

Chapitre XXII

PLAQUES ELASTIQUES

1. LOIS DE COMPORTEMENT

1.1 THEORIE NATURELLE DES PLAQUES

Dans la théorie générale des plaques, les efforts intérieurs sont caractérisés par deux tenseurs symétriques $N_{\alpha\beta}$ et $C_{\alpha\beta}$ et un vecteur Q_α , tandis que les déformations sont caractérisées par deux tenseurs symétriques $d_{\alpha\beta}$ et $k_{\alpha\beta}$ et un vecteur γ_α , ces quantités étant mises en dualité par le travail des efforts intérieurs (XXI.44)

$$(1) \quad \dot{W}_{int}^* = - \iint_S [N_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta} k_{\alpha\beta} + Q_\alpha \gamma_\alpha] dS$$

La loi de comportement des plaques élastiques s'obtiendra comme en MMC au § V.1.1 et en RDM au § XVI.1.1 par une relation linéaire entre les efforts intérieurs et les déformations, càd par une matrice 8x8. Comme en MMC et RDM, nous ferons sur cette matrice les deux hypothèses habituelles de symétrie et de positivité. Ceci nous permet d'introduire une énergie de déformation définie positive

$$(2) \quad \dot{w}^*(N_{\alpha\beta}, C_{\alpha\beta}, Q_\alpha) = w(d_{\alpha\beta}, k_{\alpha\beta}, \gamma_\alpha)$$

qui permet d'écrire les lois de comportement sous l'une des deux formes suivantes

$$(3) \quad d_{\alpha\beta} = \frac{\partial \dot{w}^*}{\partial N_{\alpha\beta}} \quad k_{\alpha\beta} = \frac{\partial \dot{w}^*}{\partial C_{\alpha\beta}} \quad \gamma_\alpha = \frac{\partial \dot{w}^*}{\partial Q_\alpha}$$

$$(4) \quad N_{\alpha\beta} = \frac{\partial w}{\partial d_{\alpha\beta}} \quad C_{\alpha\beta} = \frac{\partial w}{\partial k_{\alpha\beta}} \quad Q_\alpha = \frac{\partial w}{\partial \gamma_\alpha}$$

De manière plus détaillée, on peut par exemple écrire

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{w}^* = \frac{1}{2} A_{\alpha\beta\gamma\delta} N_{\alpha\beta} N_{\gamma\delta} &+ H_{\alpha\beta\gamma\delta} C_{\alpha\beta} N_{\gamma\delta} + \frac{1}{2} B_{\alpha\beta\gamma\delta} C_{\alpha\beta} C_{\gamma\delta} \\ &+ E_{\alpha\beta\gamma} N_{\alpha\beta} Q_\gamma + F_{\alpha\beta\gamma} C_{\alpha\beta} Q_\gamma + \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} Q_\alpha Q_\beta \end{aligned}$$

avec les relations de symétrie suivantes

$$(6) \quad \begin{cases} A_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_{\beta\alpha\gamma\delta} = A_{\alpha\beta\delta\gamma} = A_{\gamma\delta\alpha\beta} \\ H_{\alpha\beta\gamma\delta} = H_{\beta\alpha\gamma\delta} = H_{\alpha\beta\delta\gamma} \\ B_{\alpha\beta\gamma\delta} = B_{\beta\alpha\gamma\delta} = B_{\alpha\beta\delta\gamma} = B_{\gamma\delta\alpha\beta} \\ F_{\alpha\beta\gamma} = F_{\beta\alpha\gamma} \quad , \quad E_{\alpha\beta\gamma} = E_{\beta\alpha\gamma} \quad , \quad G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha} \end{cases}$$

Les lois de comportement (3) donnent alors

$$(7) \quad \begin{cases} d_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta} N_{\gamma\delta} + H_{\gamma\delta\alpha\beta} C_{\gamma\delta} + E_{\alpha\beta\gamma} Q_{\gamma} \\ k_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta\gamma\delta} N_{\gamma\delta} + B_{\alpha\beta\gamma\delta} C_{\gamma\delta} + F_{\alpha\beta\gamma} Q_{\gamma} \\ \gamma_{\alpha} = E_{\gamma\delta\alpha} N_{\gamma\delta} + F_{\gamma\delta\alpha} C_{\gamma\delta} + G_{\alpha\beta} Q_{\beta} \end{cases}$$

cette forme générale faisant intervenir 36 coefficients.

Cependant, nous nous intéressons à des plaques homogènes, d'épaisseur constante, et constituées d'un matériau élastique isotrope. Ces plaques seront donc isotropes, et comme au § V.2.1 on peut montrer que la forme quadratique (5) n'introduit en fait que 7 coefficients

