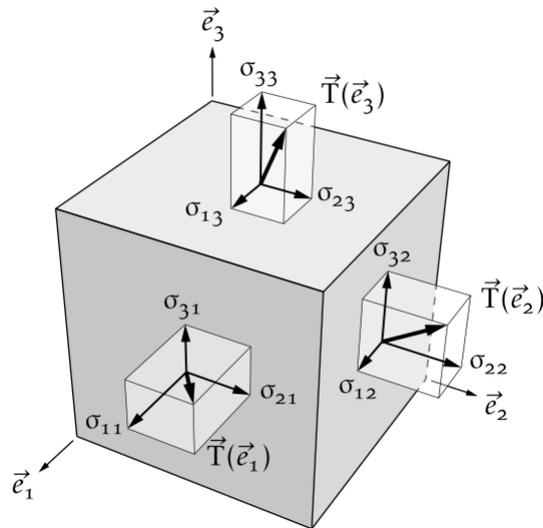


$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriétés du tenseur des contraintes

Equation d'équilibre local

En résultante



• Le théorème de la résultante et un DL 1 des σ_{ij} donne

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = \rho \gamma_1$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = \rho \gamma_2$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = \rho \gamma_3$$

$$\begin{aligned} & \sigma_{11}(x_1 + dx_1) \\ &= \sigma_{11}(x_1) + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 + \dots \end{aligned}$$

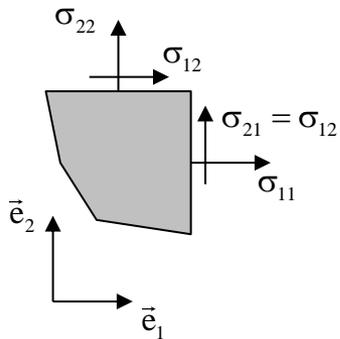
$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \gamma_i$$

$$\overrightarrow{\text{div}} \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} = \rho \vec{\gamma}$$

Propriétés du tenseur des contraintes

Equation d'équilibre local

En moment



- La même approche est suivie avec l'équation de moment

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

- Conséquence : le tenseur des contraintes est symétrique
- On parle de « réciprocité » des contraintes tangentielles
- $\underline{\sigma}$ a 6 composantes scalaires indépendantes

Plan du cours 1

A. Approche « mécanique », rappels de MMC

- Description du mouvement
- Description des efforts
- **Nécessité d'une loi de comportement**

Pourquoi et comment relier
les contraintes et les
déformations ?
Les lois de comportement

B. Approche « matériaux »

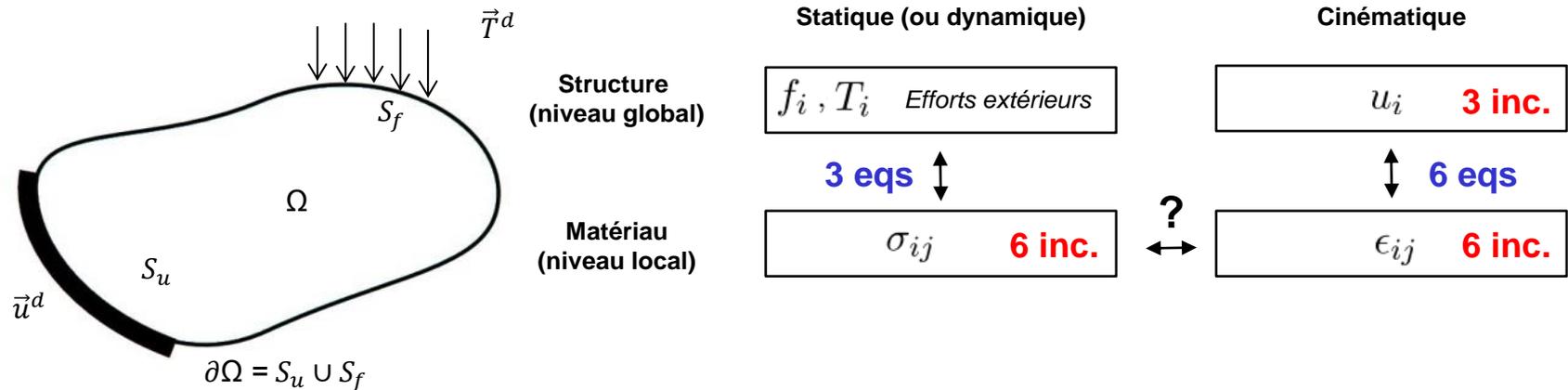
- Classes de comportement et mots-clefs
- Contenus du MOD 9.4

Le besoin : boucler le système d'équations

Bilan équationnel

• Pour résoudre un problème de MMC il faut trois types d'équations

- les équations de la cinématique (eulérienne ou lagrangienne) → OK
- les lois de conservation de la QDM et du moment cinétique, de la masse → OK
- la loi de conservation de l'énergie (1^{er} principe de la thermodynamique) → à définir
- la loi de comportement du milieu (en accord avec le 2nd principe) → à définir



