



ÉCOLE
CENTRALE LYON

Cours 2

Comment décrire les mouvements d'un milieu continu ? Représentation mathématique des déformations

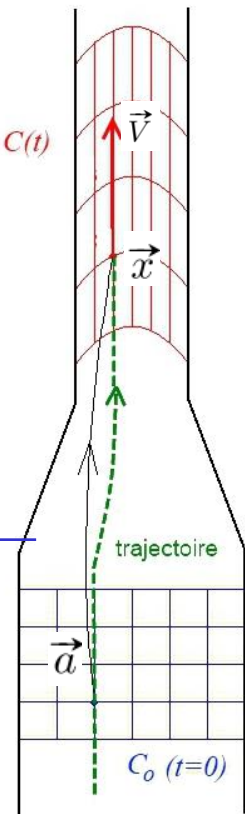
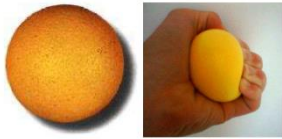
Cours du 08/09/2017 - L. Blanc

Plan du cours

- A. **Rappel des différences entre formalismes eulérien et lagrangien**
- B. **Déformations en petites perturbations (HPP)**
- C. **Aspects expérimentaux : l'extensométrie**

A. Rappel des différences entre formalismes eulérien et lagrangien

Une question de point de vue



- Le dilemme : suivre une particule matérielle ou observer un point géométrique ?
 - Chaque point matériel est nommé par ses coordonnées initiales $\vec{a}$, ces coordonnées, appelées matérielles, sont intrinsèques à la particule
 - Par contre les coordonnées spatiales $\vec{x}$ de la particule évoluent avec le temps et définissent sa trajectoire
 - Le mouvement est complètement défini par la relation entre $\vec{a}$ et $\vec{x}$. Elle est bijective car deux points matériels différents ne peuvent occuper la même position spatiale au même t

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{a}, t)$$

- Deux jeux de variables sont possibles

- Lagrange : $(\vec{a}, t)$, adaptées aux solides déformables, on travaille souvent en déplacements

$$\begin{aligned}\vec{u}^l(\vec{a}, t) &= \vec{x}(\vec{a}, t) - \vec{a} \\ \vec{V}^l &= \vec{V}^l(\vec{a}, t) = \frac{d}{dt} \vec{u}^l(\vec{a}, t) = \frac{\partial \vec{u}^l}{\partial t} = \dot{\vec{u}}^l\end{aligned}$$

- Euler : $(\vec{x}, t)$, adaptées aux fluides, on travaille souvent en vitesses

$$\vec{V}^e = \vec{V}^e(\vec{x}(\vec{a}, t), t)$$

Plan du cours

- A. Rappel des différences entre formalismes eulérien et lagrangien
- B. Déformations en petites perturbations (HPP)
- C. Aspects expérimentaux : l'extensométrie

B. Déformations en petites perturbations (HPP)

L'hypothèse des petites perturbations

Une cinématique linéarisée qui simplifie la résolution finale

- Idée générale

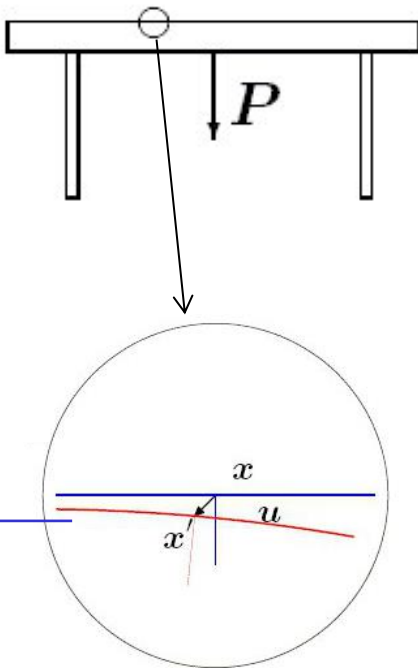
- Le solide s'écarte peu de sa configuration de référence
- Déplacements et déformations restent « petits » (et aussi : petites rotations)

- Conséquences

- « petits déplacements » : équivalence des variables de Lagrange a_i et variables d'Euler x_i
 - Intérêt pour le calcul des efforts intérieurs et des chargements imposés, sur la config. de référence et pas la config. déformée
- « petites déformations » : les termes d'ordre supérieur en u_i et ses dérivées sont négligés
 - On linéarise autour de la config. de référence, supposée naturelle = libre de contraintes)

$$\|\vec{u}(\vec{a}, t)\| \ll L \quad \text{et} \quad \vec{a} \approx \vec{x}$$

$$\|\overline{\text{grad}}_{\vec{a}} \vec{u}\| = \text{Max}_{(i,j)} \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \right| \right) \ll 1$$



B. Déformations en petites perturbations (HPP)

L'hypothèse des petites perturbations

Exemples pratiques d'applicabilité / non applicabilité des HPP



- Quelques ordres de grandeur

- On se limite aux premiers termes des développements en série de Taylor
- $|\varepsilon_{ij}| < 2 \text{ à } 5 \cdot 10^{-2}$
- $\left| \frac{u_i}{L} \right| < 10^{-2}$

- Exemples de cas où les HPP sont valides

- Immeuble non chargé / immeuble chargé par la gravité, le vent
- Déplacements des bâtiments lors d'un séisme, malgré les dégats possibles (HPP indép. des efforts)
- Mise en extension d'une éprouvette jusqu'à l'entrée dans le domaine plastique
- ...