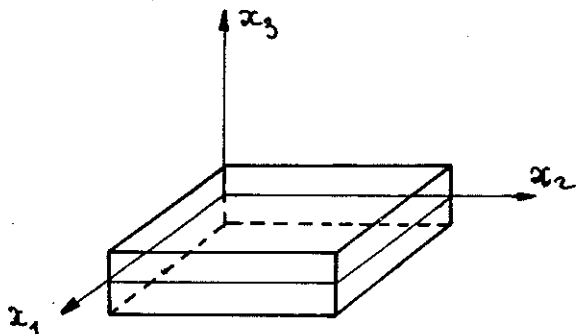
$$(8) \quad \begin{cases} \bar{w} = \frac{1}{2} (A_1 N_{\alpha\alpha} N_{\gamma\gamma} + A_2 N_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta}) \\ \quad + \frac{1}{2} (B_1 C_{\alpha\alpha} C_{\gamma\gamma} + B_2 C_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}) \\ \quad + H_1 C_{\alpha\alpha} N_{\gamma\gamma} + H_2 C_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} G Q_{\alpha} Q_{\alpha} \end{cases}$$

cé qui donne les lois de comportement

$$(9) \quad \begin{cases} d_{\alpha\beta} = (A_1 N_{\gamma\gamma} + H_1 C_{\gamma\gamma}) \delta_{\alpha\beta} + A_2 N_{\alpha\beta} + H_2 C_{\alpha\beta} \\ k_{\alpha\beta} = (H_1 N_{\gamma\gamma} + B_1 C_{\gamma\gamma}) \delta_{\alpha\beta} + H_2 N_{\alpha\beta} + B_2 C_{\alpha\beta} \\ \gamma_{\alpha} = G Q_{\alpha} \end{cases}$$

Pour déterminer ces 7 coefficients, il faudrait, comme nous l'avons fait en RDM, pouvoir identifier la loi de comportement (9) ou l'énergie de déformation (8) à partir de la solution élastique d'un problème modèle, c-à-d d'un problème susceptible de jouer, pour la théorie des plaques, le rôle joué par le problème de Saint-Venant pour les milieux curvilignes.

1.2 LE PROBLEME ELASTIQUE MODELE



Nous considérons donc l'équilibre élastique d'une plaque homogène de hauteur h , et nous supposons que cette plaque est uniquement chargée sur sa périphérie: les forces de volume sont nulles et les faces supérieures et inférieures, $x_3 = \pm h/2$, sont libres de

contrainte. Nous devons donc vérifier les équations d'équilibre

$$(10) \quad \sigma_{ij,j} = 0$$

et les conditions aux limites en $x_3 = \pm h/2$ ($\vec{n} = \pm \vec{e}_3$)

$$(11) \quad \sigma_{i3} = 0 \quad x_3 = \pm h/2$$

Nous recherchons une solution dépendant uniquement de la variable d'épaisseur x_3

$$(12) \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_3) \quad i, j = 1, 2, 3$$

Les équations d'équilibre (10) montrent alors que σ_{13} , σ_{23} et σ_{33} sont constants, et donc nuls d'après (11). Il reste donc uniquement les composantes

$$(13) \quad \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}(x_3) \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

Les équations de Beltrami en l'absence de forces de volume (VI.31) montrent alors directement que $\sigma_{\alpha\beta}$ est fonction linéaire de x_3

$$(14) \quad \sigma_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + x_3 b_{\alpha\beta}$$

A partir de ce champ de contrainte, on peut calculer les efforts intérieurs au sens de la théorie des plaques. Les équations (XXI.12) donnent alors avec (14)

$$(15) \quad \begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha\beta} dx_3 = h a_{\alpha\beta} \\ C_{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{+h/2} x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3 = \frac{h^3}{12} b_{\alpha\beta} \\ Q_\alpha &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3 = 0 \end{aligned}$$

Le champ de contrainte (14) est donc le champ de contrainte correspondant à des efforts intérieurs constants en théorie des plaques

$$(16) \quad N_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta}^0, \quad C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}^0, \quad Q_\alpha = 0$$

en remarquant que les efforts intérieurs donnés par (16) vérifient bien les équations d'équilibre (XXI.18, 22 et 26) en l'absence de charges ($p_\alpha = p = 0$)

$$(17) \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{N_{\alpha\beta}^0}{h} + \frac{12 C_{\alpha\beta}^0}{h^3} x_3, \quad \sigma_{\alpha 3} = \sigma_{33} = 0$$

Pour compléter cette solution, il reste à calculer le champ de déplacement. La loi de comportement (V.34) donne le tenseur des déformations. Compte-tenu de (17) il vient

$$(18) \quad \begin{cases} \epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}^0 + x_3 \epsilon_{\alpha\beta}^1 \\ \epsilon_{\alpha 3} = 0, \quad \epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{\gamma\gamma} = \epsilon_{33}^0 + x_3 \epsilon_{33}^1 \end{cases}$$

$$(19) \quad \begin{cases} \epsilon_{\alpha\beta}^0 = \frac{1+\nu}{Eh} N_{\alpha\beta}^0 - \frac{\nu}{Eh} N_{\gamma\gamma}^0 \delta_{\alpha\beta}, & \epsilon_{33}^0 = -\frac{\nu}{Eh} N_{\gamma\gamma}^0 \\ \epsilon_{\alpha\beta}^1 = \frac{12(1+\nu)}{Eh^3} C_{\alpha\beta}^0 - \frac{12\nu}{Eh^3} C_{\gamma\gamma}^0 \delta_{\alpha\beta}, & \epsilon_{33}^1 = -\frac{12\nu}{Eh^3} C_{\gamma\gamma}^0 \end{cases}$$

L'intégration du champ de déplacements se fait soit directement, soit en appliquant les formules (III.65), et on obtient, à un mouvement de solide rigide près,

$$(20) \quad \begin{cases} u_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}^0 x_\beta + \varepsilon_{\alpha\beta}^1 x_\alpha x_\beta \\ u_3 = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta}^1 x_\alpha x_\beta + \left\{ \varepsilon_{33}^0 x_3 + \frac{1}{2} \varepsilon_{33}^1 x_3^2 \right\} \end{cases}$$