Le besoin : boucler le système d'équations

Bilan équationnel

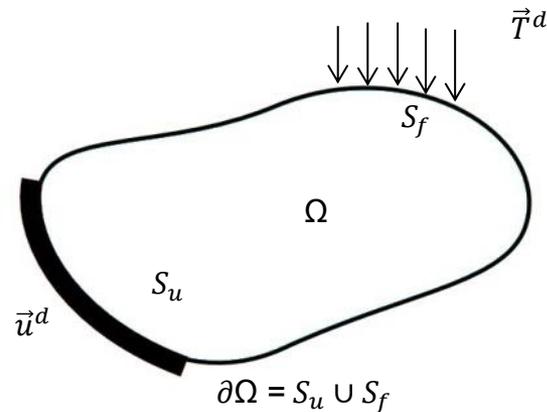
On cherche $u_i(x, t)$ et $\sigma_{ij}(x, t)$ vérifiant			
	CL en déplacement uniquement	CL en effort uniquement (cf *)	CL mixtes
Équations sur la cinématique	$u_i _{\partial\Omega} = u_i^d$		$u_i _{S_u} = u_i^d$
	$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$		
Relation de comportement	$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad ??$		
Équations sur les efforts	$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ ou 0		
		$\sigma_{ij}n_j _{\partial\Omega} = T_i^d$	$\sigma_{ij}n_j _{S_f} = T_i^d$
+ des conditions initiales (en dynamique) $u_i(x, 0) = u_i^0(x)$ et $\frac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0) = V_i^0(x)$			

* Remarques :

- les efforts imposés doivent s'équilibrer (en statique),
- la solution est connue à un déplacement de corps rigide près

Le besoin : boucler le système d'équations

Problèmes réguliers, rôle des conditions aux limites



- Un problème régulier (= « bien posé ») admet une solution unique s'il a des CL adéquates
 - conditions spatiales : CL en déplacement et en effort ;
 - conditions temporelles éventuelles : conditions initiales
- Les CL spatiales imposent en tout point de la frontière trois conditions scalaires
 - toutes en déplacement
 - ou toutes en effort dans les 3 directions
 - un déplacement dans une direction, un effort dans les deux autres... ou un assortiment

Le besoin : boucler le système d'équations

Notion de loi de comportement

- La relation de comportement fournit les 6 équations manquantes

- elle permet de calculer les contraintes en fonction des déformations (et inversement), au besoin en faisant intervenir l'historique du chargement

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \int_{s=0}^{\infty} \underline{\underline{\sigma}} \{ \underline{\underline{\varepsilon}}(t-s) \}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \int_{s=0}^{\infty} \underline{\underline{\varepsilon}} \{ \underline{\underline{\sigma}}(t-s) \}$$

- Elle est particulière à un matériau ou à une famille de matériaux

- et ne présente pas la « généralité conceptuelle » liée aux principes fondamentaux qu'ont les contraintes ou les équations du mouvement
- elle est par nature d'origine expérimentale : besoin d'essais de caractérisation du matériau au niveau local, au travers de structures judicieusement choisies, les éprouvettes

- Elle respecte la thermodynamique (des milieux continus)

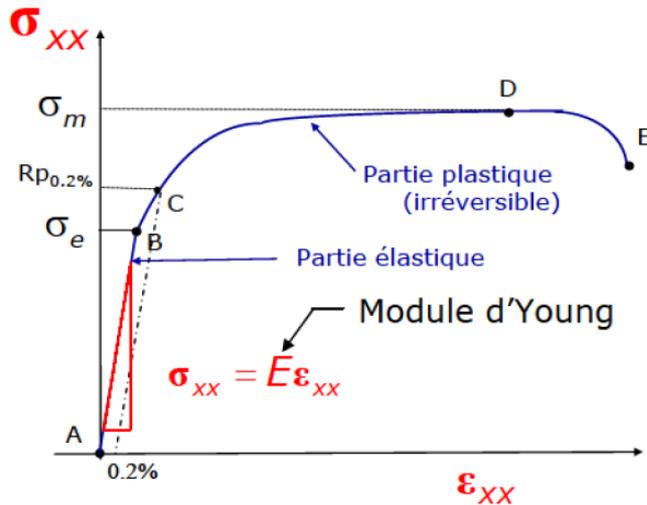
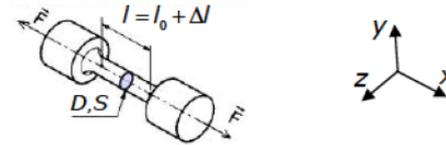
- le bilan énergétique joue un rôle essentiel (cf cours 2 par B. Berthel)

Le comportement de base : élastique linéaire isotrope

Identification des termes du tenseur d'élasticité

Loi de Hooke 3D pour les matériaux ISOTROPES. Essai de TRACTION

- Relation σ_{xx} et ε_{xx}



$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} = F(t)/S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{xx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix}$$

Coefficient de Poisson ν

$$\nu = \frac{(D-D_0)/D_0}{(l-l_0)/l_0} = \frac{(D-D_0)/D_0}{\Delta l/l_0}$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{yy}}$$

- Point A : état initial
- Point B : limite d'élasticité vraie
- Point C : limite d'élasticité à 0.2%
- Point D : charge maximale à la rupture
- Point E : rupture

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx} \quad \varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx}$$

