

---

**Cours 3**  
**Comment relier les contraintes et les déformations ?**  
**Les lois de comportement**

---

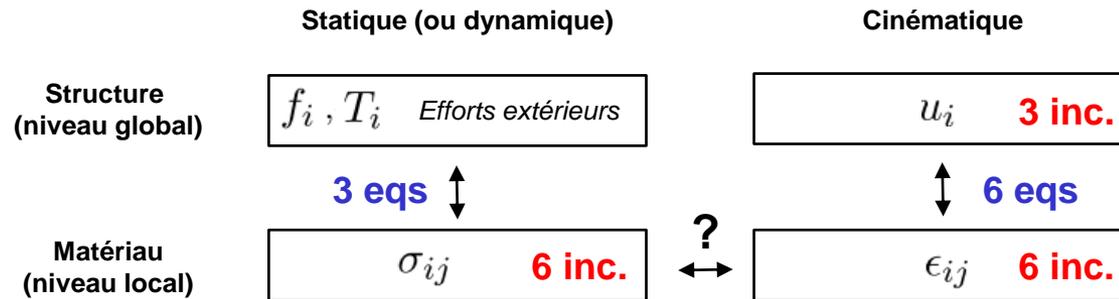
Cours du 08/09/2017 - L. Blanc

## Plan du cours 3

- A. **Le besoin : boucler le système d'équations**
- B. **Ce que nous apprennent les essais classiques, aspects expérimentaux**
- C. **Formalisation du modèle de base : comportement élastique linéaire**

# A. Le besoin : boucler le système d'équations

## Bilan équationnel



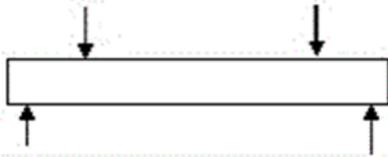
- La relation de comportement fournit les 6 équations manquantes
  - elle permet de calculer les contraintes en fonction des déformations (et inversement)
- Elle est particulière à un matériau ou à une famille de matériaux
  - elle est par nature d'origine expérimentale

## Plan du cours 3

- A. Le besoin : boucler le système d'équations
- B. Ce que nous apprennent les essais classiques, aspects expérimentaux
- C. Formalisation du modèle de base : comportement élastique linéaire

## B. Ce que nous apprennent les essais classiques

### Points généraux, à garder à l'esprit



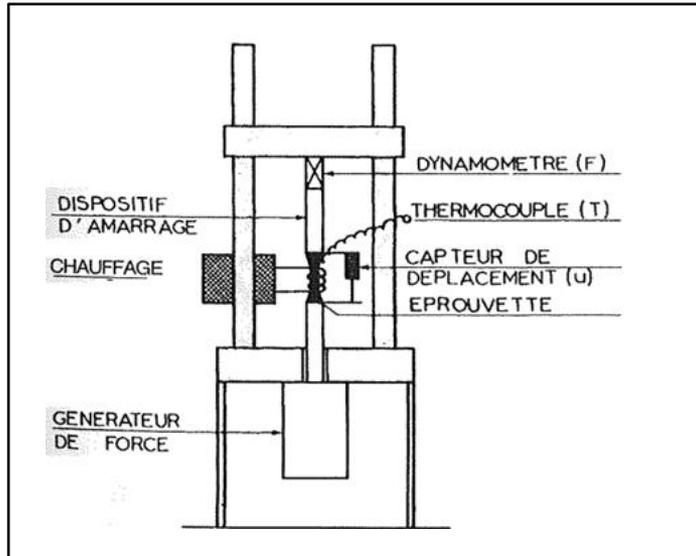
- Les essais les plus simples à interpréter : les essais homogènes (  $\underline{\underline{\epsilon}}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$  constants dans la zone d'intérêt, assimilée à un élément de volume)
- Les points difficiles lors de l'étude d'un nouveau matériau :
  - Le choix de la loi de comportement « juste nécessaire »
  - Le choix de l'essai ou de la séquence d'essais :
    - essai standard ou conception d'un nouvel essai ?
    - choix de la taille des éprouvettes (lié au VER)...
- Les points difficiles lors de la mise en œuvre d'un essai :
  - maîtrise des effets de bord
  - maîtrise de l'environnement (température, hygrométrie) et des conditions de chargement (vitesse d'application, cyclicité)
  - Le respect strict du protocole, de la norme si elle existe : répétabilité
  - Les aspects statistiques dans le traitement des données