En particulier, pour un point du plan moyen on obtient

$$(21) \quad u_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}^0 x_\beta \quad -u_3 = w = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta}^1 x_\alpha x_\beta$$

En comparant (20) avec (XXI.31) on constate que si l'on pose

$$(22) \quad l_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}^1 x_\beta$$

alors le déplacement (XXI.31), forme approchée du déplacement en théorie des plaques, ne diffère de la solution exacte que par le terme entre accolades dans (20), c'ad par l'allongement de la normale. Il était clair dès le départ que la théorie des plaques, qui postule un mouvement de corps rigide pour chaque normale, ne pouvait pas rendre compte de cet allongement. Nous voyons ici, sur ce cas particulier, où se situe l'approximation "théorie des plaques". Au sens de la théorie des plaques, les "déformations" associées au "déplacement" (21), (22) sont données à partir de (XXI.45 & 46) par

$$(23) \quad d_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^0 \quad k_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \quad \gamma_\alpha = 0$$

L'hypothèse de Kirchhoff-Love, § XXI.3.1, est vérifiée.

1.3 IDENTIFICATION DE LA LOI ELASTIQUE

A partir des résultats du problème élastique que nous venons de résoudre, nous pouvons déterminer les coefficients de la loi élastique introduite au § 1.1, ou tout au moins certain d'entre eux, car Q_α et γ_α étant nuls, on ne peut pas espérer déterminer le coefficient G de (8) ou (9). Comme pour les milieux curvilignes, on peut mettre en oeuvre l'identification énergétique en écrivant

$$(24) \quad \bar{w}(N_{\alpha\beta}; C_{\alpha\beta}) = \int_{-h/2}^{+h/2} \bar{w}(\sigma_{\alpha\beta}) dx_3$$

et en reportant (17) dans l'intégrale. Il est cependant plus simple de reporter (19) dans (23), ce qui donne directement la loi de comportement (9)

$$(25) \quad \begin{cases} d_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{Eh} N_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{Eh} N_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \\ h_{\alpha\beta} = \frac{12(1+\nu)}{Eh^3} C_{\alpha\beta} - \frac{12\nu}{Eh^3} C_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \end{cases}$$

Pour déterminer le coefficient G , il faudrait envisager un autre problème élastique - par exemple celui du § VIII.2.1 - mais cela ne nous intéresse guère, car nous nous limiterons désormais à la théorie des plaques de Love-Kirchhoff, c'est-à-dire à la théorie classique des plaques élastiques. On rajoute alors à (25) la condition

$$(26) \quad \gamma_\alpha = 0$$

ce qui revient à prendre G nul.

Dans ce cadre, il faudra, pour résoudre un problème de plaque, trouver les déplacements (u_α, w) et les efforts intérieurs $(C_{\alpha\beta}, N_{\alpha\beta})$, soit en tout 9 quantités scalaires, vérifiant

- les équations d'équilibre

$$(27) \quad N_{\alpha\beta,\beta} + f_\alpha = 0$$

$$(28) \quad C_{\alpha\beta,\alpha\beta} - p = 0$$

- les lois de comportement élastiques

$$(29) \quad \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) = \frac{1+\nu}{Eh} N_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{Eh} N_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}$$

$$(30) \quad w_{,\alpha\beta} = \frac{12(1+\nu)}{Eh^3} C_{\alpha\beta} - \frac{12\nu}{Eh^3} C_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}$$

- et les conditions aux limites

$$(31) \quad u_\alpha = 0 \quad w = 0 \quad \frac{dw}{dn} = 0$$

pour un bord encastré,

$$(32) \quad u_\alpha = 0 \quad w = 0 \quad C_{\gamma\beta} \nu_\gamma \nu_\beta = 0$$

pour un bord appuyé,

$$(33) \quad \begin{cases} N_{\alpha\beta} \nu_\beta = 0 & C_{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta = 0 \\ Q_\alpha \nu_\alpha + \frac{d}{ds}(C_{\alpha\beta} \nu_\alpha \tau_\beta) = 0 \end{cases}$$

pour un bord libre, avec en plus aux points anguleux libres la condition suivante

$$(34) \quad [C_{\alpha\beta} \nu_\alpha \tau_\beta] = 0$$

En examinant l'ensemble de ces équations, on constate qu'elles se décou-

plent en deux sous-systèmes. Un problème général de plaque se ramène donc à deux problèmes:

- un problème de "tension" pour déterminer les déplacements et les efforts plans $u_\alpha, N_{\alpha\beta}$

$$(35) \quad \begin{cases} N_{\alpha\beta, \beta} + \frac{\rho}{t} \alpha = 0 \\ \frac{1}{2} (u_{\alpha, \beta} + u_{\beta, \alpha}) = \frac{1+\nu}{Eh} N_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{Eh} N_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \end{cases}$$

Ce problème est un problème d'élasticité plane - plus précisément de contraintes planes - comme on peut le voir en comparant (29) à (VIII.17).

Tout ce que nous avons fait aux chapitres VIII et IX s'applique donc directement à ce problème dont nous ne parlerons pas davantage.

- un problème de "flexion" pour la flèche w et le tenseur des moments $C_{\alpha\beta}$. Nous nous limiterons désormais à ce seul problème.

1.4 THEORIE CLASSIQUE DES PLAQUES EN FLEXION

Un problème de flexion de plaque revient donc à trouver w et $C_{\alpha\beta}$ fonctions de (x_1, x_2) et vérifiant .

