

Chapitre XXI

THEORIE DES PLAQUES

1. STATIQUE DES PLAQUES

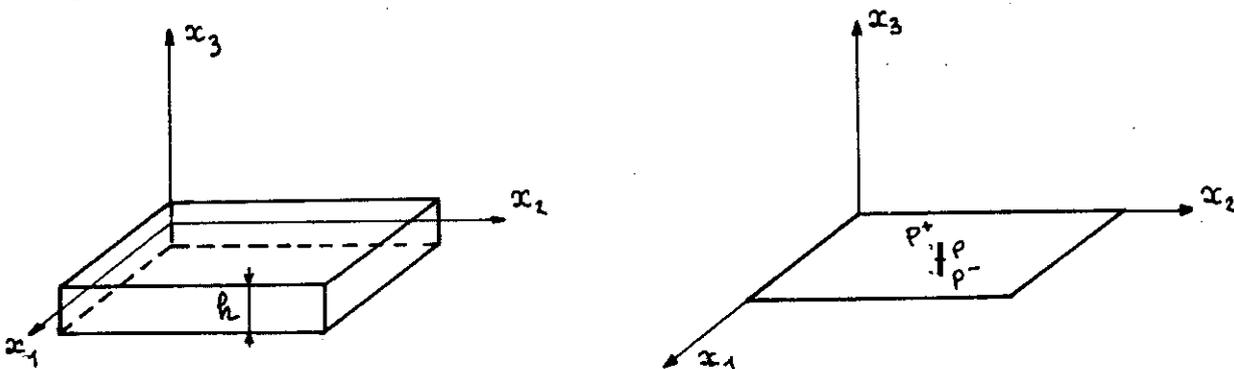
1.1 GENERALITES SUR LES PLAQUES

La théorie des milieux curvilignes, que nous venons de présenter, considère des milieux assimilables à une courbe matérielle, c'ad des milieux pour lesquels les deux dimensions transversales sont petites par rapport aux dimensions longitudinales  $d \ll l$ . Les milieux surfaciques, que nous avons évoqués au § XII.1.2, sont des milieux assimilables à une surface, c'ad des milieux pour lesquels la dimension transversale est petite par rapport aux dimensions longitudinales

(1)  $e \ll l$

Les poutres en voiles minces, évoquées au § XV.3.3 et pour lesquelles  $e \ll d \ll l$ , présentent à la fois des caractères de milieux curvilignes et de milieux surfaciques, ce qui explique les difficultés rencontrées.

Parmi les milieux surfaciques, on distingue les plaques (planes) des coques (gauches). La théorie des coques rajoute aux difficultés mécani-ques des difficultés purement géométriques, et dans cette première approche des milieux surfaciques, nous nous limiterons à la théorie des plaques. Nous nous limiterons également aux plaques d'épaisseur constante  $h$ , constituées d'un matériau élastique isotrope et homogène caractérisé par son module d'Young  $E$  et son coefficient de Poisson  $\nu$



Nous schématiserons donc une plaque par son plan moyen  $\Omega$  dans le plan  $x_1, x_2$ . Une particule  $P(x_1, x_2)$  de la plaque représentera donc la normale  $P^-P^+$ ,

càd le segment  $\{\alpha_1, \alpha_2\} \times [-h/2, +h/2]$ . Dans toute la suite, nous noterons avec des indices latins les variables spatiales ( $i=1,2,3$ ), et avec des indices grecs les variables planes ( $\alpha=1,2$ ). La convention de sommation s'appliquera aux indices latins et aux indices grecs.

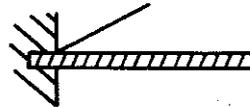
Comme pour les milieux curvilignes, on distingue parmi les efforts extérieurs les charges appliquées connues et les efforts de liaison inconnus. Les charges appliquées seront caractérisées par une densité de force appliquée par unité de surface

$$(2) \quad f_i = (f_1, f_2, f_3) = (f_\alpha, -p) \quad , \quad p = -f_3$$

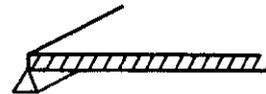
Par rapport au problème tridimensionnel, cette charge représente les forces surfaciques appliquées en  $P^+$  et  $P^-$  sur la surface de la plaque et l'intégrale des forces volumiques exercées sur le segment  $P^+P^-$ . Comme pour les milieux curvilignes, nous pourrions également envisager une densité de moment, mais cela se présente rarement. Les efforts concentrés pourront s'obtenir par passage à la limite (voir § XXII.3.2).

