Solutions stables à l'infini de systèmes gradient : dynamique globale, exemples, et applications

Emmanuel Risler*

Université de Lyon, INSA de Lyon, CNRS UMR 5208, Institut Camille Jordan, 69100 Villeurbanne, France

18 avril 2022

On s'intéresse à la dynamique globale de solutions stables à l'infini de diverses classes de systèmes gradient :

- systèmes paraboliques en dimension un d'espace : $u_t = -\nabla V(u) + u_{xx}$,
- systèmes hyperboliques en dimension un d'espace : $\alpha u_{tt} + u_t = -\nabla V(u) + u_{xx}$,
- systèmes gouvernant les solutions radialement symétriques de systèmes paraboliques en dimension supérieure d'espace : $u_t = -\nabla V(u) + \frac{d-1}{r} u_r + u_{rr}$,
- systèmes paraboliques dans des cylindres.

Dans chaque cas, le comportement asymptotique global de ces solutions peut être précisément décrit et répond à la même phénoménologie : il fait intervenir des cascades de fronts bistables, et un pattern de solutions stationnaires en lente interaction répulsive. Ces résultats fournissent, entre autres, une extension aux systèmes des travaux de Fife et McLeod dans le cas scalaire, qui remontent à la fin des années 70. Ils sont basés sur le fait que les systèmes considérés présentent une structure de type gradient, non seulement dans un référentiel au repos, mais également dans tout référentiel en translation à une vitesse uniforme.

Ces résultats font appel à des hypothèses sur le potentiel qui peuvent être traduits en termes de transversalité des solutions stationnaires et fronts bistables. Le caractère générique de cette transversalité peut être rigoureusement démontré à l'aide du théorème de Sard–Smale et présente un intérêt en soi (travail en commun avec Romain Joly).

L'analyse de l'interaction à longue portée entre les éléments du pattern approché par une solution apporte des informations additionnelles, à la fois sur le résultat général et sa déclinaison sur des exemples.

*http://math.univ-lyon1.fr/~erisler/

Cette description de la dynamique du flot du gradient constitue une approche alternative pour la preuve de résultats de type « calcul des variations » (existence de solutions stationnaires et de fronts progressifs), certains classiques, d'autres nouveaux et parfois inattendus, dont on donnera quelques exemples.