- l'équation d'équilibre

$$(36) \quad C_{\alpha\beta, \alpha\beta} = \rho$$

- la loi de comportement

$$(37) \quad w_{, \alpha\beta} = \frac{12(1+\nu)}{Eh^3} C_{\alpha\beta} - \frac{12\nu}{Eh^3} C_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}$$

- les conditions aux limites

$$(38) \quad \left. \begin{aligned} w = 0 \quad \text{ou} \quad C_{\alpha\beta, \beta} \nu_\alpha + \frac{d}{ds} (C_{\alpha\beta} \nu_\alpha \tau_\beta) &= 0 \\ \frac{dw}{dn} = 0 \quad \text{ou} \quad C_{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{sur } \partial S$$

$$(40) \quad w = 0 \quad \text{ou} \quad [C_{\alpha\beta} \nu_\alpha \tau_\beta] = 0 \quad \text{aux points anguleux}$$

Ces conditions aux limites peuvent paraître un peu compliquées. Néanmoins, ce sont les conditions aux limites qu'il faut imposer pour obtenir un problème bien posé.

En composantes les équations (36) et (37) s'écrivent

$$(41) \quad \frac{\partial^2 C_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 C_{22}}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 C_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$(42) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = \frac{12}{E h^3} (C_{11} - \nu C_{22}) & \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = \dots \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{12(1+\nu)}{E h^3} C_{12} \end{cases}$$

On peut inverser la loi de comportement (37) ou (42) pour écrire

$$(43) \quad C_{\alpha\beta} = \frac{E h^3}{12(1+\nu)} \left[w_{,\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} w_{,\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right]$$

$$(44) \quad \begin{cases} C_{11} = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right] & C_{22} = \dots \\ C_{12} = \frac{E h^3}{12(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \end{cases}$$

Enfin, en reportant (43) dans (36) on va obtenir l'équation pour la flèche w

$$(45) \quad \frac{E h^3}{12(1+\nu)} \left[w_{,\alpha\beta\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} w_{,\gamma\gamma\alpha\alpha} \right] = p$$

$$w_{,\alpha\alpha\beta\beta} = \Delta \Delta w = \frac{p}{D}$$

où D est la rigidité de la plaque à la flexion

$$(46) \quad D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

C'est une équation aux dérivées partielles du 4ème ordre, qui fait apparaître, comme dans les problèmes d'élasticité plane (voir Chapitre VIII), l'opérateur bilaplacien. Ce sont des problèmes mathématiques bien connus. Cependant, il est en général impossible d'obtenir des solutions analytiques, sauf pour quelques géométries simples (plaques circulaires avec chargement de révolution, que nous envisagerons au § 3; plaques rectangulaires, pour lesquelles on obtient des solutions par développement en série de Fourier). Ceci justifie l'intérêt des méthodes approchées ou numériques qui, comme en MMC, font l'objet des méthodes variationnelles.

2. METHODES VARIATIONNELLES

2.1 CONCEPTS GENERAUX

Comme pour les milieux curvilignes, les résultats obtenus en MMC au chapitre IX s'étendent à la théorie des plaques sans modifications majeures. Il suffit d'adapter les notations. Nous nous limiterons à une présentation rapide, sans démonstrations détaillées, car celles-ci paraphra-

sont celles du chapitre IX. Nous nous limiterons à la théorie classique des plaques en flexion. Nous cherchons donc w et $C_{\alpha\beta}$ vérifiant les équations (36), (37) et les conditions aux limites (38), (39), (40). Nous considérons une plaque occupant un domaine Ω de frontière Γ et nous supposons que Γ se décompose en trois parties Γ_e , Γ_a et Γ_l , où la plaque est respectivement encastrée, appuyée et libre, cette dernière comportant un certain nombre de points anguleux A_i , $i=1, \dots, m$.

Définition 1. Un champ statiquement admissible (CSA) est un champ de tenseurs moments $\hat{C}_{\alpha\beta}$ vérifiant les conditions statiques ($\hat{Q}_\alpha = \hat{C}_{\alpha\beta, \beta}$)

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \hat{C}_{\alpha\beta, \alpha\beta} = p & \text{dans } \Omega \\ \hat{Q}_\alpha \nu_\alpha + \frac{d}{ds} (\hat{C}_{\alpha\beta} \nu_\alpha \tau_\beta) & \text{sur } \Gamma_e \\ \hat{C}_{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta = 0 & \text{sur } \Gamma_e \cup \Gamma_a \\ \llbracket \hat{C}_{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta \rrbracket = 0 & \text{aux points } A_i \end{array} \right.$$

Définition 2. Un champ cinématiquement admissible (CCA) est un champ $\tilde{w}$ vérifiant les conditions aux limites de type cinématique

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \tilde{w} = 0 & \text{sur } \Gamma_e \cup \Gamma_a \\ \frac{d\tilde{w}}{dn} = 0 & \text{sur } \Gamma_e \end{array} \right.$$

Pour résoudre un problème de plaques, il faut trouver un CCA et un CSA vérifiant la loi de comportement. Comme en MMC, on démontre alors