Coefficient de Poisson ν

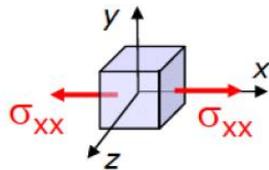
Module d'Young E

Le comportement de base : élastique linéaire isotrope

Identification des termes du tenseur d'élasticité

Loi de Hooke 3D pour les matériaux ISOTROPES. Essai de TRACTION

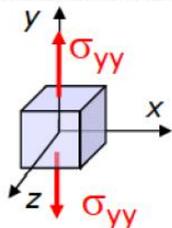
- Par analogie



$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu \varepsilon_{xx} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx}$$

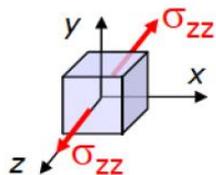
$$\varepsilon_{zz} = -\nu \varepsilon_{xx} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx}$$



$$\varepsilon_{xx} = -\nu \varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{yy}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \sigma_{yy}$$

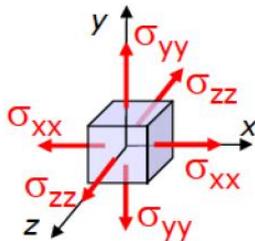
$$\varepsilon_{zz} = -\nu \varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{yy}$$



$$\varepsilon_{xx} = -\nu \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \sigma_{zz}$$



Par combinaison et superposition des 3 chargements

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy} - \nu \sigma_{zz})$$

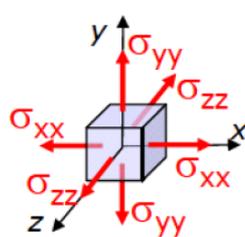
$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \nu \sigma_{zz})$$

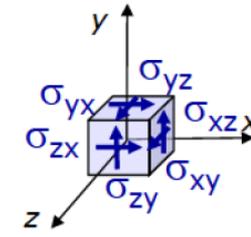
$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

Le comportement de base : élastique linéaire isotrope

Identification des termes du tenseur d'élasticité

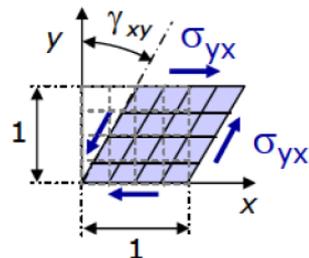
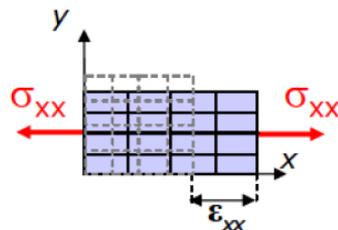
Loi de Hooke 3D pour les matériaux ISOTROPES. SYNTHÈSE



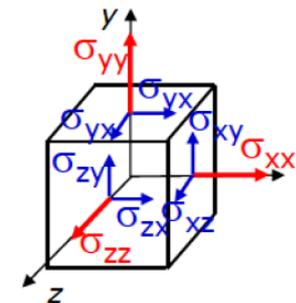
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$


$$\begin{pmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{G} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix}$$

=



$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix}$$



Le comportement de base : élastique linéaire isotrope

Identification des termes du tenseur d'élasticité

Loi de Hooke 3D pour les matériaux ISOTROPES. SYNTHÈSE

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \left(\frac{\nu}{E} \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}}) \right) \mathbf{I}$$

Coefficient de Poisson $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$

Module d'Young $E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$

Module de Coulomb $G = \mu$



Loi de Hooke

En raideur $\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda \text{trace}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \mathbf{I}$

En souplesse $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2\mu} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}}) \mathbf{I}$

Coefficients de Lamé

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$



Loi indépendante du repère

Condition de stabilité $E > 0$ $-1 \leq \nu \leq 1/2$ $G > 0$ $K > 0$ $3\lambda + 2\mu > 0$

A. Approche « mécanique », rappels de MMC

- Description du mouvement
- Description des efforts
- Nécessité d'une loi de comportement

B. Approche « matériaux »

- **Classes de comportement et mots-clefs**
- **Contenus du MOD 9.4**

Ce que nous apprennent les essais classiques

Stratégie en présence d'un nouveau matériau

- **Expérimentation**

- des quantités cinématiques et des quantités d'effort sont mesurées

- **Modélisation**

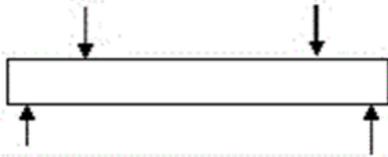
- une loi de comportement est proposée
- elle doit être viable thermodynamiquement (cf cours 2 par B. Berthel)

- **Dépouillement de l'essai**

- les paramètres de la RdC sont identifiés ou recalés
- on minimise pour cela une erreur bien choisie, par exemple l'erreur en relation de comportement (cf cours 4 de MSS tc1)
- nécessité d'un dialogue essais – calculs, rebouclage

Ce que nous apprennent les essais classiques

Points généraux, à garder à l'esprit



• Les essais les plus simples à interpréter : les essais homogènes ($\underline{\underline{\epsilon}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ constants dans la zone d'intérêt, assimilée à un élément de volume)

• Les points difficiles lors de l'étude d'un nouveau matériau :

- Le choix de la loi de comportement « juste nécessaire » : compromis richesse – simplicité d'utilisation, fixé par le CdC du matériau !
- Le choix de l'essai ou de la séquence d'essais : ils permettront l'accès aux paramètres souhaités
 - essai standard ou conception d'un nouvel essai ?
 - prise en compte de la géométrie des éprouvettes usinables
 - choix de la taille des éprouvettes (lié au VER)...