Les efforts de liaison résultent des conditions cinématiques de liaison, càd des conditions aux limites. Nous nous limiterons à trois types de liaison

a) Encastrement: la plaque est fixée en translation et en rotation.



b) Appui: la plaque est fixée en translation, mais libre en rotation.



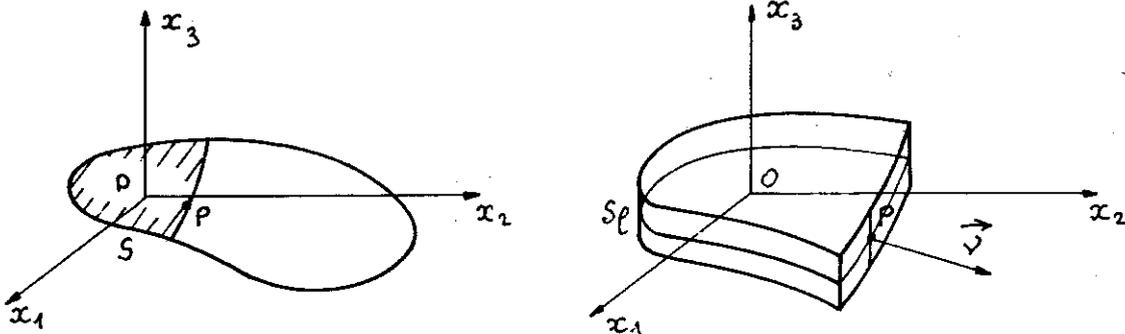
c) Libre: la plaque est libre en translation et en rotation.



On pourrait bien sûr envisager des liaisons plus complexes ( par exemple une plaque appuyée verticalement et libre dans son plan), mais cela n'ajouterait rien d'essentiel. Comme pour les milieux curvilignes, les efforts de liaison peuvent être caractérisés à partir des conditions cinématiques de liaison en écrivant que ces liaisons sont parfaites, càd qu'elles ne travaillent pas dans tout mouvement virtuel compatible avec les liaisons. Nous y reviendrons plus loin.

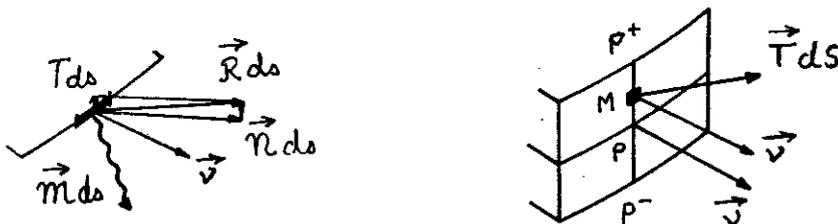
## 1.2 SCHEMATISATION DES EFFORTS INTERIEURS

Pour caractériser les efforts intérieurs dans une plaque, nous considérons, comme en MMC, un domaine D de la plaque (§ II.1.1) et nous caractériserons les efforts exercés sur D à travers sa frontière  $\partial D$ . Confor-



mément à l'approximation de la théorie des plaques, le domaine D est un domaine plan qui représente, pour le problème tridimensionnel, le domaine cylindrique  $D \times [-h/2, +h/2]$ . Les efforts exercés sur D à travers  $\partial D$  représentent donc les efforts exercés sur le domaine tridimensionnel  $D \times [-h/2, +h/2]$  à travers sa surface latérale  $S_l : \partial D \times [-h/2, +h/2]$  (alors que les efforts volumiques et les efforts exercés sur les faces supérieure et inférieure  $D^+$  et  $D^-$  sont pris en compte par la charge  $\vec{f}$  introduite au § 1.1).

Les efforts exercés sur D à travers  $\partial D$  seront donc obtenus par intégration des efforts élémentaires  $\vec{T} ds$  exercés sur toute la surface latérale  $S_l$ .



térale  $S_l$ . Nous obtenons ainsi le torseur des efforts exercés sur D à travers  $\partial D$ , défini par sa résultante et son moment en 0