# B. Ce que nous apprennent les essais classiques

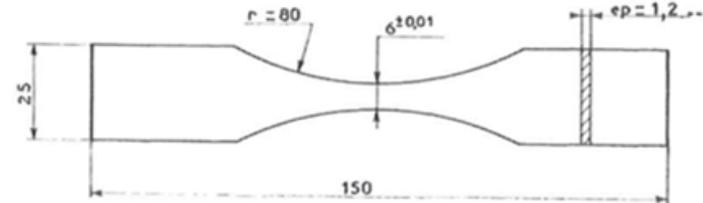
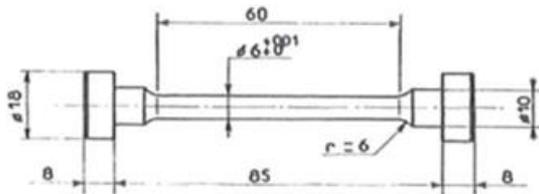
## Élément sur les techniques d'expérimentation

Machines d'essais et éprouvettes, ce qu'il y a « autour de la zone d'intérêt »

### Essai de traction



$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \Delta l(t)/l & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_T(t) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_T(t) \end{bmatrix} \leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} F(t)/S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

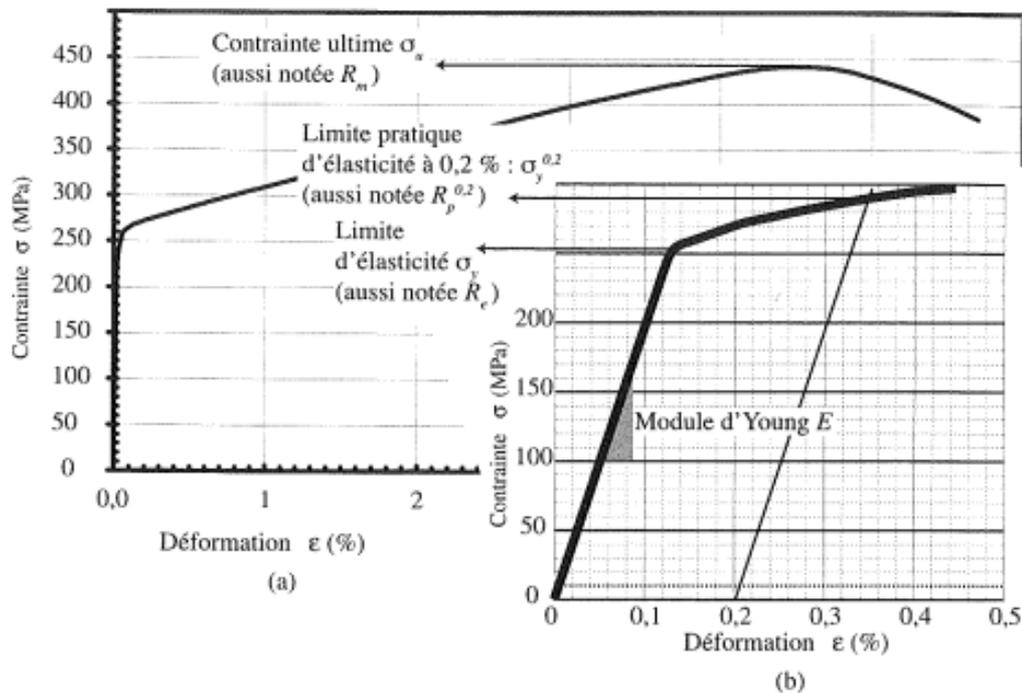


## B. Ce que nous apprennent les essais classiques

### Élément sur les techniques d'expérimentation

Machines d'essais et éprouvettes, ce qu'il y a « autour de la zone d'intérêt »