• Les points difficiles lors de la mise en œuvre d'un essai :

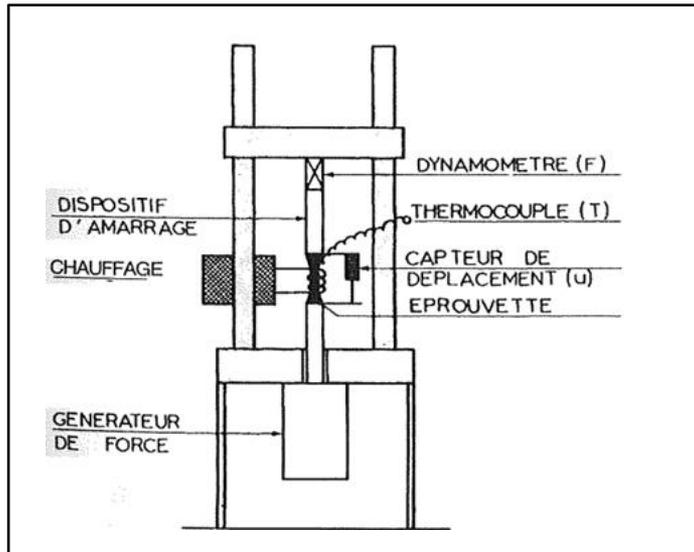
- La définition précise de la zone d'intérêt : maîtrise des effets de bord (cf principe de Saint Venant, cours 3 de GMtc1)
- La maîtrise de l'environnement (température, hygrométrie) et des conditions de chargement (vitesse d'application, cyclicité)
- Le respect strict du protocole, de la norme si elle existe : répétabilité
- Les aspects statistiques dans le traitement des données

Ce que nous apprennent les essais classiques

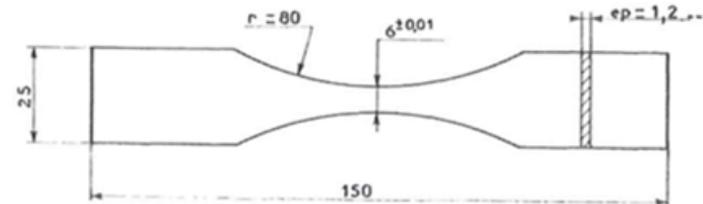
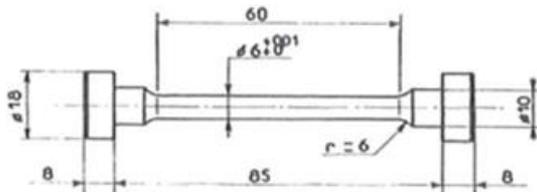
Élément sur les techniques d'expérimentation

Machines d'essais et éprouvettes, ce qu'il y a « autour de la zone d'intérêt »

Essai de traction



$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \Delta l(t)/l & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_T(t) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_T(t) \end{bmatrix} \leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} F(t)/S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

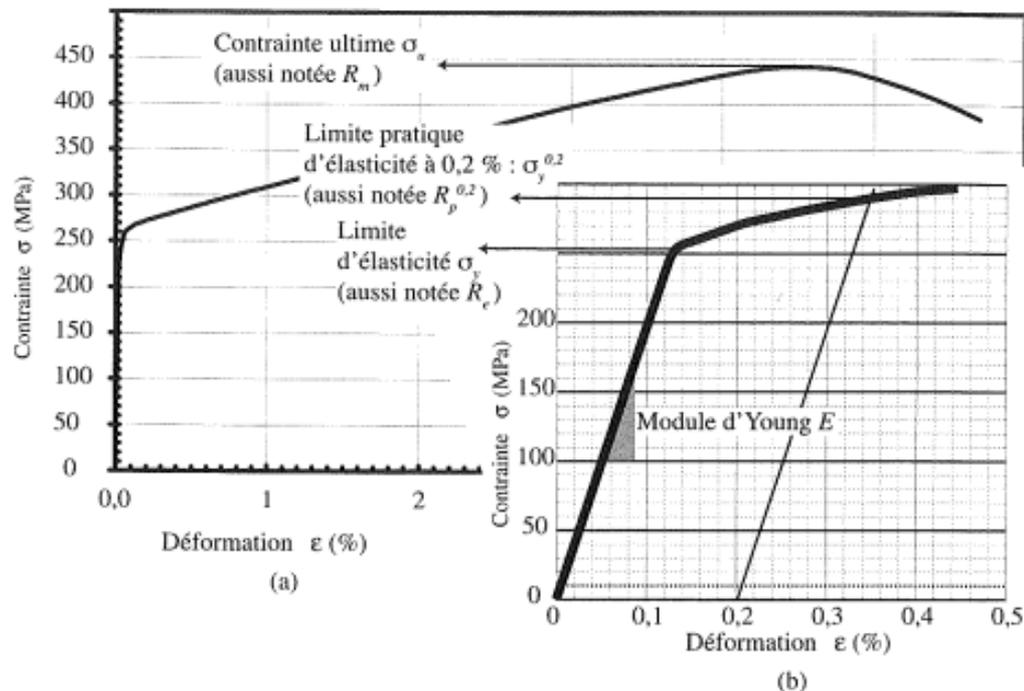


Ce que nous apprennent les essais classiques

Élément sur les techniques d'expérimentation

Machines d'essais et éprouvettes, ce qu'il y a « autour de la zone d'intérêt »