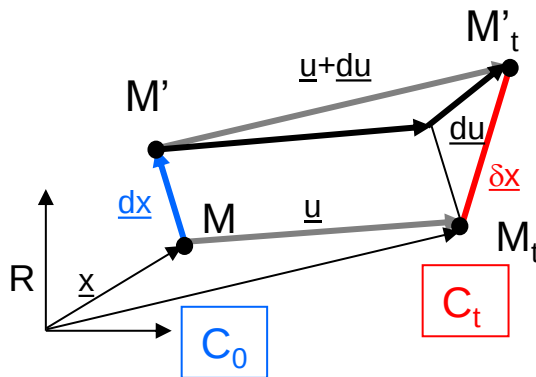
- Exemples de cas où les HPP sont mises en défaut

- Déformation d'un plongeur sous l'action du nageur
- Mise en forme d'une canette à partir d'une tôle
- Striction d'une éprouvette lors d'un essai de traction
- ...

B. Déformations en petites perturbations (HPP)

Propriétés du tenseur linéarisé des déformations

Décomposition du tenseur gradient des déplacements en rotation + déformation pure



- On considère le mouvement au voisinage d'un point M

$$\left(\overrightarrow{M'M_t} \right)_i = u_i(x + dx) = u_i + du_i = u_i(x) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) dx_j = u_i + U_{i,j} dx_j$$

- Le gradient du déplacement est partagé en parties sym. / antisym.

$$\left(\overrightarrow{M'M_t} \right)_i = u_i + \omega_{ij} dx_j + \varepsilon_{ij} dx_j$$
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i})$$

B. Déformations en petites perturbations (HPP)

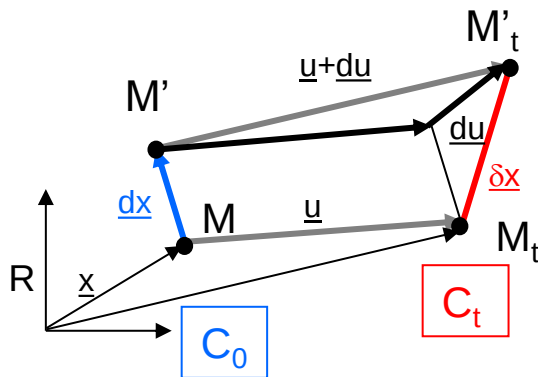
Propriétés du tenseur linéarisé des déformations

Décomposition du tenseur gradient des déplacements en rotation + déformation pure

- On reconnaît un opérateur de rotation

$$\omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_{ij} dx_j = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_2 dx_3 - \omega_3 dx_2 \\ \omega_3 dx_1 - \omega_1 dx_3 \\ \omega_1 dx_2 - \omega_2 dx_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}$$



- Le mouvement du voisinage d'un point M se compose d'une translation, d'une rotation et d'une déformation « pure »

$$\overrightarrow{M'M'_t} = \underbrace{\vec{u}}_{\text{translation}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{dx}}_{\text{rotation}} + \underbrace{\varepsilon \vec{dx}}_{\text{déformation pure}}$$

mouvement rigidifiant

B. Déformations en petites perturbations (HPP)

Propriétés du tenseur linéarisé des déformations

Interprétation physique des ε_{ij}

- Le tenseur des déformations linéarisé est l'application linéaire qui lie $\vec{\varepsilon}$ à $\vec{n}$

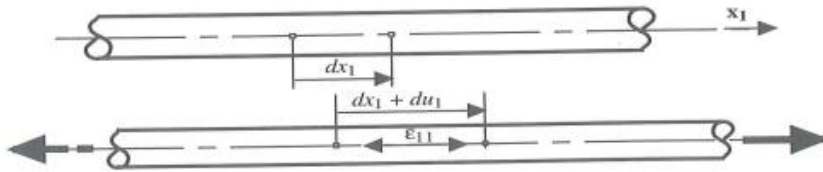
$$\vec{\varepsilon}(M, \vec{n}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}_{\mathbb{R}}$$

$\vec{\varepsilon}(\vec{x}_1) \quad \vec{\varepsilon}(\vec{x}_2) \quad \vec{\varepsilon}(\vec{x}_3) \quad \vec{n}$

B. Déformations en petites perturbations (HPP)

Propriétés du tenseur linéarisé des déformations

Interprétation physique des ε_{ij}



- Illustration graphique pour un milieu continu élémentaire (déf. homogène)

$$\varepsilon(\vec{e}_1) = \varepsilon_{11} = \vec{e}_1 \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \vec{e}_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

- Signification physique des composantes de ε

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}_{\mathbb{R}}$$

Déformations normales,
allongements ou dilatations

Exercice

Évaluer la déformation moyenne de traction subie par une lanière de l'élastomère de la figure 2.2 pour laquelle les points matériels représentés par des croix avant et après déformation ont été repérés par une technique de corrélation d'images explicitée au chapitre 4.