Lemme fondamental. Soit $\hat{C}_{\alpha\beta}$ un CSA et $\tilde{w}^*$ un champ de déplacements virtuels quelconque

$$(49) \quad \begin{aligned} \iint_{\Omega} \hat{C}_{\alpha\beta} \tilde{w}^*_{, \alpha\beta} dS &= \iint_{\Omega} p \tilde{w}^* dS - \oint_{\Gamma} \left(\hat{T} - \frac{d\hat{m}_\nu}{ds} \right) \tilde{w}^* ds \\ &\quad + \oint_{\Gamma} \hat{m}_\tau \frac{d\tilde{w}^*}{dn} ds + \sum \llbracket \hat{m}_\nu \rrbracket_i \tilde{w}^*_{, i} \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \hat{T} = \hat{Q}_\alpha \nu_\alpha & , \quad \hat{Q}_\alpha = \hat{C}_{\alpha\beta, \beta} \\ \hat{m}_\nu = C_{\alpha\beta} \nu_\alpha \tau_\beta & , \quad \hat{m}_\tau = C_{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta \end{array} \right.$$

Ce lemme se démontre exactement comme le théorème des travaux virtuels du § XXI.2.2 complété par les calculs du § XXI.3.2.

Si l'on introduit les espaces suivants.

. $\mathcal{E}$ espace des chargements

$$\varphi = \left(p, \hat{\tau} - \frac{d\hat{m}_v}{ds}, \hat{m}_\tau, [\hat{m}_v]_i \right) \in \mathcal{E}$$

. $\mathcal{U}$ espace des déplacements virtuels

$$\tilde{w} \in \mathcal{U}$$

. $\mathcal{D}$ espace des déformations

$$\varepsilon = \left(\tilde{w}_{,\alpha\beta} = k_{\alpha\beta} \right) \in \mathcal{D}$$

. $\mathcal{Y}$ espace des efforts intérieurs

$$\sigma = \left(C_{\alpha\beta} \right) \in \mathcal{Y}$$

on retrouve la structure algébrique habituelle (voir § IX.1.1 et XVI.2.1) et le théorème des travaux virtuels s'écrit

$$(51) \quad \langle \varepsilon, \hat{\sigma} \rangle = \langle \tilde{w}, \varphi \rangle$$

En prenant comme CSA $\hat{C}_{\alpha\beta}$ le champ solution $C_{\alpha\beta}$, on retrouve le théorème des travaux virtuels

$$(52) \quad \int_{\Omega} C_{\alpha\beta} \tilde{w}_{,\alpha\beta} ds = \int_{\Omega} p \tilde{w} ds - \oint_{\Gamma} \left(\tau - \frac{dm_v}{ds} \right) \tilde{w} ds + \oint_{\Gamma} m_\tau \frac{d\tilde{w}}{dn} ds + \sum [\hat{m}_v]_i \tilde{w}_i$$

Si l'on prend comme champ de déplacements virtuels un CCA, alors, d'après les conditions aux limites (31) à (34), le travail des efforts de contact s'annule et il reste seulement

$$(53) \quad \int_{\Omega} \hat{C}_{\alpha\beta} \tilde{w}_{,\alpha\beta} ds = \int_{\Omega} p \tilde{w} ds$$

2.2 THEOREMES ENERGETIQUES

L'énergie potentielle d'un CCA $\tilde{w}$ est définie par

$$(54) \quad K(\tilde{w}) = W(\tilde{w}) - T_f^d(\tilde{w})$$

soit, d'après (43),

$$(55) \quad K(\tilde{w}) = \frac{E h^3}{24(1+\nu)} \int_{\Omega} [\tilde{w}_{,\alpha\beta} \tilde{w}_{,\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \tilde{w}_{,\alpha\alpha} \tilde{w}_{,\beta\beta}] ds - \int_{\Omega} p \tilde{w} ds$$

De même, l'énergie complémentaire d'un CSA $\hat{C}_{\alpha\beta}$, donnée par

$$(56) \quad H(\hat{C}_{\alpha\beta}) = \cancel{T_\mu^d(\hat{C}_{\alpha\beta})} - W(\hat{C}_{\alpha\beta})$$

se réduit, comme en RDM, à l'énergie de déformation (puisque les déplacements imposés sont nuls)

$$(57) \quad H(\hat{C}_{\alpha\beta}) = - \frac{6}{E h^3} \iint_{\Omega} \left[(1+\nu) \hat{C}_{\alpha\beta} \hat{C}_{\alpha\beta} - \nu \hat{C}_{\alpha\alpha} \hat{C}_{\beta\beta} \right] dS$$

Et on démontre, exactement comme en MMC, les théorèmes variationnels suivants

[Théorème de l'énergie potentielle. Parmi tous les CCA, le champ solution minimise l'énergie potentielle.

[Théorème de l'énergie complémentaire. Parmi tous les CSA, le champ solution maximise l'énergie complémentaire.

[Théorème de comparaison. Pour le champ solution, l'énergie potentielle est égale à l'énergie complémentaire.

On peut résumer ces trois théorèmes par la chaîne d'inégalités suivante

$$(58) \quad H(\hat{C}_{\alpha\beta}) \leq H(C_{\alpha\beta}) = K(w) \leq K(\tilde{w})$$

On démontre également, en appliquant le théorème des travaux virtuels au déplacement solution

[Théorème du travail. L'énergie de déformation est égale à la moitié du travail des efforts appliqués dans le déplacement solution

$$(59) \quad W = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} C_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} dS = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} p w dS$$

Enfin, on démontre également

[Théorème d'existence et d'unicité. Le problème de plaque défini par (31) à (34) admet une solution unique sitôt que Γ_e est non vide ou que Γ_a ne se réduit pas à un segment de droite.