Essai de traction



Courbe de traction d'un acier inoxydable 316

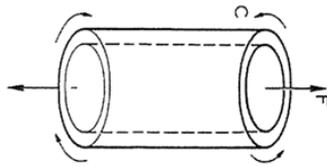
a- jusqu'à rupture ; b- au voisinage de la limite d'élasticité

Ce que nous apprennent les essais classiques

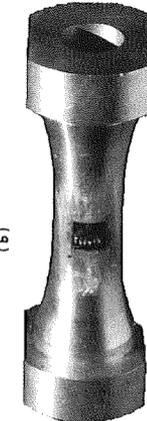
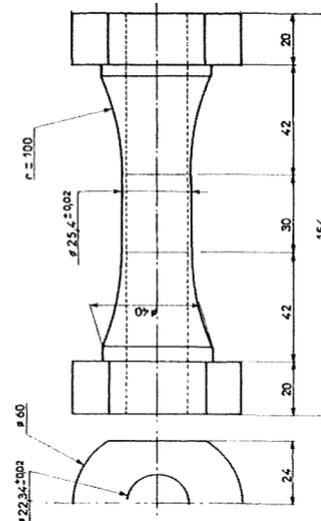
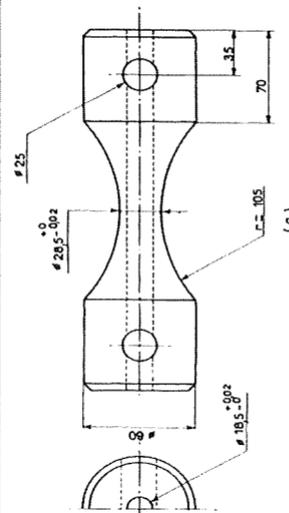
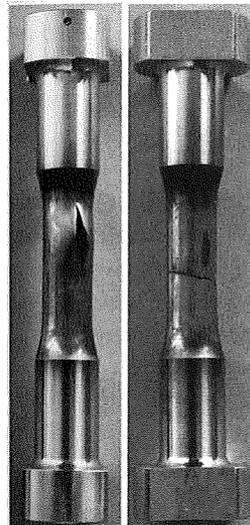
Élément sur les techniques d'expérimentation

Machines d'essais et éprouvettes, ce qu'il y a « autour de la zone d'intérêt »

Essai de torsion - traction

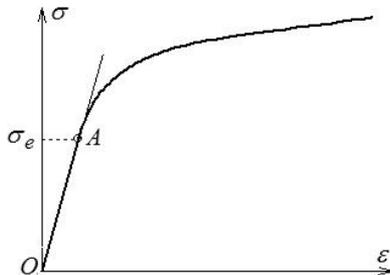
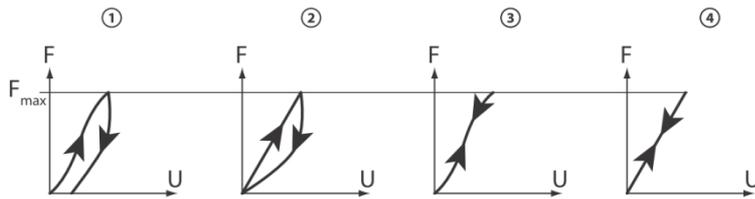


$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_T & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_T & D \frac{\Delta\theta}{4\ell} \\ 0 & D \frac{\Delta\theta}{4\ell} & \frac{\Delta\ell}{\ell} \end{bmatrix} \leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2M}{\pi D^2 e} \\ 0 & \frac{2M}{\pi D^2 e} & \frac{F}{\pi D e} \end{bmatrix}$$



Au delà du comportement élastique linéaire isotrope

Phénoménologie du comportement élastique



• Définition

- le matériau retrouve entièrement sa forme après un cycle de charge-décharge quelconque
- Implication 1 : réversibilité totale
- Implication 2 : il n'y a pas de dissipation d'énergie

• Exemple : charge-décharge de différents ressorts

- 1 : non élastique, pas de retour dans la configuration initiale
- 2 : non élastique, chemins aller et retour différents
- 3 : élastique non-linéaire
- 4 : élastique linéaire

• Ingrédients

- Une relation linéaire entre contraintes et déformations (loi élastique linéaire)
- Une condition de validité : le critère de limite d'élasticité

• Importance pratique

- Pour les méthodes numériques : linéarisation de lois + complexes
- Pour les comportements viscoélastiques (réversibilité retardée) : transformée de Laplace
- Pour des matériaux élastoplastiques ou viscoplastiques, avant leur seuil de plasticité