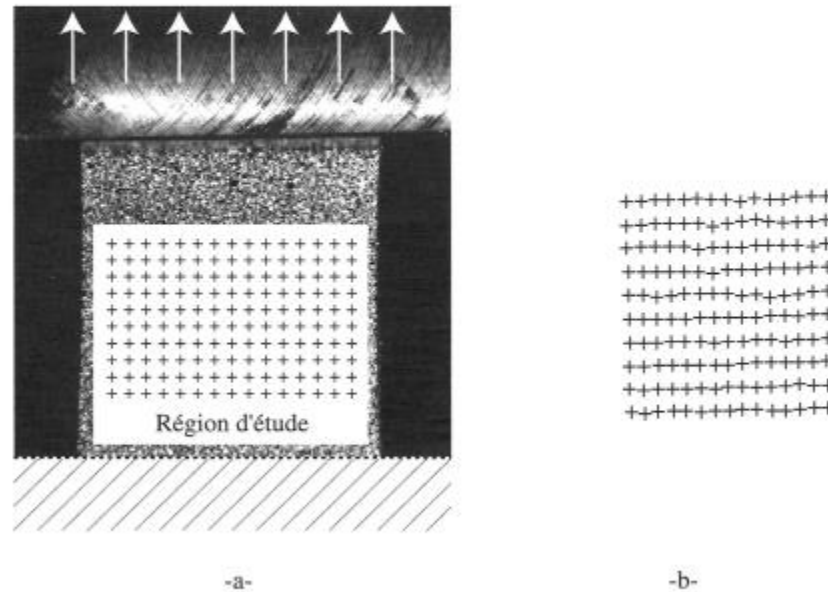
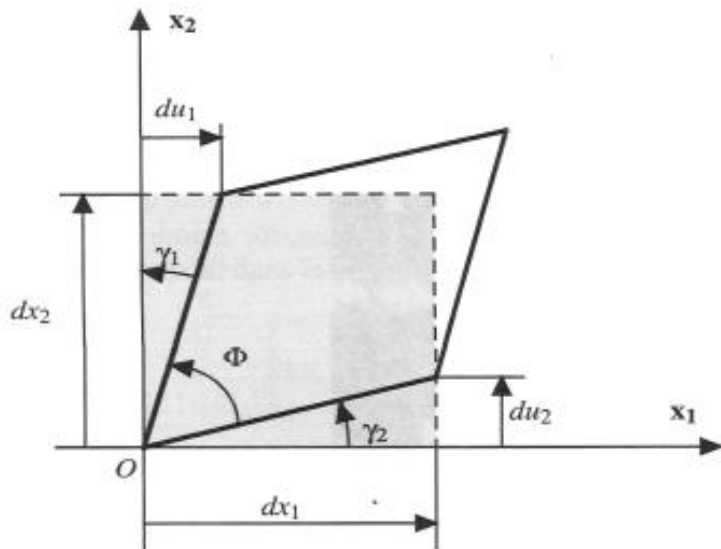


Figure 2.2 a) Vue partielle d'une lanière en élastomère et région d'étude avec l'ensemble des points de mesure. b) Points dans la configuration déformée lors d'un essai de traction.

B. Déformations en petites perturbations (HPP)

Propriétés du tenseur linéarisé des déformations

Interprétation physique des ε_{ij}



- Illustration graphique pour un milieu continu élémentaire (déf. homogène)

$$\gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \vec{e}_1 \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \vec{e}_2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

- Signification physique des composantes de ε

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}_R$$

Déformations tangentielles,
glissements

Exercice

Exemple. La figure 2.4 montre le principe de l'essai ARCAN en cisaillement sur une tôle en acier. Les points de mesure sont tracés dans leur configuration de référence et dans la configuration déformée. On remarque que seul un glissement dans la direction verticale a été obtenu. Un angle d'environ 20° est relevé. On en conclut Déterminer la déformation tangentielle associée.

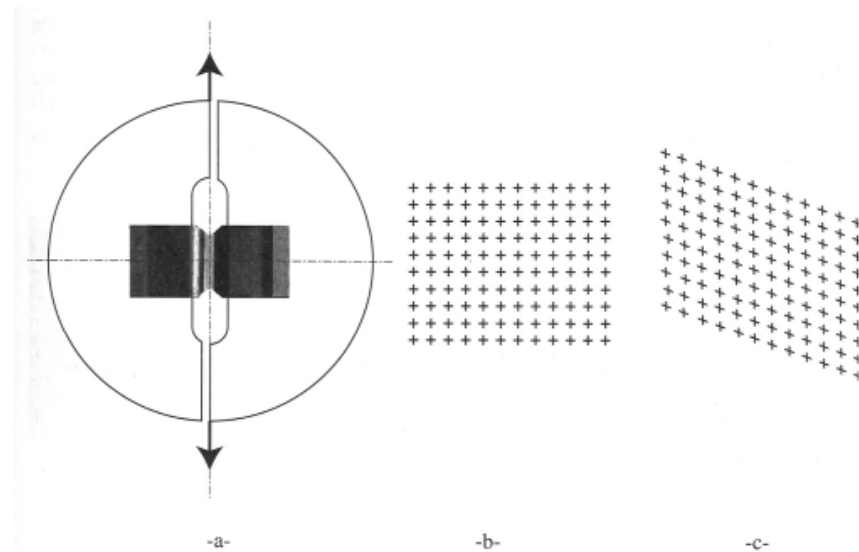
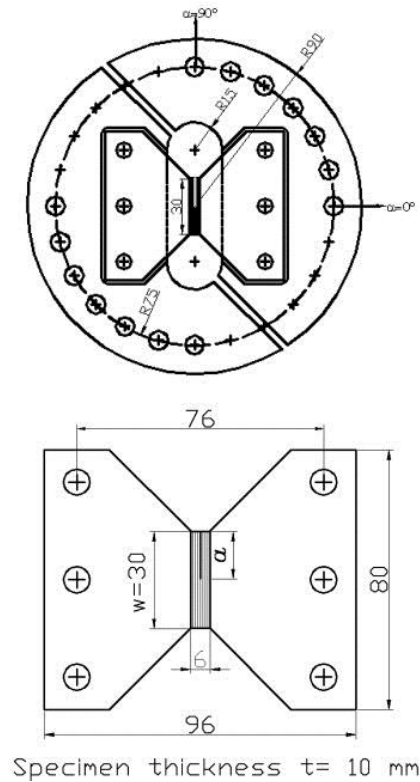