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \text{résultante} : \iint_{S_l} \vec{T} ds = \oint_r \int_{-h/2}^{+h/2} \vec{T} dx_3 ds = \oint_r \vec{R} ds \\ \text{moment en 0} : \iint_{S_l} \vec{OM} \wedge \vec{T} ds = \oint_r \int_{-h/2}^{+h/2} (\vec{OP} \wedge \vec{T} + \vec{PM} \wedge \vec{T}) dx_3 ds \\ \qquad \qquad \qquad = \oint_r \left\{ \vec{OP} \wedge \int_{-h/2}^{+h/2} \vec{T} dx_3 + \int_{-h/2}^{+h/2} \vec{PM} \wedge \vec{T} dx_3 \right\} ds \\ \qquad \qquad \qquad = \oint_r (\vec{OP} \wedge \vec{R} + \vec{m}) ds \end{array} \right.$$

où  $s$  désigne l'abscisse curviligne le long de  $\partial D$  et où

$$(4) \quad \vec{R} = \int_{-h/2}^{+h/2} \vec{T} dx_3, \quad \vec{m} = \int_{-h/2}^{+h/2} \vec{PM} \wedge \vec{T} dx_3$$

Les formules (3) montrent donc que les efforts exercés sur D à travers  $\partial D$  peuvent être schématisés par une répartition linéique de torseur de résultante  $\vec{\mathcal{R}}$  et de moment  $\vec{\mathcal{M}}$  en P

$$(5) \quad \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{T} = \alpha_3 \vec{e}_3 \wedge \vec{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_3 T_2 \\ \alpha_3 T_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On voit donc que le vecteur  $\vec{\mathcal{M}}$  est dans le plan de la plaque et n'a pas de composante  $\mathcal{M}_3$ . On peut encore écrire

$$(6) \quad \vec{\mathcal{M}} = \vec{e}_3 \wedge \vec{\mathcal{C}} \quad \vec{\mathcal{C}} = \int_{-h/2}^{+h/2} \alpha_3 \vec{T} dx_3$$

ou sous forme de composantes

$$(7) \quad \mathcal{M}_\alpha = - \varepsilon_{\alpha\beta} \mathcal{C}_\beta$$

en introduisant les symboles de permutation plans ( $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta 3}$  :  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$ ,  $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$ , voir A.2.1). Nous décomposerons la résultante  $\vec{\mathcal{R}}$  en un effort plan  $\vec{\mathcal{N}}$  et un effort tranchant T

$$(8) \quad \vec{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{N}} + T \vec{e}_3$$

et nous pouvons écrire finalement

$$(9) \quad \begin{cases} \mathcal{R}_\alpha = \mathcal{N}_\alpha = \int_{-h/2}^{+h/2} T_\alpha dx_3 \\ \mathcal{R}_3 = T = \int_{-h/2}^{+h/2} T_3 dx_3 \\ \mathcal{M}_\alpha = - \varepsilon_{\alpha\beta} \mathcal{C}_\beta \end{cases} \quad \mathcal{C}_\alpha = \int_{-h/2}^{+h/2} \alpha_3 T_\alpha dx_3$$

avec  $\mathcal{M}_3 = 0$ .

### 1.3 TENSEURS D'EFFORTS INTERIEURS

Nous avons donc caractérisé les efforts intérieurs exercés en P sur D par une densité linéique de résultante et de moment. Les vecteurs  $\vec{\mathcal{R}}$  et  $\vec{\mathcal{M}}$  sont en théorie des plaques l'analogue du vecteur contrainte  $\vec{T}$  en MMC. Reste à construire l'analogue du tenseur des contraintes, càd à préciser la manière dont, en un point P donné,  $\vec{\mathcal{R}}$  et  $\vec{\mathcal{M}}$  dépendent de D.

Soit  $\vec{\nu}$  la normale extérieure à D en P; c'est aussi la normale extérieure au domaine tridimensionnel  $D \times [-h/2, +h/2]$  le long de sa génératrice  $P^+P^-$  et d'autre part il est clair que  $\vec{\nu}$  est un vecteur du plan. Nous pouvons donc écrire en un point M quelconque de  $P^+P^-$

$$(10) \quad T_i = \sigma_{ij} v_j \quad \text{ou} \quad \begin{cases} T_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} v_\beta \\ T_3 = \sigma_{3\beta} v_\beta \end{cases}$$

Les formules (9) donnent alors directement

$$(11) \quad \begin{cases} \mathcal{R}_\alpha = \mathcal{M}_\alpha = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha\beta} v_\beta dx_3 = N_{\alpha\beta} v_\beta \\ \mathcal{R}_3 = T = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha 3} v_\alpha dx_3 = Q_\alpha v_\alpha \\ \mathcal{E}_\alpha = \int_{-h/2}^{+h/2} x_3 \sigma_{\alpha\beta} v_\beta dx_3 = C_{\alpha\beta} v_\beta \end{cases}$$