#### Essai de traction



Courbe de traction d'un acier inoxydable 316

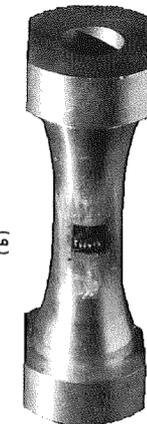
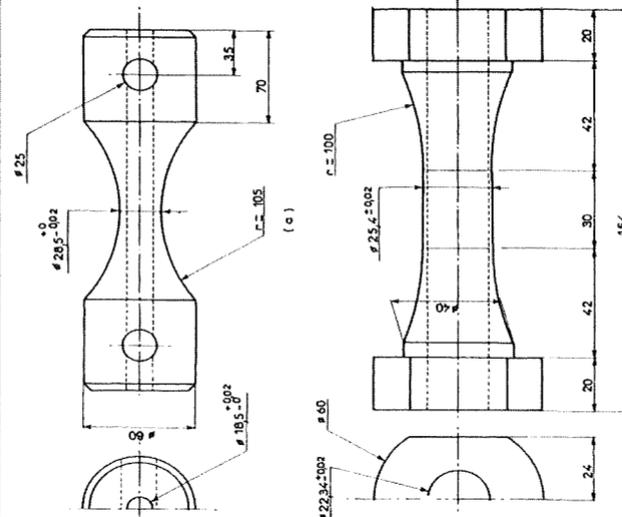
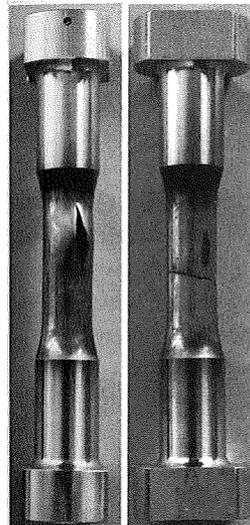
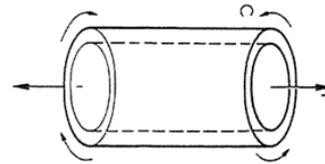
a- jusqu'à rupture ; b- au voisinage de la limite d'élasticité

# B. Ce que nous apprennent les essais classiques

## Élément sur les techniques d'expérimentation

Machines d'essais et éprouvettes, ce qu'il y a « autour de la zone d'intérêt »

### Essai de torsion - traction

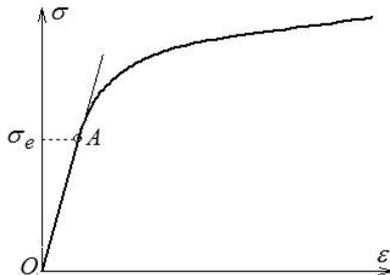
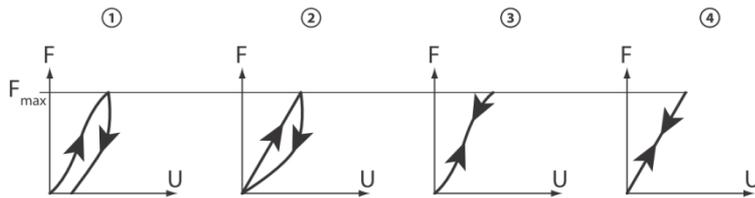


## Plan du cours 3

- A. **Le besoin : boucler le système d'équations**
- B. **Ce que nous apprennent les essais classiques, aspects expérimentaux**
- C. **Formalisation du modèle de base : comportement élastique linéaire**

# C. Formalisation du modèle de base : élastique linéaire

## Phénoménologie du comportement élastique (rappel)



### • Définition

- le matériau retrouve entièrement sa forme après un cycle de charge-décharge quelconque
- Implication 1 : réversibilité totale
- Implication 2 : il n'y a pas de dissipation d'énergie

### • Exemple : charge-décharge de différents ressorts

- 1 : non élastique, pas de retour dans la configuration initiale
- 2 : non élastique, chemins aller et retour différents
- 3 : élastique non-linéaire
- 4 : élastique linéaire