Figure 2.4 a) Schéma d'un montage ARCAN pour l'étude du comportement en cisaillement de tôles en acier ou en matériau composite ; b) points de mesure dans leur configuration de référence ; c) points de mesure dans la configuration déformée.

B. Déformations en petites perturbations (HPP)

Propriétés du tenseur linéarisé des déformations

Invariants. L'expression de $\underline{\underline{\varepsilon}}(M)$ dépend du repère... interpréter utilement $\underline{\underline{\varepsilon}}$ par l'analyse spectrale

- ε étant symétrique on peut le diagonaliser

- l'équation caractéristique s'écrit

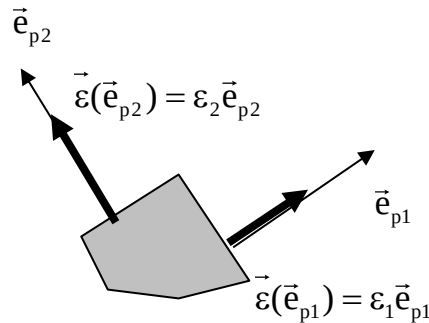
$$\det \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \lambda & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} - \lambda & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} - \lambda \end{bmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} = 0$$

- 3 directions principales orthogonales sont associées à 3 valeurs propres appelées déformations principales telles que

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \vec{e}_{p1} = \varepsilon_1 \vec{e}_{p1} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} \vec{e}_{p2} = \varepsilon_2 \vec{e}_{p2} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} \vec{e}_{p3} = \varepsilon_3 \vec{e}_{p3}$$

- dans la base principale $\underline{\underline{\varepsilon}}$ s'écrit

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{p1}, \vec{e}_{p2}, \vec{e}_{p3})}$$



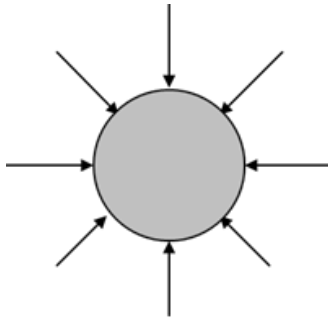
- les 3 facettes dont les normales sont directions principales ne subissent pas de glissement et sont donc en allongement pur

- On montre que les allongements extrémaux sont des directions principales
→ intérêt pour l'orientation de capteurs de déformation

B. Déformations en petites perturbations (HPP)

Propriétés du tenseur linéarisé des déformations

Invariants mathématiques. Décomposition en partie sphérique et déviatorique



- un état de déformation intéressant : la dilatation uniforme

- les 3 déformations principales sont égales et toutes les bases orthogonales sont principales

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}_{(-,-,-)}$$

- ce tenseur est dit sphérique, c'est l'état dans un fluide à l'équilibre sous pression uniforme

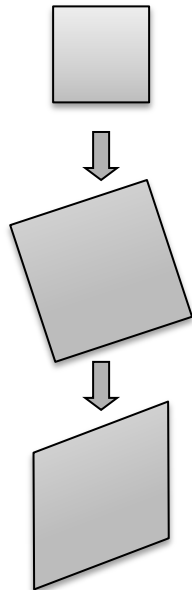
- on appelle partie sphérique d'un tenseur quelconque

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_S = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} = \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

- la partie déviatorique du tenseur quelconque de départ est alors

$$\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_S$$

- la trace de la partie déviatorique est nulle
- cet état correspond à une distorsion (= déformation sans changement de volume)
- ses directions principales sont les mêmes que celles du tenseur de départ
- Intérêt : pour l'étude des matériaux insensibles à la pression hydrostatique mais sensibles au cisaillement, comme les métaux



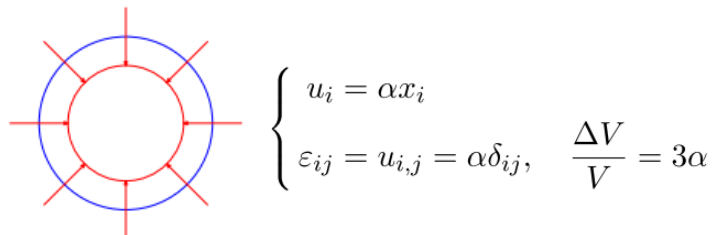
dilatation isotrope
sans changement
de forme

modification de
forme à volume
constant

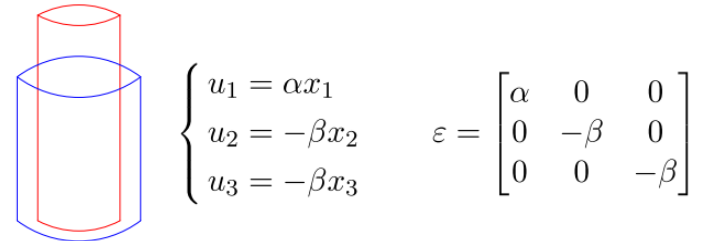
B. Déformations en petites perturbations (HPP)