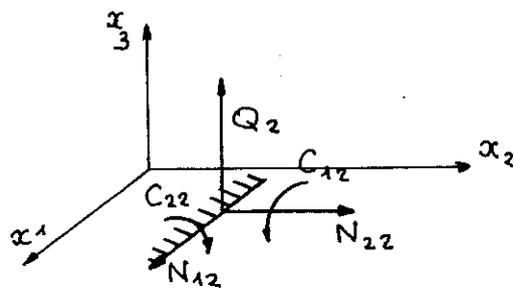
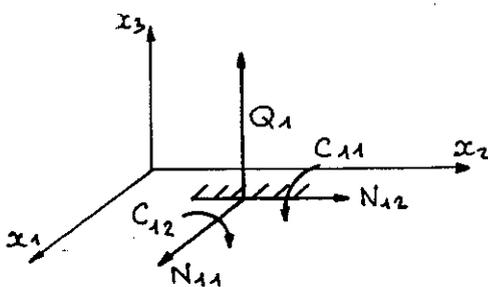
où l'on a posé

$$(12) \quad \begin{cases} N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \\ Q_\alpha = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3 \\ C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha} = \int_{-h/2}^{+h/2} x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \end{cases}$$

Ainsi, la répartition des vecteurs  $\vec{\mathcal{R}}$  et  $\vec{\mathcal{M}}$  au point P fait intervenir deux tenseurs symétriques  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{C}$  et un vecteur  $\vec{Q}$ , soit 8 quantités scalaires qui sont reliées aux composantes du tenseur des contraintes par (12). Ces tenseurs permettent le calcul des efforts intérieurs  $\vec{\mathcal{R}}$  et  $\vec{\mathcal{M}}$  par (11) et (7).

Pour dégager la signification physique de ces 8 quantités, considérons au point P un domaine D limité par une droite  $x_1 = \text{Cte}$  ( $\vec{\nu} = \vec{e}_1$ ). Les vecteurs  $\vec{\mathcal{R}}$ ,  $\vec{\mathcal{E}}$  et  $\vec{\mathcal{M}}$  ont alors comme composantes

$$(13) \quad \vec{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{12} \\ Q_1 \end{pmatrix} \quad \vec{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} -C_{12} \\ C_{11} \\ 0 \end{pmatrix}$$



De même, considérons un domaine D limité par une droite  $x_2 = \text{Cte}$  ( $\vec{\nu} = \vec{e}_2$ ).

On a alors

$$(14) \quad \vec{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} N_{12} \\ N_{22} \\ Q_2 \end{pmatrix} \quad \vec{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} C_{12} \\ C_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} -C_{22} \\ C_{12} \\ 0 \end{pmatrix}$$

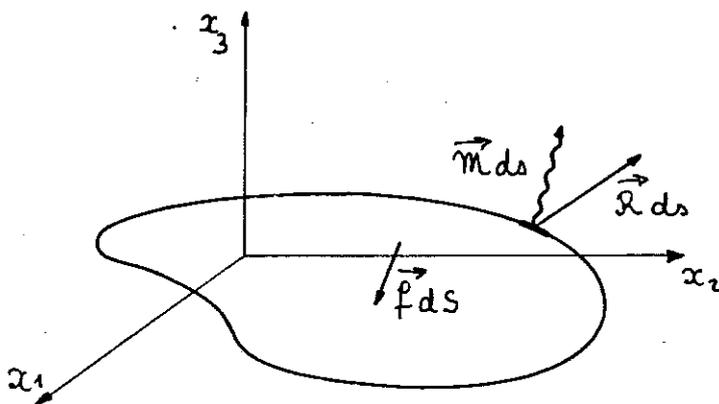
Ces 8 quantités sont donc les composantes des efforts intérieurs (résultante

et moment) exercés sur deux éléments de plaque parallèles aux axes.

En théorie des plaques, il n'y a pas de notations universelle-  
ment acceptées. Celles que nous utilisons sont les plus cohérentes et les  
plus commodes pour une étude générale. Néanmoins, il convient de prendre  
garde en abordant d'autres ouvrages. Le mieux est de se reporter à l'in-  
terprétation physique (13), (14) pour comparer les notations.

#### 1.4 EQUATIONS D'EQUILIBRE

Pour obtenir les équations d'équilibre, il faut écrire l'équili-  
bre d'un morceau quelconque de plaque sous l'action des charges surfaciques  
 $\vec{f}$  et des efforts linéiques  $\vec{Q}$  et  $\vec{m}$ .