# C. Formalisation du modèle de base : élastique linéaire

## Identification des termes du tenseur d'élasticité

### Loi de Hooke 3D pour les matériaux ISOTROPES

- 2 coefficients à identifier
- essais présentés
  - Traction simple
  - Cisaillement
- on va dépouiller les essais en utilisant la notation de Voigt :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} \\ \gamma_{31} = 2\varepsilon_{31} = 2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{pmatrix}$$

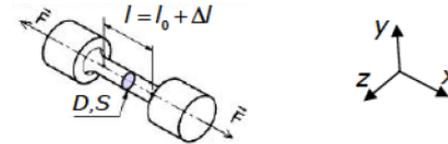
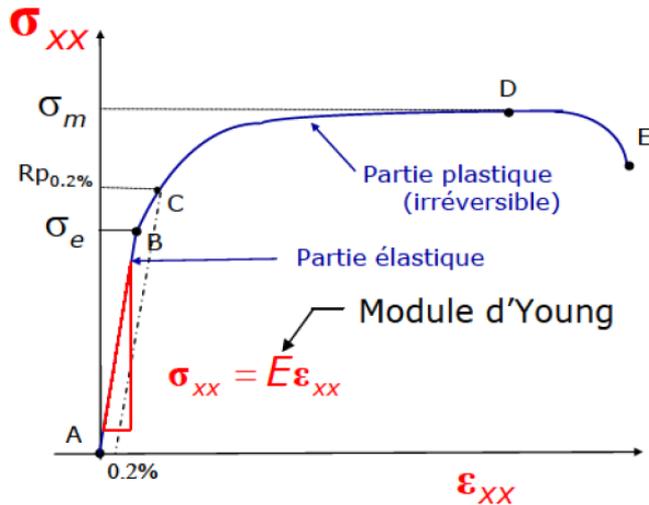
$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

# C. Formalisation du modèle de base : élastique linéaire

## Identification des termes du tenseur d'élasticité

### Loi de Hooke 3D pour les matériaux ISOTROPES. Essai de TRACTION

- Relation  $\sigma_{xx}$  et  $\epsilon_{xx}$



$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} = F(t)/S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_{xx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx}$$

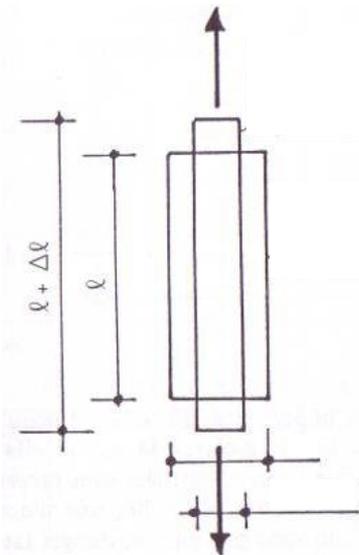
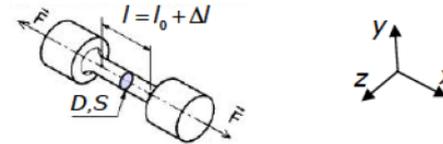
Module d'Young  $E$

# C. Formalisation du modèle de base : élastique linéaire

## Identification des termes du tenseur d'élasticité

### Loi de Hooke 3D pour les matériaux ISOTROPES. Essai de TRACTION

- Relation  $\sigma_{xx}$  et  $\epsilon_{xx}$



$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} = F(t)/S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_{xx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix}$$

Coefficient de Poisson  $\nu$

$$\nu = \frac{(D-D_0)/D_0}{(l-l_0)/l_0} = \frac{(D-D_0)/D_0}{\Delta l/l_0}$$

$$\nu = -\frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{yy}}$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx} \quad \epsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} \quad \epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx}$$

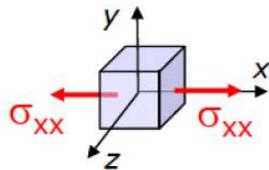
Coefficient de Poisson  $\nu$   
Module d'Young  $E$

# C. Formalisation du modèle de base : élastique linéaire

## Identification des termes du tenseur d'élasticité

### Loi de Hooke 3D pour les matériaux ISOTROPES. Essai de TRACTION

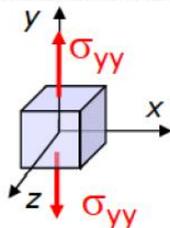
- Par analogie



$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx}$$

$$\epsilon_{yy} = -\nu \epsilon_{xx} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx}$$