Au delà du comportement élastique linéaire isotrope

Critères de limite d'élasticité

Expressions

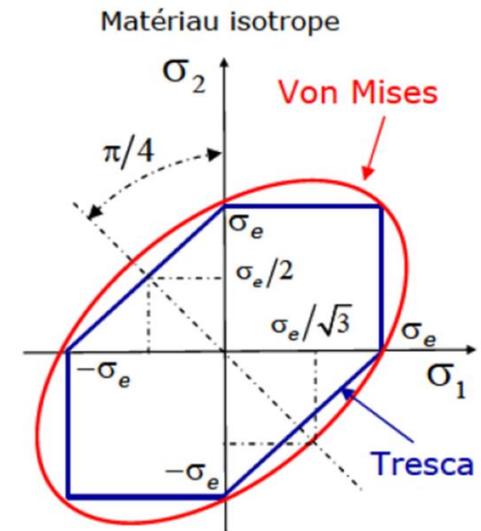
	σ_{eq}	k	
Rankine	$Max \sigma_i $	Limite d'élasticité en traction	σ_y
Tresca	$\frac{1}{2} Max \sigma_i - \sigma_j $	Limite d'élasticité en cisaillement	Pour les métaux : 0.5 à 0.8 $\times \sigma_y$
Von Mises	$\sqrt{\frac{3}{2} Tr(\underline{\underline{\sigma}}_D \underline{\underline{\sigma}}_D)}$	Limite d'élasticité en traction	σ_y

Autre écriture de σ_{eq} pour Von Mises :

$$\sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)}$$

- Représentation des critères dans l'espace des contraintes principales (en 2D)

- L'écart vaut 15% maxi avec une limite à $0.5 \times \sigma_y$ pour Tresca

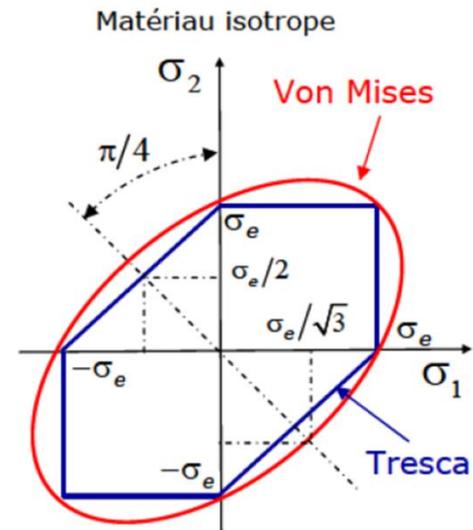


Au delà du comportement élastique linéaire isotrope

Critères de limite d'élasticité

Surface de charge

- Représentation des critères dans l'espace des contraintes principales (en 2D)
 - L'écart vaut 15% maxi avec une limite à $0.5 \times \sigma_y$ pour Tresca

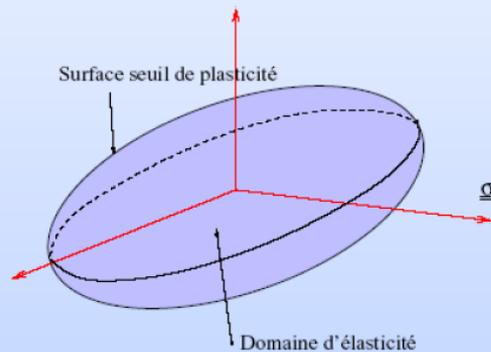


Au delà du comportement élastique linéaire isotrope

Critères de limite d'élasticité

Surface de charge

L'état de contrainte dans une structure est en général **multi-axial** : $\underline{\underline{\sigma}}$.



Généralisation de la notion de seuil de plasticité

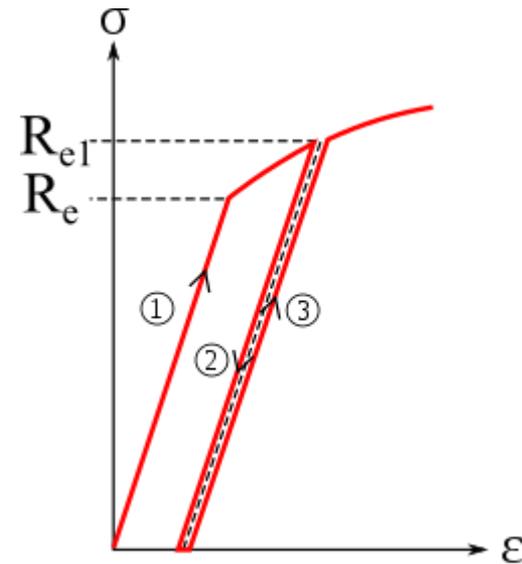
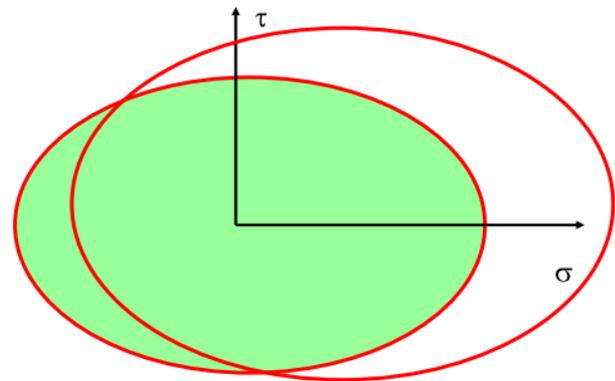
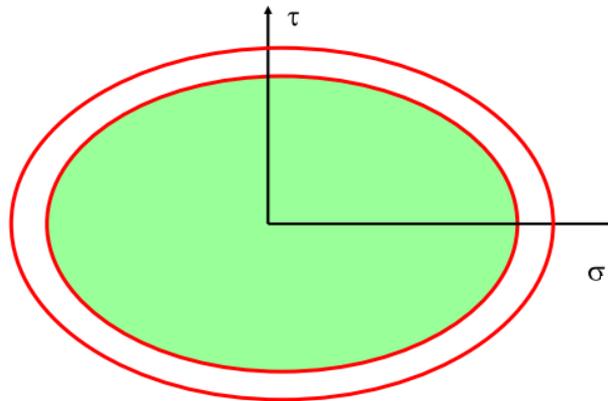
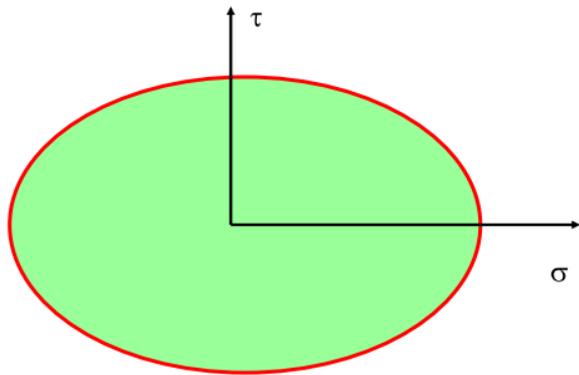
- \exists domaine dans l'espace des contraintes tel que
 - A l'intérieur du domaine, le régime est élastique : **domaine d'élasticité**.
 - Sur le bord du domaine, le régime est **élasto-plastique** : **surface seuil de plasticité**.
- Critère = toute fonction f telle que