Exemples d'état de déformation homogène remarquables

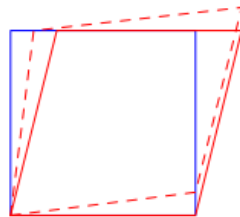
• Dilatation uniforme



• Extension simple



• Glissement simple

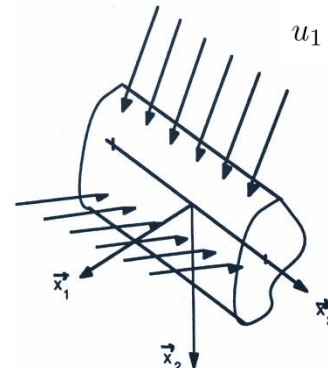


$$\begin{cases} u_1 = \gamma x_1 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases} \quad u'_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ -\frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-\gamma}{2} \end{bmatrix}$$

• Déformation plane

- Hypothèse faite pour des pièces longues ou des pièces dont on bloque le déplacement selon $\vec{x}_3$ aux extrémités
- Le chargement est dans le plan $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ et indépendant de x_3



$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0$$

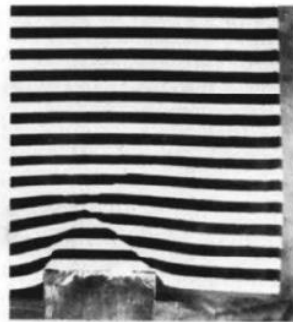
$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Plan du cours

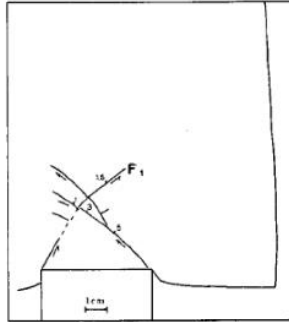
- A. Rappel des différences entre formalismes eulérien et lagrangien
- B. Déformations en petites perturbations (HPP)
- C. Aspects expérimentaux : l'extensométrie