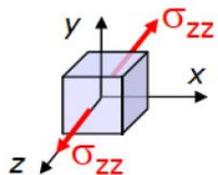
$$\epsilon_{zz} = -\nu \epsilon_{xx} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx}$$



$$\epsilon_{xx} = -\nu \epsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{yy}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} \sigma_{yy}$$

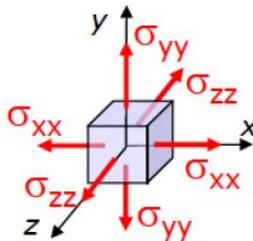
$$\epsilon_{zz} = -\nu \epsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{yy}$$



$$\epsilon_{xx} = -\nu \epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz}$$

$$\epsilon_{yy} = -\nu \epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} \sigma_{zz}$$



*Par combinaison et superposition des 3 chargements*

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy} - \nu \sigma_{zz})$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \nu \sigma_{zz})$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

## C. Formalisation du modèle de base : élastique linéaire

### Identification des termes du tenseur d'élasticité

Loi de Hooke 3D pour les matériaux ISOTROPES. Essai de TRACTION

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}) \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}) \quad \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix}$$

# C. Formalisation du modèle de base : élastique linéaire

## Identification des termes du tenseur d'élasticité

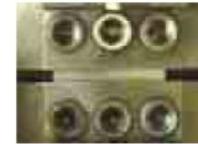
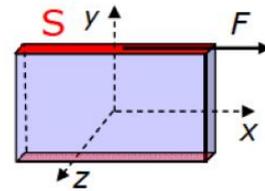
### Loi de Hooke 3D pour les matériaux ISOTROPES. Essai de CISAILEMENT

- Observation expérimentale
  - Force  $F$
  - Déformation  $\varepsilon_n$  (jauges)

$$\vec{F} = \int_S \vec{T} dS = \sigma_{xy} S \vec{e}_x$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{xy} = F/S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

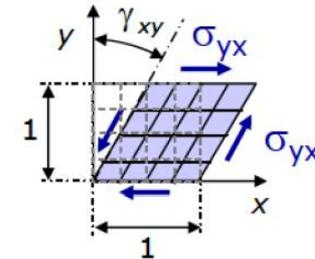
$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Eprouvette



Jauge



$$\sigma_{xy} = G \gamma_{xy}$$

Module de Coulomb (de cisaillement)  $G = \mu$

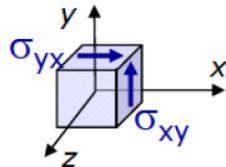
Propriété matériau isotrope  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

# C. Formalisation du modèle de base : élastique linéaire

## Identification des termes du tenseur d'élasticité

### Loi de Hooke 3D pour les matériaux ISOTROPES. Essai de CISAILEMENT

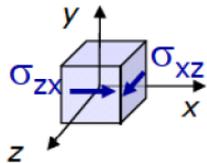
- Par analogie



$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{1}{G}\sigma_{xy}$$

0

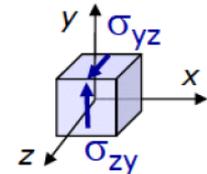
0



0

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{1}{G}\sigma_{xz}$$

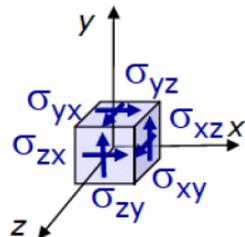
0



0

0

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{1}{G}\sigma_{yz}$$



*Par combinaison et superposition des 3 chargements*

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{1}{G}\sigma_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{1}{G}\sigma_{yz}$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{1}{G}\sigma_{xz}$$