L'utilisation de ces théorèmes est la même qu'en mécanique des milieux continus (Ch. IX). D'une part ils permettent des calculs approchés par encadrement de la solution. D'autre part le théorème de l'énergie potentielle engendre directement des méthodes numériques. En particulier on peut construire des méthodes d'éléments finis comme nous l'avons fait au § IX.3.1. Une difficulté supplémentaire apparaît néanmoins car la présence de dérivées secondes dans l'expression (55) de $K(\tilde{w})$ entraîne la né-

cessité d'assurer la continuité des dérivées premières entre deux éléments adjacents, ce qui pose quelques problèmes.

Enfin, les deux théorèmes de Maxwell-Betti et Castigliano restent vrais pour les plaques. Soit donc une plaque pouvant être soumise à deux chargements $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$.

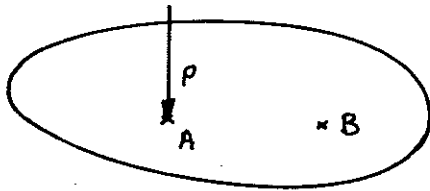
Théorème de réciprocité ou de Maxwell-Betti. Le travail du chargement 1 dans le déplacement 2 est égal au travail du chargement 2 dans le déplacement 1

$$(60) \quad \iint_{\Omega} p^{(1)} w^{(2)} ds = \iint_{\Omega} p^{(2)} w^{(1)} ds$$

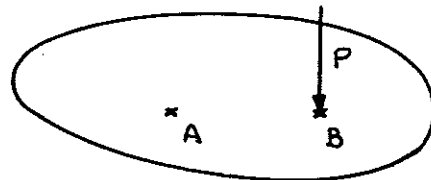
Théorème de Castigliano. Soit $\hat{C}_{\alpha\beta}^2$ un CSA pour le problème 2

$$(61) \quad \iint_{\Omega} p^2 w^1 ds = \frac{d}{d\lambda} \left\{ W(C_{\alpha\beta}^1 + \lambda \hat{C}_{\alpha\beta}^2) \right\} \Big|_{\lambda=0}$$

Comme en RDM, on utilise surtout ces théorèmes en appliquant des charges concentrées. Par exemple, il résulte directement du théorème de réciprocité



Problème 1



Problème 2

cité que, pour une plaque donnée, le déplacement créé en B par une force P appliquée en A est égal au déplacement créé en A par cette même force P appliquée en B.

3. PLAQUES CIRCULAIRES

Nous allons terminer cette rapide présentation de la théorie des plaques par l'étude de quelques exemples. Nous nous limiterons aux plaques circulaires soumises à un chargement ayant la symétrie de révolution

$$(62) \quad p = p(r)$$

D'après la symétrie de révolution du problème,

$$(62) \quad w = w(r)$$

En notant d'un ' la dérivée par rapport à r , on obtient pour les déformations

$$(63) \quad w_{,\alpha} = w'(r) \frac{x_\alpha}{r}$$

$$w_{,\alpha\beta} = w''(r) \frac{x_\alpha x_\beta}{r^2} + \frac{w'(r)}{r} \left[\delta_{\alpha\beta} - \frac{x_\alpha x_\beta}{r^2} \right]$$

soit, dans le repère local des coordonnées cylindriques ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$),

$$(64) \quad R = \nabla \nabla \cdot w = \begin{bmatrix} w''(r) & 0 \\ 0 & \frac{w'(r)}{r} \end{bmatrix}$$

Dans ce même repère on a pour les efforts intérieurs, toujours d'après la symétrie,

$$(65) \quad Q = \begin{bmatrix} Q(r) \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} A(r) & 0 \\ 0 & B(r) \end{bmatrix}$$

soit, sous forme de composantes,

$$(66) \quad \begin{cases} Q_\alpha = Q(r) \frac{x_\alpha}{r} \\ C_{\alpha\beta} = A(r) \frac{x_\alpha x_\beta}{r^2} + B(r) \left[\delta_{\alpha\beta} - \frac{x_\alpha x_\beta}{r^2} \right] \end{cases}$$

L'équation d'équilibre (XXI.22) donne

$$(67) \quad Q_{\alpha,\alpha} = \mu$$

$$Q_{\alpha,\beta} = \left(Q(r) \frac{x_\alpha}{r} \right)_{,\beta} = Q'(r) \frac{x_\alpha x_\beta}{r^2} + \frac{Q(r)}{r} \left[\delta_{\alpha\beta} - \frac{x_\alpha x_\beta}{r^2} \right]$$

$$(68) \quad Q_{\alpha,\alpha} = Q'(r) + \frac{Q(r)}{r} = \frac{1}{r} (r Q(r))'$$

L'équation d'équilibre (66) donne

$$(69) \quad \frac{1}{r} (r Q)' = \mu$$

soit, par intégration,

$$(70) \quad Q(r) = -\frac{1}{r} \int^r \rho \mu(\rho) d\rho + \frac{C}{r}$$

la constante C étant nulle pour que Q soit borné en $r=0$ (sauf dans le cas d'une plaque annulaire). On peut interpréter (70) en remarquant qu'elle

exprime seulement l'équilibre d'un disque de rayon r .

La seconde équation d'équilibre (XXI.26)

$$(71) \quad C_{\alpha\beta, \beta} - Q_{\alpha} = 0$$



donne, avec (66),

$$(72) \quad C_{\alpha\beta, \beta} = \left(A'(r) + \frac{A-B}{r} \right) \frac{\alpha_{\alpha}}{r} = \left(\frac{1}{r} (r A)' - \frac{B}{r} \right) \frac{\alpha_{\alpha}}{r}$$

$$\frac{1}{r} (r A(r))' - \frac{B}{r} = Q(r)$$

Équation qui, avec (70), donne une relation entre A et B .