$$\text{Domaine d'élasticité} = \{ \underline{\underline{\sigma}}, f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0 \},$$

$$\text{Surface seuil de plasticité} = \{ \underline{\underline{\sigma}}, f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \}.$$

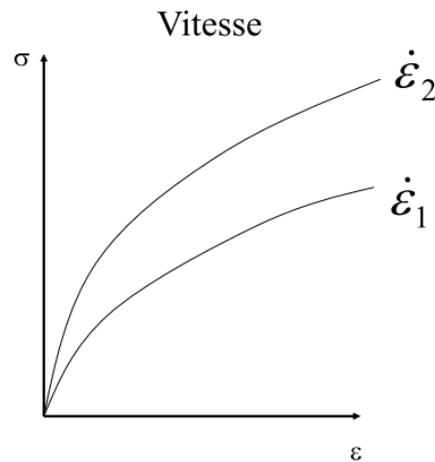
Au delà du comportement élastique linéaire isotrope

Ecrouissage cinématique ou isotrope



Au delà du comportement élastique linéaire isotrope

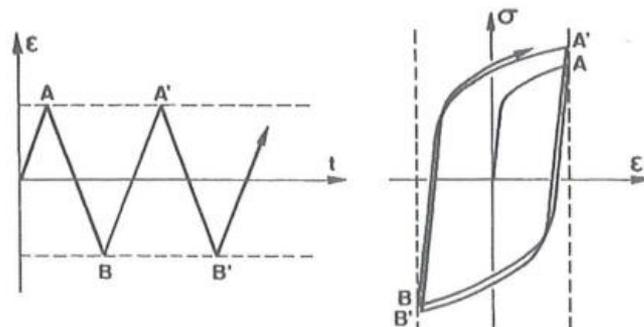
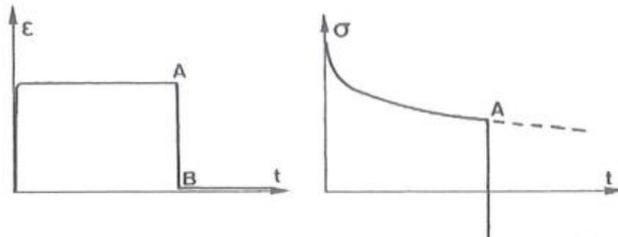
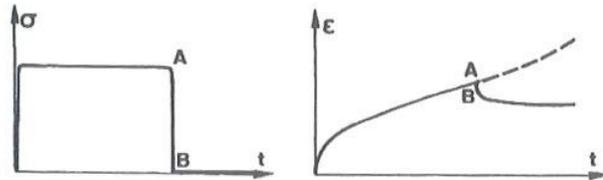
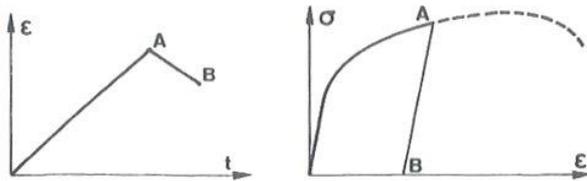
Viscosité et effet de la vitesse



Comportements classiques

Pilotage d'essais et comportements cibles

Comment « torturer » la zone d'intérêt



- **Essai d'érouissage en traction ou compression uniaxiale**

- Le plus courant
- Contrôlé en déformation, à vitesse de déformation constante
- Mise en évidence de l'érouissage, charges et décharges

- **Essai de fluage en TC uniaxiale – Essai de recouvrance**

- Une contrainte d'essai est imposée
- On observe l'évolution de la déformation
- La recouvrance se produit après déchargement