# C. Formalisation du modèle de base : élastique linéaire

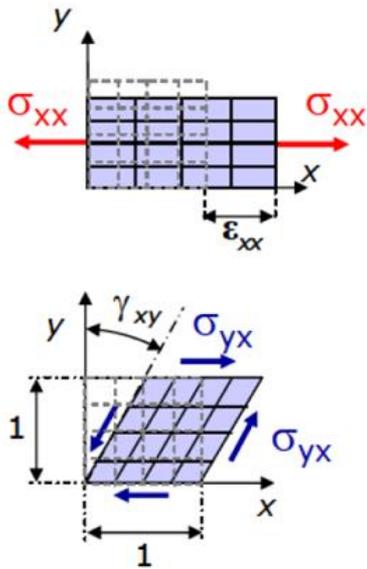
## Identification des termes du tenseur d'élasticité

### Loi de Hooke 3D pour les matériaux ISOTROPES. SYNTHÈSE

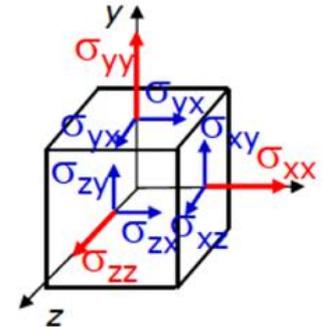
$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{1}{G}\sigma_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{1}{G}\sigma_{yz}$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{1}{G}\sigma_{xz}$$



$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix}$$



# C. Formalisation du modèle de base : élastique linéaire

## Identification des termes du tenseur d'élasticité

Loi de Hooke 3D pour les matériaux ISOTROPES. Ecriture compacte classique

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \left( \frac{\nu}{E} \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}}) \right) \mathbf{I} \quad \text{On montre que } \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$



**Loi de Hooke**

En raideur  $\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda \text{trace}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \mathbf{I}$

En souplesse  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2\mu} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}}) \mathbf{I}$

Coefficients de Lamé  
 $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$   
 $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$



Loi indépendante du repère

avec  $E > 0$     $-1 \leq \nu \leq 1/2$     $G > 0$     $K > 0$     $3\lambda + 2\mu > 0$

## C. Formalisation du modèle de base : élastique linéaire

### Identification des termes du tenseur d'élasticité

Quelques ordres de grandeurs physiques (à température ambiante...)

Matériaux	Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson
→ Acier de construction	210	0,285
Acier Inox 18-12	203	0,29
Fonte grise	90-120	0,29
Alliage TA6V	105	0,25
→ Aluminium	71	0,34
Zinc	78	0,21
Titane	105	0,34
Verre	60	0,25
→ Béton en compression	10-13	0,15
Caoutchouc	0,2	0,5
Bois (pin)	7	0,2
Marbre	26	0,3
Graphite	250-350	0,3-0,4
→ Elastomère	0,2	0,5

## C. Formalisation du modèle de base : élastique linéaire

### Critères de limite d'élasticité

#### Expressions

	$\sigma_{eq}$	$k$	
Rankine	$Max  \sigma_i $	Limite d'élasticité en traction	$\sigma_y$
Tresca	$\frac{1}{2} Max  \sigma_i - \sigma_j $	Limite d'élasticité en cisaillement	Pour les métaux : <b>0.5 à 0.8</b> $\times \sigma_y$
Von Mises	$\sqrt{\frac{3}{2} Tr(\underline{\underline{\sigma}}_D \underline{\underline{\sigma}}_D)}$	Limite d'élasticité en traction	$\sigma_y$