L'équilibre de la plaque se traduit par deux équations vectorielles: une  
équation de résultante et une équation de moment

$$(15) \quad \oint_{\partial D} \vec{Q} \, ds + \iint_D \vec{f} \, dS = 0$$

$$(16) \quad \oint_{\partial D} (\vec{OP} \wedge \vec{Q} + \vec{m}) \, ds + \iint_D \vec{OP} \wedge \vec{f} \, dS = 0$$

Nous allons considérer séparément les composantes planes et verticale de  
ces équations. Commençons par les composantes planes de l'équation de ré-  
sultante

$$(17) \quad \oint_{\partial D} n_\alpha \, ds + \iint_D f_\alpha \, dS = 0$$

En utilisant (11) et le théorème de la divergence, on obtient

$$\oint_{\partial D} N_{\alpha\beta} \nu_\beta \, ds + \iint_D f_\alpha \, dS = \iint_D (N_{\alpha\beta,\beta} + f_\alpha) \, dS = 0$$

soit, puisque (15) doit être vrai pour tout domaine D

$$(18) \quad N_{\alpha\beta,\beta} + f_\alpha = 0$$

Considérons maintenant la projection sur  $x_3$  de l'équation de moment (16). On a vu que  $\mathcal{M}_3$  était nul, seuls restent donc dans (16) les produits vectoriels. De manière générale on peut écrire

$$(19) \quad \vec{OP} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 F_3 \\ -x_1 F_3 \\ x_1 F_2 - x_2 F_1 \end{vmatrix} = \epsilon_{\alpha\beta} x_\alpha F_\beta$$

La composante de (16) sur  $Ox_3$  s'écrit alors

$$(20) \quad \oint_{\partial D} \epsilon_{\alpha\beta} x_\alpha \mathcal{M}_\beta ds + \iint_D \epsilon_{\alpha\beta} x_\alpha f_\beta dS = 0$$

soit, en utilisant (11) et le théorème de la divergence

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial D} \epsilon_{\alpha\beta} x_\alpha N_{\beta\gamma} \nu_\gamma ds + \iint_D \epsilon_{\alpha\beta} x_\alpha f_\beta \\ &= \iint_D \epsilon_{\alpha\beta} [ (x_\alpha N_{\beta\gamma})_{,\gamma} + x_\alpha f_\beta ] dS \\ &= \iint_D \epsilon_{\alpha\beta} x_\alpha ( \cancel{f_\beta} + N_{\beta\gamma, \gamma} ) dS + \iint_D \epsilon_{\alpha\beta} \cancel{N_{\beta\alpha}} dS \end{aligned}$$

La première intégrale disparaît en vertu de (18), et la seconde en vertu de la symétrie du tenseur  $\mathbf{N}$ . L'équation (20) est identiquement vérifiée. En fait, les calculs précédents sont identiques aux calculs faits en MMC pour obtenir les équations d'équilibre.

Reste à envisager la projection verticale de l'équation de résultante et la projection plane de l'équation de moment. La projection verticale de (15) donne directement, avec (2) et (11),

$$(21) \quad \oint_{\partial D} T ds - \iint_D p dS = 0$$

$$\oint_{\partial D} Q_\alpha \nu_\alpha ds - \iint_D p dS = \iint_D (Q_{\alpha, \alpha} - p) dS = 0$$

$$(22) \quad Q_{\alpha, \alpha} - p = 0$$

Pour écrire la projection plane de l'équation de moment (16), on utilise (6) et on remarque sur (19) que la projection plane de  $\vec{OP} \wedge \vec{F}$  ne fait intervenir que la composante verticale  $F_3$  de  $\vec{F}$

$$(23) \quad \oint_{\partial D} (\vec{OP} \wedge T \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \wedge \vec{E}) ds - \iint_D \vec{OP} \wedge p \vec{e}_3 dS = 0$$

que l'on peut encore écrire

$$(24) \quad \left\{ \oint_{\partial D} (T \vec{OP} - \vec{E}) ds - \iint_D p \vec{OP} dS \right\} \wedge \vec{e}_3 = 0$$

Le vecteur entre accolades est un vecteur plan, et (24) est donc équiva-

lent à

- 174 -

$$(25) \quad \oint_{\partial D} (\tau \vec{OP} - \vec{E}) ds - \iint_D \tau \vec{OP} ds = 0$$

On utilise maintenant (11) et il vient

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial D} (Q_\beta \nu_\beta x_\alpha - C_{\alpha\beta} \nu_\beta) ds - \iint_D \tau x_\alpha ds \\ &= \iint_D [(Q_\beta x_\alpha - C_{\alpha\beta})_{,\beta} - \tau x_\alpha] dS \\ &= \iint_D (\cancel{Q_{\beta,\beta}} - \tau) x_\alpha dS + \iint_D (Q_\alpha - C_{\alpha\beta,\beta}) dS = 0 \end{aligned}$$

La première intégrale disparaît en vertu de (22), et finalement on obtient l'équation

$$(26) \quad C_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0$$

On aurait également pu obtenir les équations d'équilibre (18), (22) et (26) en écrivant l'équilibre d'un élément de plaque rectangulaire et en utilisant les résultats (13), (14).