La loi de comportement (44) donne, à partir de (64) et (65),

$$(73) \quad \begin{cases} A(r) = D \left[r w''(r) + \nu \frac{r w'(r)}{r} \right] \\ B(r) = D \left[\frac{r w'(r)}{r} + \nu r w''(r) \right] \end{cases}$$

où D est donné par (46). En reportant dans (73), on obtient pour w une équation différentielle du 3ème ordre

$$(74) \quad r Q(r) = D \left[(r w''(r))' - \frac{r w'}{r} \right]$$

avec comme conditions aux limites

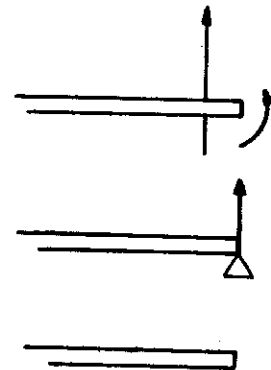
$$(75) \quad w = 0 \quad w' = 0$$

pour un encastrement,

$$(76) \quad w = 0 \quad m_r = A = 0$$

pour un appui simple, et

$$(77) \quad T = Q = 0 \quad A = 0$$

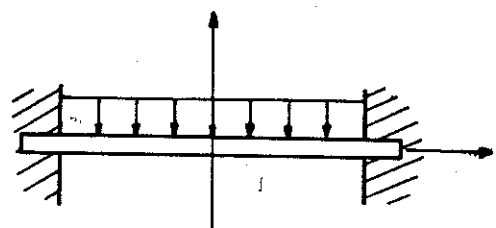


pour un bord libre, en remarquant que, d'après la forme (65) du tenseur des moments

$$(78) \quad m_{\nu} = C_{r\theta} = 0$$

3.2 EXEMPLES

Exemple 1. Comme premier exemple, nous considérons un disque circulaire de rayon R , encasté sur sa périphérie et soumis à une charge p uniforme.



La relation (70) donne pour Q

$$(79) \quad Q = \frac{p r}{2}$$

et l'équation différentielle (74) donne pour $w(r)$

$$(80) \quad (r w''(r))' - \frac{w'}{r} = \frac{\mu r^2}{2D}$$

Cette équation s'intègre directement

$$(81) \quad \begin{aligned} (r w'')' - \frac{w'}{r} &= r \left[w''' + \frac{w''}{r} - \frac{w'}{r^2} \right] = r \left[w'' + \frac{w'}{r} \right]' \\ &= r \left[\frac{1}{r} (r w')' \right]' \end{aligned}$$

de sorte que (80) donne successivement

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{r} (r w')' \right]' &= \frac{\mu r}{2D} \Rightarrow \frac{1}{r} (r w')' = \frac{\mu r^2}{4D} + a \\ (r w')' &= \frac{\mu r^3}{4D} + ar \Rightarrow r w' = \frac{\mu r^4}{16D} + \frac{a r^2}{2} + b \\ w' &= \frac{\mu r^3}{16D} + \frac{a r}{2} + \frac{b}{r} \Rightarrow w = \frac{\mu r^4}{64D} + \frac{a r^2}{4} + b \log r + c \end{aligned}$$

La constante b disparaît car w doit être borné en $r=0$. On obtient donc finalement

$$(82) \quad w = \frac{\mu r^4}{64D} + \frac{a r^2}{4} + c$$

Les deux constantes d'intégration s'obtiennent en écrivant les conditions aux limites en $r=R$

$$(83) \quad w(R) = 0 \quad w'(R) = 0$$

$$(84) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\mu R^4}{64D} + \frac{a R^2}{4} + c &= 0 \\ \frac{\mu R^3}{16D} + \frac{a R}{2} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} a &= - \frac{\mu R^2}{8D} \\ c &= \frac{\mu R^4}{64D} \end{aligned} \right.$$

soit finalement

$$(85) \quad w = \frac{\mu (R^2 - r^2)^2}{64D}$$

les efforts intérieurs étant donnés par (79) et

$$(86) \quad \left\{ \begin{aligned} C_{rr} = A(r) &= \frac{\mu}{16} [3r^2 - R^2 + \nu(r^2 - R^2)] \\ C_{\theta\theta} = B(r) &= \frac{\mu}{16} [r^2 - R^2 + \nu(3r^2 - R^2)] \end{aligned} \right.$$