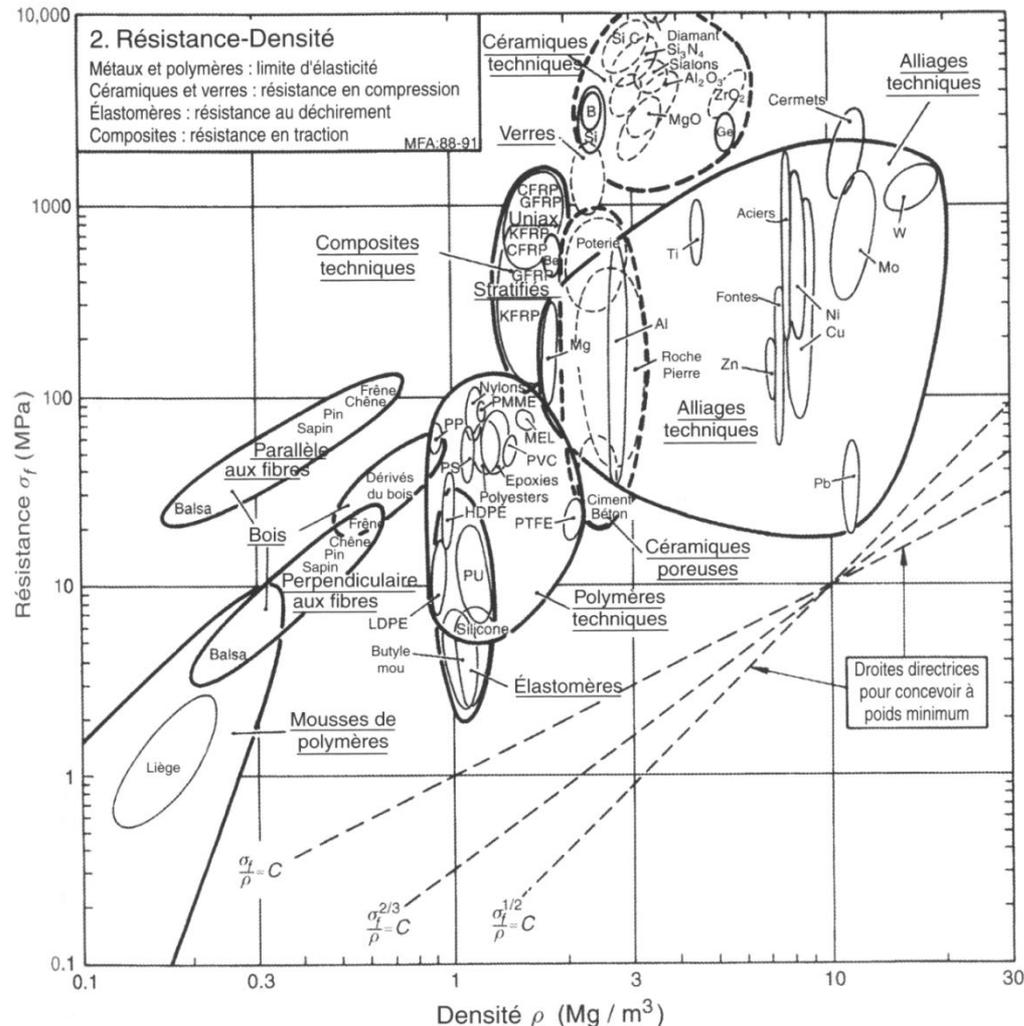
Autre écriture de  $\sigma_{eq}$  pour Von Mises :

$$\sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)}$$

# C. Formalisation du modèle de base : élastique linéaire

## Critères

### Limite d'élasticité : dispersion pour une même famille de matériaux



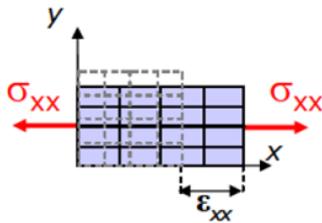
## A retenir

- Pour les matériaux isotropes

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \left( Tr \underline{\underline{\varepsilon}} \right) \mathbb{1} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$$

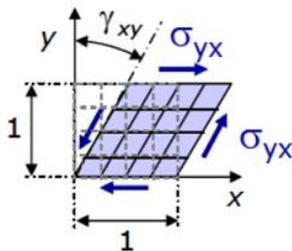
$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \left( \frac{\nu}{E} Tr \underline{\underline{\sigma}} \right) \mathbb{1}$$

- Le sens physique de  $E$ ,  $\nu$  et  $G$



$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}}$$



$$\sigma_{xy} = G \gamma_{xy}$$

- L'expression des critères de limite d'élasticité

	$\sigma_{eq}$	$k$
Rankine	$Max  \sigma_i $	Limite en traction
Tresca	$\frac{1}{2} Max  \sigma_i - \sigma_j $	Limite en cisaillement
Von Mises	$\sqrt{\frac{3}{2} Tr(\underline{\underline{\sigma}}_D \underline{\underline{\sigma}}_D)}$	Limite en traction

- Les ordres de grandeur de module d'Young, de coeffs de Poisson
- Retenir que  $G = \mu$