Finalement, les équations d'équilibre se découpent en deux systèmes:

- un système de 2 équations (18) pour  $N_{\alpha\beta}$ , qui concerne l'équilibre de la plaque dans son plan sous l'action des forces tangentielles  $f_\alpha$ ,
- un système de 3 équations (22) et (26) pour  $C_{\alpha\beta}$  et  $Q_\alpha$ , qui concerne l'équilibre de la plaque sous l'action de la force normale  $\tau$ . On peut d'ailleurs éliminer de (22), (26) le vecteur  $Q_\alpha$  d'effort tranchant pour obtenir l'équation

$$(27) \quad C_{\alpha\beta,\alpha\beta} - \tau = 0$$

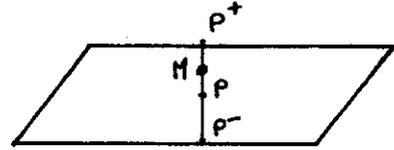
## 2. DEFORMATIONS DES PLAQUES

### 2.1 DEPLACEMENTS

Après avoir schématisé les efforts intérieurs, nous allons décrire les déformations en utilisant la démarche déjà utilisée aux § XIV.1.2 et XIV.1.3 pour les milieux curvilignes. De même que la particule d'un milieu curviligne représente une section droite, la particule P d'une plaque représente un segment normal  $P^*P^-$ . Comme pour les milieux curvilignes, le déplacement de la particule P fera donc intervenir, outre sa translation  $\vec{u}$ , la rotation  $\vec{\omega}$  du segment normal. Le déplacement d'un point M de ce segment

normal sera donc donné par (voir (XIV.23)):

$$(28) \quad \vec{u}_M = \vec{u} + \vec{\omega} \wedge \vec{PM} = \vec{u} + \vec{\omega} \wedge x_3 \vec{e}_3$$



soit, en composantes,

$$(29) \quad \vec{u}_M = \begin{vmatrix} u_1 + \omega_3 x_3 \\ u_2 - \omega_1 x_3 \\ u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 + l_1 x_3 \\ u_2 + l_2 x_3 \\ u_3 \end{vmatrix}$$

en introduisant le vecteur  $\vec{l}$  relié à  $\vec{\omega}$  par

$$(30) \quad \vec{l} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_3, \quad \vec{\omega} = \vec{e}_3 \wedge \vec{l}$$

Bien évidemment, la composante  $\omega_3$ , rotation de la normale autour d'elle-même, n'intervient pas dans (29). La projection de (29) sur le plan et sur la direction  $x_3$  donne donc

$$(31) \quad \begin{cases} u_{M\alpha} = u_\alpha + l_\alpha x_3 \\ u_{M3} = u_3 = -w \end{cases}$$

en notant  $w = -u_3$  la flèche verticale.

Ainsi, le "déplacement" de la plaque sera défini par 5 fonctions  $(u_\alpha, l_\alpha, w)$  définies sur le plan moyen  $x_3 = 0$ . Les formules (31) permettent alors de passer de ce champ de déplacement au sens de la théorie des plaques au champ de déplacement réel dans le solide tridimensionnel. Il est évidemment tout-à-fait clair que pour les plaques comme pour les milieux curvilignes, le champ de déplacement (31) n'est qu'une approximation. Les 5 variables  $(u_\alpha, l_\alpha, w)$  caractérisent néanmoins le mouvement moyen d'un segment normal, cette caractérisation étant comme nous allons maintenant le voir duale de celle des efforts intérieurs. Comme en RDM, nous supposons aussi que les déplacements sont petits.