C. Aspects expérimentaux : l'extensométrie

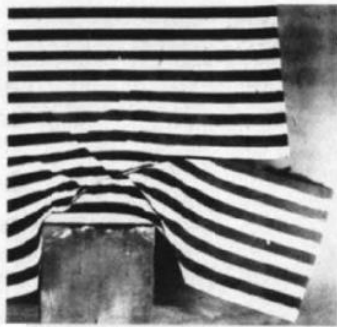
La méthode des grilles



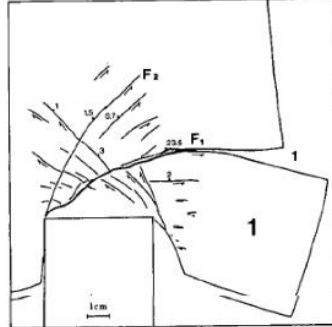
A1



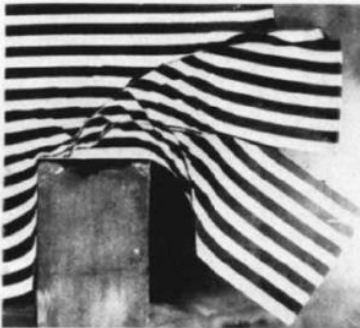
A2



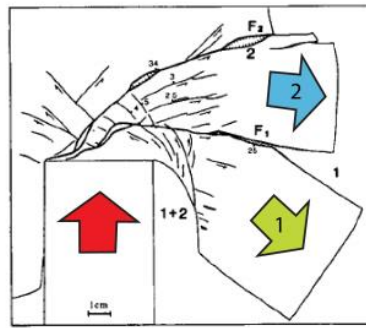
B1



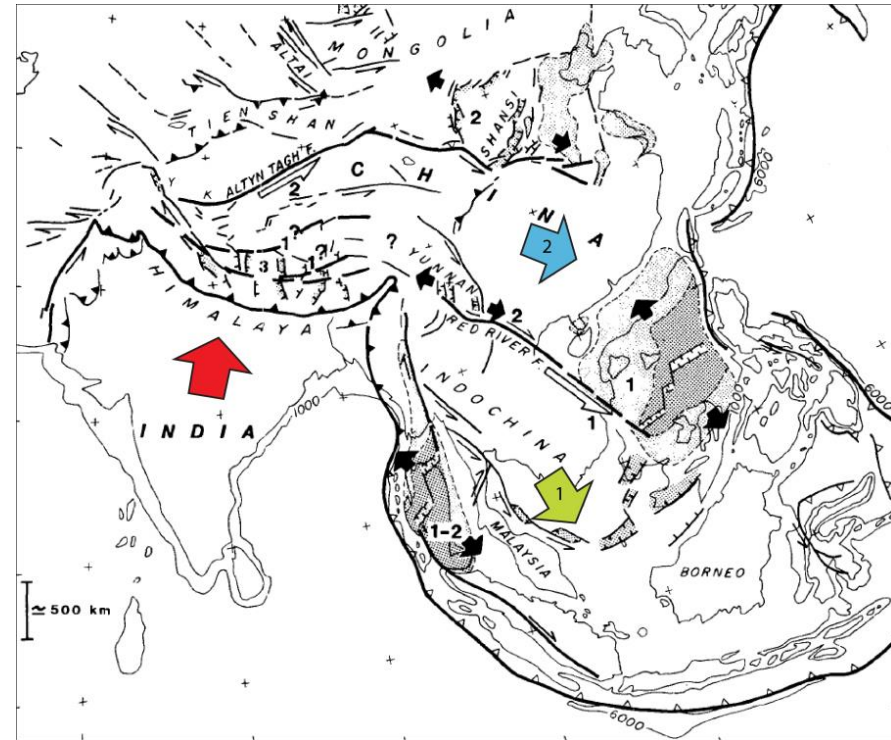
B2



C1



C2



C. Aspects expérimentaux : l'extensométrie

Jauges d'extensométrie, rosettes

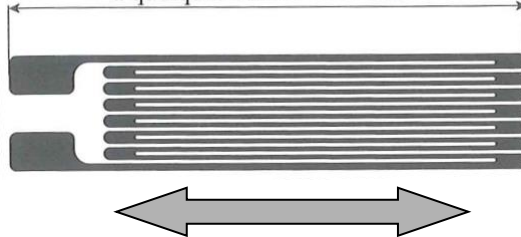
vu
en TP

- Jauge unidirectionnelle

- mesure un allongement, déduit d'une variation de résistance liée à la variation de section du fil

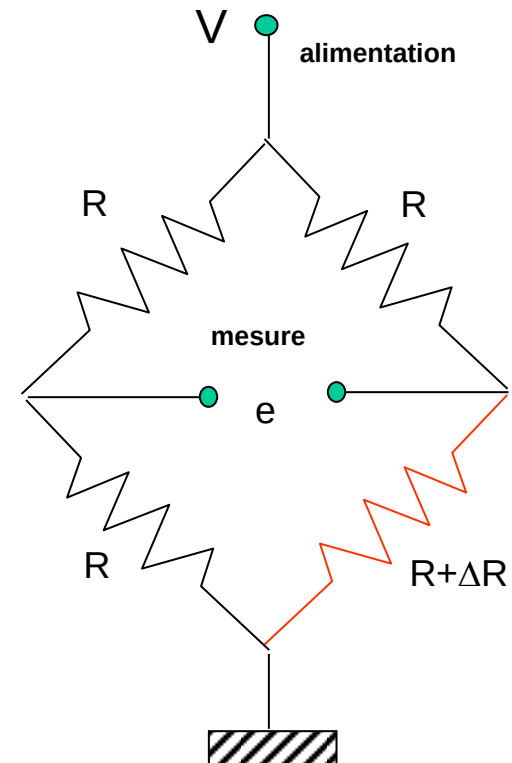
$$\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon \quad \text{avec} \quad \frac{\Delta R}{R} = K \frac{\Delta L}{L}$$

de quelques dixièmes de mm
à quelques dizaines de mm



- K : facteur de jauge ≈ 2 ; R : résistance électrique 120 Ω ou 350 Ω
- utilisation d'un pont de Wheatstone (plusieurs montages sont possibles)

$$e = \frac{V}{4} \frac{\Delta R}{R}$$



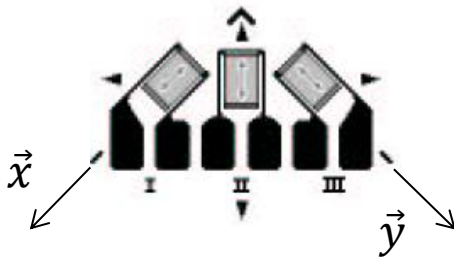
C. Aspects expérimentaux : l'extensométrie

Jauges d'extensométrie, rosettes

vu
en TP

Rosette à 45°

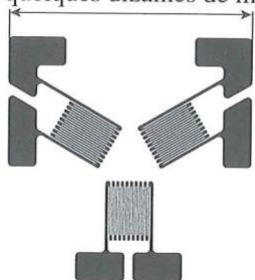
- mesure dans un plan (à la surface d'une pièce) de 3 allongements (indépendants), on les utilise pour résoudre un système de 3 équations donnant ε_{xx} , ε_{xy} et ε_{yy}



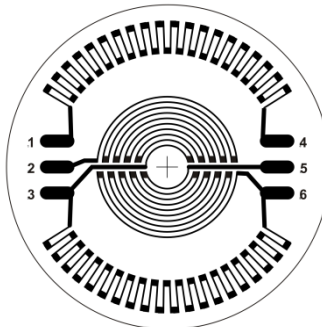
$$\begin{aligned}\varepsilon_I &= (\varepsilon \vec{x}) \cdot \vec{x} = \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{II} &= \left[\varepsilon \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{x} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{y} \right) \right] \cdot \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{x} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{y} \right) \right) = (\varepsilon_{xx} + 2\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yy})/2 \\ \varepsilon_{III} &= (\varepsilon \vec{y}) \cdot \vec{y} = \varepsilon_{yy}\end{aligned}$$

• Rosette à 60°

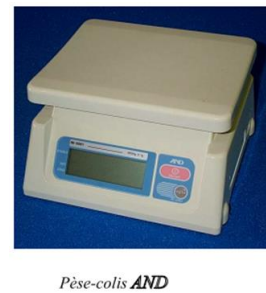
de quelques mm
à quelques dizaines de mm