- **Essai de relaxation en TC uniaxiale**

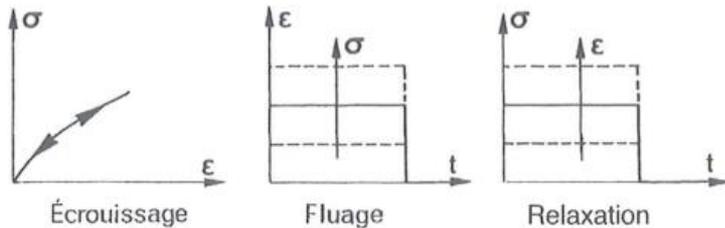
- Dual du précédent

- **Essais cycliques, essais multiaxiaux, dynamiques, de rupture**

Comportements classiques

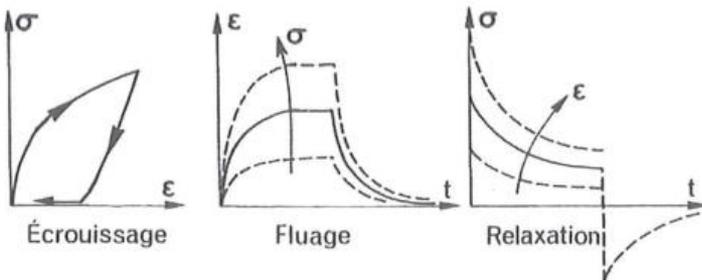
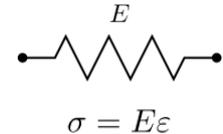
Pilotage d'essais et comportements cibles

Passage des essais aux modèles rhéologiques



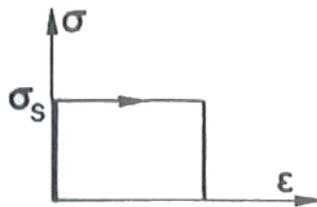
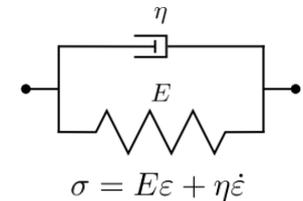
• Solide élastique parfait

- Réversibilité instantanée
- Loi de Hooke
- Métaux, bétons, roches en dessous de la limite d'élasticité



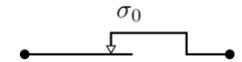
• Solide visco-élastique

- Réversibilité retardée
- Modèle de Kelvin-Voigt
- Polymères orga., caoutchouc, bois (hors sollicitation extrême)

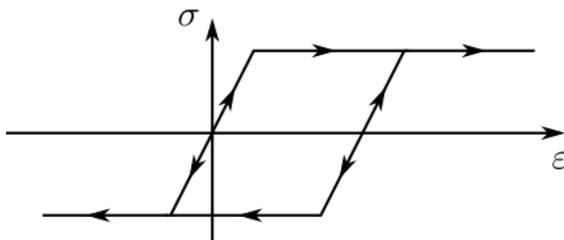


• Solide parfaitement plastique

- Au-delà d'un seuil de contrainte : « écoulement »
- Modèle à seuil
- Sols, mise en forme des métaux

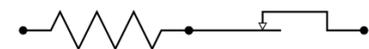


$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = 0 & \text{si } |\sigma| < \sigma_0 \\ \dot{\varepsilon} > 0 & \text{si } |\sigma| = \sigma_0 \\ \dot{\varepsilon} < 0 & \text{si } |\sigma| = -\sigma_0 \end{cases}$$



• Solide élasto-plastique sans écrouissage

- Élastique puis plastique
- Aciers à faible teneur en C, à froid



A. Approche « mécanique », rappels de MMC

- Description du mouvement
- Description des efforts
- Nécessité d'une loi de comportement

B. Approche « matériaux »

- Classes de comportement et mots-clefs
- **Contenus du MOD 9.4**

Contenus du MOD 9.4

8 cours de 2h

1. Introduction : rappel de mécanique des milieux continus : LB
2. Thermodynamique des processus irréversibles : modèle rhéologique : BB
3. Plasticité macro critère de plasticité et écrouissage : BB
4. Mécanique de la rupture : VF
5. Anisotropie en élasticité : LB
6. Microplasticité : dislocation : SB
7. Mécanique du contact : VF
8. Fatigue multiaxiale : BB

- 1 **TP** de 4h : Essai de traction sur tissu osseux : anisotropie (SP)
- 1 **BE** de 4h : Fatigue des matériaux : approche phénoménologique, amorçage et propagation des fissures, prise en compte de la fatigue dans le comportement des matériaux (VF)
- 1 **BE** de 4h : passage de la loi de comportement micro à macro dans un roulement à billes (LB)

Evaluation

- 80% examen avec documents
- 20% compte-rendu de TP



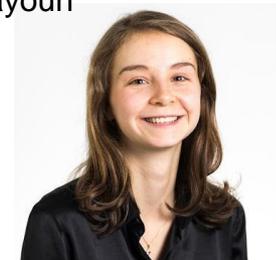
Bruno Berthel



Vincent Fridrici



Stéphane Benayoun



Sarah Pragnère

Bibliographie succincte

- F. Sidoroff. Mécanique des milieux continus. ECL 2010 (disponible sur HAL)
- F. Sidoroff. <http://sitasido.ec-lyon.fr>

- P. Germain et P. Muller. Introduction à la mécanique des milieux continus, 2^e édition. Masson 1997
- J. Lemaître, J.-L. Chaboche, A. Benallal, R. Desmorat. Mécanique des matériaux solides, 3^e ed.. Dunod 2009
- L. Chevalier. Mécanique des systèmes et des milieux déformables. Ellipses 2004

- J. Lemaître, P.-A. Boucard et F. Hild. Résistance mécanique des solides. Dunod 2007