Nous considérons maintenant un déplacement virtuel  $(\vec{u}_\alpha^*, \vec{l}_\alpha^*, w^*)$ , et nous allons évaluer le travail virtuel des forces appliquées à un domaine D de la plaque. Le travail des charges appliquées  $\vec{f}$  est

$$(32) \quad W_{charge}^* = \iint_D \vec{f} \cdot \vec{u}^* ds = \iint_D (f_\alpha u_\alpha^* + p w^*) ds$$

tandis que le travail des efforts linéiques de contact  $\vec{R}$  et  $\vec{m}$  sur  $\partial D$  est

$$(33) \quad W_{contact}^* = \oint_{\partial D} (\vec{R} \cdot \vec{u}^* + \vec{m} \cdot \vec{\omega}^*) ds$$

soit, avec (30) et (6),

$$(34) \quad \dot{W}_{\text{contact}}^* = \int_{\partial D} (n_\alpha \dot{u}_\alpha^* - T \dot{w}^* + \mathcal{E}_\alpha \dot{l}_\alpha^*) ds$$

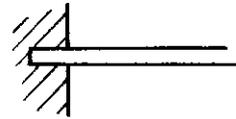
Il est maintenant possible de caractériser les efforts de liaison associés aux divers types de liaison possibles (§ 1.1). En effet, sur la frontière de la plaque  $\partial\Omega$  les efforts linéiques  $\vec{\mathcal{R}}$  et  $\vec{\mathcal{M}}$  traduisent l'action du monde extérieur sur la plaque, cãd les efforts de liaison, le travail virtuel de ces efforts de liaison étant donné par

$$(35) \quad n_\alpha \dot{u}_\alpha^* - T \dot{w}^* + \mathcal{E}_\alpha \dot{l}_\alpha^*$$

Une liaison se caractérise donc par des conditions cinématiques portant sur  $u_\alpha$ ,  $w$ ,  $l_\alpha$ , et on pourra en tirer la nature des efforts de liaison en écrivant que le travail virtuel (35) est nul pour tout mouvement virtuel respectant la liaison, cãd en écrivant que la liaison est parfaite.

a) Encastrement

Les conditions cinématiques de liaison sont



$$(36) \quad \dot{u}_\alpha^* = \dot{w}^* = 0 \quad , \quad \dot{\omega}_\alpha^* = \dot{l}_\alpha^* = 0$$

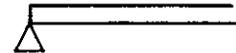
On tire alors de (35)

$$(37) \quad n_\alpha q_{c\alpha} \quad , \quad T q_{cT} \quad , \quad m_\alpha \text{ (ou } \mathcal{E}_\alpha) q_{c\alpha}$$

Les efforts de liaison font intervenir des densités linéiques de réaction verticale  $T$ , de réaction plane  $\vec{\mathcal{N}}$  et de moment d'encastrement  $\vec{\mathcal{M}}$ .

b) Appui

Les conditions cinématiques de liaison sont



$$(38) \quad \dot{u}_\alpha^* = \dot{w}^* = 0 \quad , \quad \dot{\omega}_\alpha^* q_{c\alpha}$$

et on a donc la condition

$$(39) \quad n_\alpha q_{c\alpha} \quad , \quad T q_{cT} \quad , \quad m_\alpha = 0 \quad (\mathcal{E}_\alpha = 0)$$

c) Bord libre

On n'a aucune condition cinématique, et tous les efforts de liaison doivent donc être nuls



$$(40) \quad \dot{u}_\alpha^* q_{c\alpha} \quad , \quad \dot{w}^* q_{cT} \quad , \quad \dot{\omega}_\alpha^* q_{c\alpha}$$

$$(41) \quad n_\alpha = 0 \quad , \quad T = 0 \quad , \quad m_\alpha = 0 \quad (\mathcal{E}_\alpha = 0)$$

D'autres types de conditions aux limites s'étudieraient exactement de la même manière.

2.2 THEOREME DES TRAVAUX VIRTUELS

Comme pour les milieux curvilignes, nous allons définir les déformations d'une plaque en démontrant le théorème des travaux virtuels. Nous partons donc de l'expression du travail virtuel des efforts extérieurs appliqués sur D dans un mouvement virtuel quelconque. A partir de (32) et (34) il vient

$$(42) \quad \begin{aligned} \dot{W}_{ext} = & \iint_D (f_{T\alpha} \dot{u}_\alpha + p \dot{w}) dS \\ & + \oint_{\partial D} (n_\alpha \dot{u}_\alpha - T \dot{w} + B_\alpha \dot{l}_\alpha) ds \end{aligned}$$