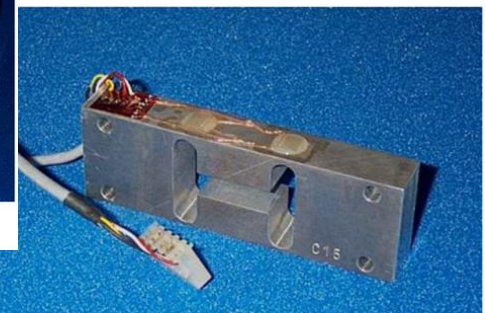
• Capteur de pression



• Capteur de poids



Pèse-colis AND



Corps d'épreuve du pèse-colis

Exercice

Sur une face plane de normale z d'un solide élastique isotrope, on dispose une rosette constituée de 3 jauges de déformation orientées à 120 degrés les unes des autres. Les caractéristiques du matériau sont : module de Young $E = 210\,000$ MPa, coefficient de Poisson $\nu = 0,3$. La face de mesure est libre de tout effort.

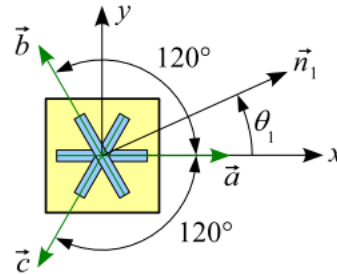


Figure 7. Configuration de la rosette étudiée (<http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>)

On relève les allongements relatifs mesurés par chaque jauge :

$$\varepsilon_a = -900 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_b = 400 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_c = -50 \cdot 10^{-6}$$

1. Calculer les composantes de la matrice des déformations dans le repère (x,y,z) .
Application numérique.
2. ~~A l'aide de la relation de comportement, exprimer la matrice des contraintes.~~
3. ~~Exprimer la condition d'effort nul à la surface de la pièce.~~
4. ~~En déduire la déformation normale dans la direction z . Application numérique.~~

C. Aspects expérimentaux : l'extensométrie

Techniques d'intercorrélation d'images

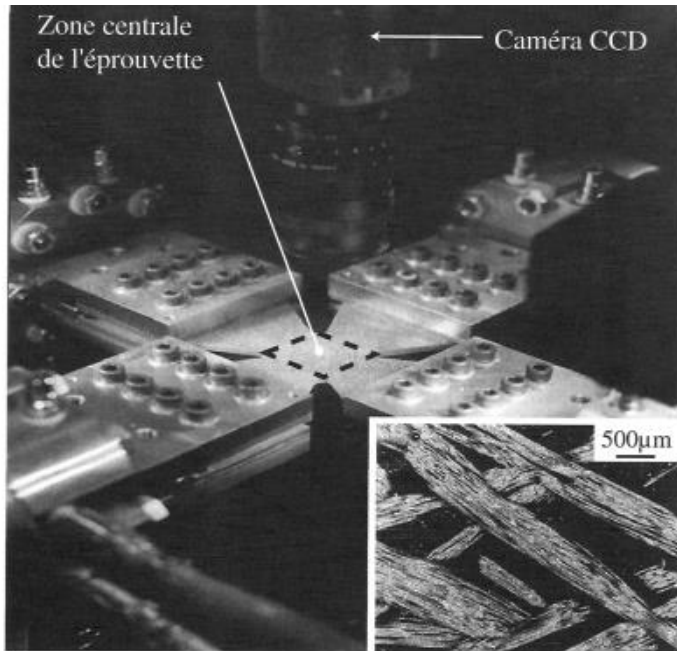


Figure 4.10 Plaque en croix étirée dans deux directions perpendiculaires à l'aide de quatre vérins d'une machine multiaxiale ASTREE et microstructure du composite étudié.

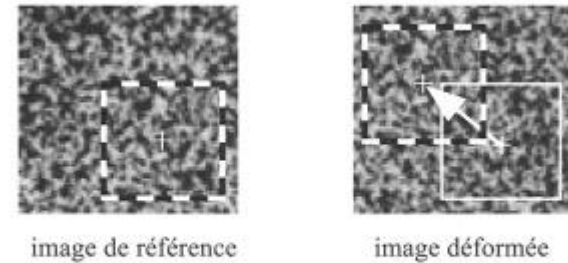


Figure 4.7 Zones d'étude sur une image de référence et sur une image « déformée ». Vecteur déplacement déterminé par intercorrélation.

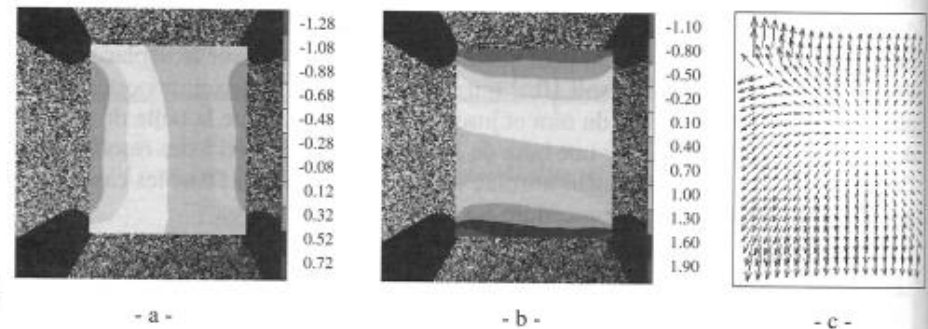
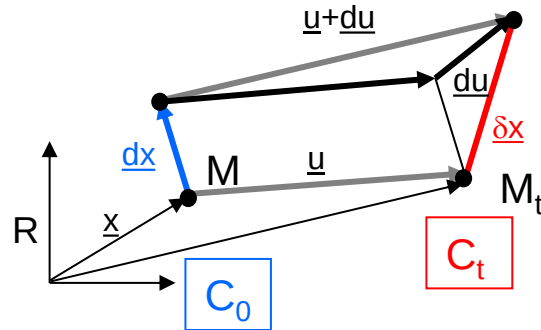


Figure 4.11 a) Champ de déplacement vertical exprimé en pixels (avec 1 pixel = 44 µm) de la zone centrale de la plaque mesuré par corrélation d'images numériques. b) Champ de déplacement horizontal. c) Vecteurs déplacements plans amplifiés 50 fois correspondant à un niveau d'effort très proche de la rupture.