On en déduit les densités de réaction d'appui et de moment d'encastrement

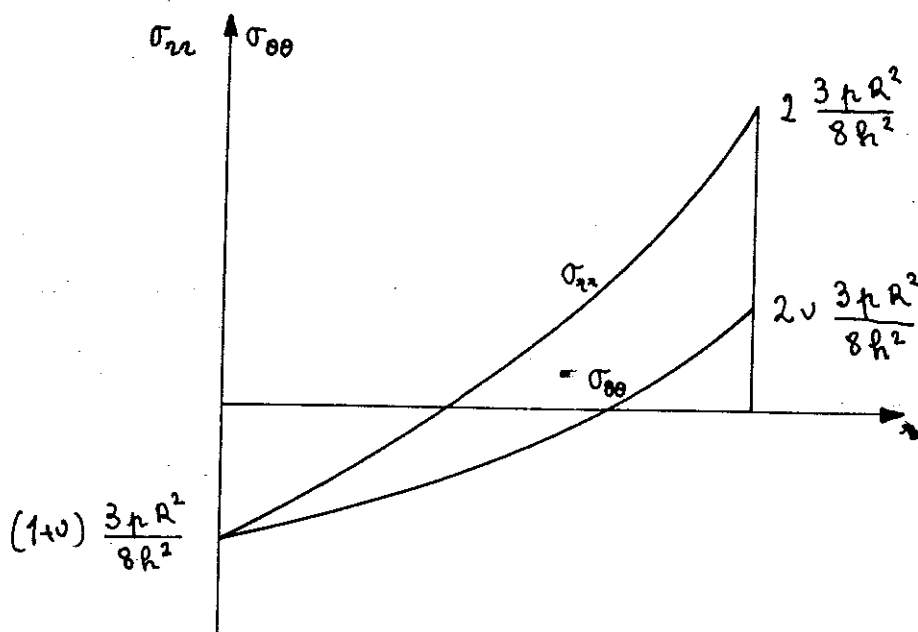
$$(87) \quad T = \frac{\mu R}{2} \quad C_{rr} = \frac{\mu R^2}{8} \quad \text{pour } r = R$$

Le dimensionnement se fait à partir de la répartition de contraintes (17)

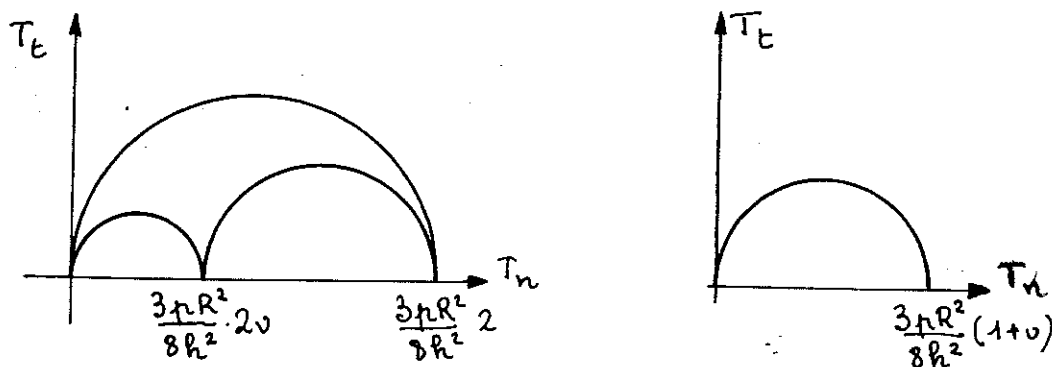
$$(88) \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{12 C_{\alpha\beta}}{h^3} x_3$$

obtenue pour le problème du § 1.2, mais qui reste valable en première approximation dans le cas général. Les contraintes maximales seront donc atteintes en $x_3 = \pm h/2$

$$(89) \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = \pm \frac{3p}{8h^2} [(3+\nu)r^2 - (1+\nu)R^2] \\ \sigma_{\theta\theta} = \pm \frac{3p}{8h^2} [(1+3\nu)r^2 - (1+\nu)R^2] \end{cases}$$



Les points les plus sollicités sont le centre de la plaque et sa périphérie. Les triercles de Mohr correspondants sont

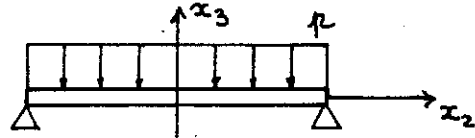


Si l'on adopte le critère de limite d'élasticité de Tresca, les points critiques seront à la périphérie et la condition de dimensionnement s'écrira

$$(90) \quad \frac{3pR^2}{4h^2} \leq \sigma_e, \quad h \geq \sqrt{\frac{4\sigma_e}{3p}} R$$

Exemple 2.

Plaque appuyée, charge répartie uniforme.



Tout ce qui précède reste valable jusqu'à (82) et il faut remplacer les CL (83) par

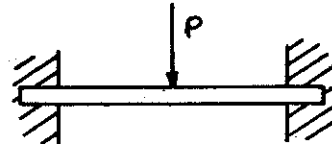
$$(91) \quad w(R) = 0 \quad A(R) = 0$$

$$(92) \quad \begin{cases} \frac{p R^4}{64 D} + \frac{a R^2}{4} + c = 0 \\ \frac{(3+\nu) p R^2}{16 D} + \frac{(1+\nu) a}{2} = 0 \end{cases}$$

système qui donne directement a et c , le reste de l'analyse se poursui-
vant comme précédemment.

Exemple 3.

Plaque encastree, charge concentrée.



On peut, soit utiliser (70) en prenant pour densité p une masse de Dirac, soit écrire plus simplement l'équilibre d'un disque de rayon R et il vient

$$(93) \quad Q(r) = \frac{P}{2\pi r}$$

Il reste uniquement à intégrer (74) qui, compte-tenu de (81), s'écrit

$$(94) \quad \left[\frac{1}{r} (r w')' \right]' = \frac{P}{2\pi r D}$$

ce qui donne finale-
ment

$$(95) \quad w = + \frac{P}{4\pi D} \left\{ \frac{r^2}{2} \log \frac{r}{a} - \frac{r^2}{4} + c \right\}$$

Les CL (83) permettent alors de déterminer les deux constantes d'intégra-
tion a et c .