A retenir (1/2)



• Notations

- $\vec{a}$ vecteur position de M dans la config. de réf.
- $\vec{x}$ vecteur position du transformé de M , M_t
- le mouvement est décrit par la fonction

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{a}, t)$$

• Tenseur linéarisé des déformations

HPP / petites défs

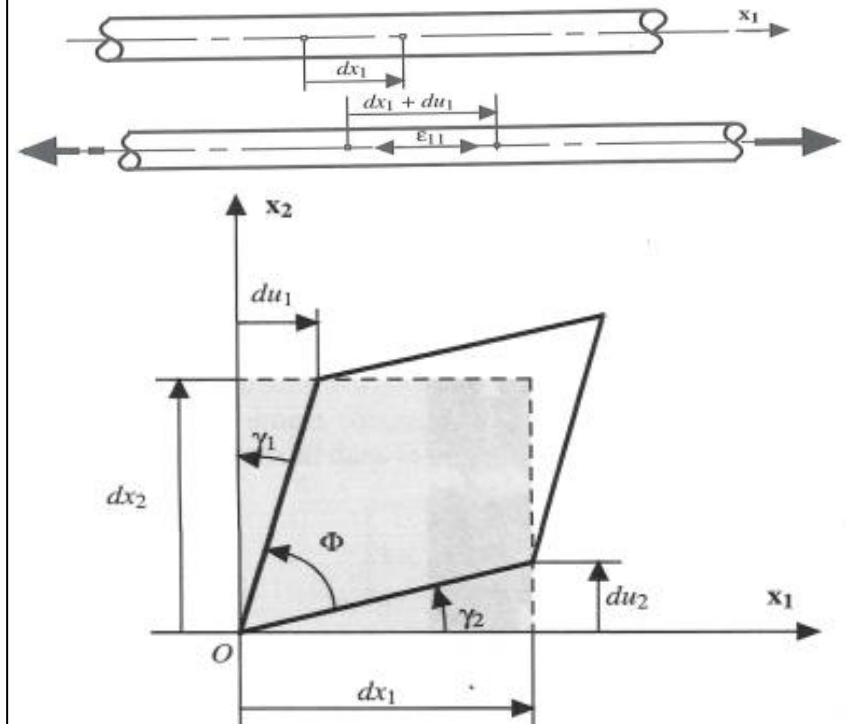
$$\|\overline{\overline{\text{grad}_{\vec{a}} \vec{u}}}\| \ll 1$$

HPP / petits dépl.

$$\|\vec{u}(\vec{a}, t)\| \ll L \quad \text{et} \quad \vec{a} \approx \vec{x}$$

$$\frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\text{grad}_{\vec{x}} \vec{u}}} + \left(\overline{\overline{\text{grad}_{\vec{x}} \vec{u}}} \right)^T \right) = \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{x}, t)$$

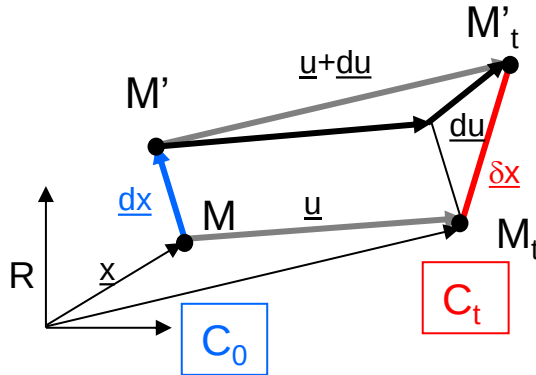
• Interprétations



$$\epsilon(\vec{e}_1) = \epsilon_{11} = \vec{e}_1 \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \vec{e}_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$\gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \gamma_{12} = 2\epsilon_{12} = \vec{e}_1 \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \vec{e}_2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

A retenir (2/2)



- **Décomposition du tenseur linéarisé des déformations**

$$\left(\overrightarrow{M'M'_t}\right)_i = u_i(x + dx) = u_i(x) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) dx_j$$

$$\left(\overrightarrow{M'M_t'}\right)_i = u_i + \omega_{ij} dx_j + \varepsilon_{ij} dx_j$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$$

$$\omega_{ij} dx_j = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_2 dx_3 - \omega_3 dx_2 \\ \omega_3 dx_1 - \omega_1 dx_3 \\ \omega_1 dx_2 - \omega_2 dx_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{M'M'_t} = \underbrace{\underbrace{\vec{u}}_{\text{translation}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge d\vec{x}}_{\text{rotation}}}_{\text{mouvement rigifiant}} + \underbrace{\varepsilon d\vec{x}}_{\text{déformation pure}}$$