En utilisant (11) et le théorème de la divergence, l'intégrale curviligne sur  $\partial D$  devient

$$(43) \quad \begin{aligned} & \oint_{\partial D} (n_\alpha \dot{u}_\alpha - T \dot{w} + B_\alpha \dot{l}_\alpha) ds \\ & = \oint_{\partial D} (N_{\alpha\beta} \dot{u}_\alpha - Q_\beta \dot{w} + C_{\alpha\beta} \dot{l}_\alpha) \nu_\beta ds \\ & = \iint_D (N_{\alpha\beta} \dot{u}_\alpha - Q_\beta \dot{w} + C_{\alpha\beta} \dot{l}_\alpha)_{,\beta} dS \\ & = \iint_D [N_{\alpha\beta,\beta} \dot{u}_\alpha - Q_{\beta,\beta} \dot{w} + C_{\alpha\beta,\beta} \dot{l}_\alpha] dS \\ & \quad + \iint_D [N_{\alpha\beta} \dot{u}_{\alpha,\beta} - Q_\beta \dot{w}_{,\beta} + C_{\alpha\beta} \dot{l}_{\alpha,\beta}] dS \end{aligned}$$

En reportant dans (42) et en utilisant les équations d'équilibre du § 1.4, on obtient

$$(44) \quad \begin{aligned} \dot{W}_{ext} = & \iint_D [ (f_{T\alpha} + N_{\alpha\beta,\beta}) \dot{u}_\alpha + (p - Q_{\beta,\beta}) \dot{w} + C_{\alpha\beta,\beta} \dot{l}_\alpha \\ & + N_{\alpha\beta} \dot{u}_{\alpha,\beta} - Q_\beta \dot{w}_{,\beta} + C_{\alpha\beta} \dot{l}_{\alpha,\beta} ] dS \\ = & \iint_D [ N_{\alpha\beta} \dot{u}_{\alpha,\beta} + Q_\alpha (\dot{l}_\alpha - \dot{w}_{,\alpha}) + C_{\alpha\beta} \dot{l}_{\alpha,\beta} ] dS \\ \dot{W}_{ext} = - \dot{W}_{int} = & \iint_D [ N_{\alpha\beta} \dot{d}_{\alpha\beta} + Q_\alpha \dot{\gamma}_\alpha + C_{\alpha\beta} \dot{k}_{\alpha\beta} ] dS \end{aligned}$$

où, compte-tenu de la symétrie de  $N_{\alpha\beta}$  et  $C_{\alpha\beta}$ ,

$$(45) \quad d_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha})$$

$$(46) \quad \begin{cases} k_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (l_{\alpha,\beta} + l_{\beta,\alpha}) \\ \gamma_\alpha = l_\alpha - w_{,\alpha} \end{cases}$$

Nous sommes donc conduits à introduire, pour décrire les déformations, deux tenseurs du second ordre  $d_{\alpha\beta}$  et  $k_{\alpha\beta}$ , et un vecteur  $\gamma_\alpha$ , respectivement associés à  $N_{\alpha\beta}$ ,  $C_{\alpha\beta}$  et  $Q_\alpha$ . On remarque que le tenseur  $d_{\alpha\beta}$  des déformations est l'analogue plan du tenseur des déformations  $\epsilon_{ij}$  de la MMC, de même que  $N_{\alpha\beta}$  est l'analogue plan du tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$ . La signification du tenseur  $k_{\alpha\beta}$  et du vecteur  $\gamma_\alpha$  apparaîtra plus clairement dans la suite.

Il reste à vérifier que les quantités ainsi définies définissent une mesure convenable des déformations d'une plaque. Cela résulte en particulier du résultat suivant

Théorème 1. Une CNS pour que les quantités  $k_{\alpha\beta}$ ,  $\mu_{\alpha\beta}$ ,  $\gamma_\alpha$  soient identiquement nulles est que le déplacement soit un déplacement de solide rigide

$$(47) \cdot \quad \vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{\omega}_0 \wedge \vec{x} \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_0$$

Dém. Les relations (47) donnent

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = \mu_1^0 - \omega_3^0 x_2 \\ \mu_2 = \mu_2^0 + \omega_3^0 x_1 \\ -w = \mu_3 = \mu_3^0 + \omega_1^0 x_2 - \omega_2^0 x_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -l_2 = \omega_1 = \omega_1^0 \\ l_1 = \omega_2 = \omega_2^0 \end{array} \right.$$

(la composante  $\omega_3$  n'étant pas significative).

La CS se démontre directement en reportant (48) dans (45). Pour démontrer la CN nous partons des équations

$$(49) \quad 2 d_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha,\beta} + \mu_{\beta,\alpha} = 0$$

$$(50) \quad 2 k_{\alpha\beta} = l_{\alpha,\beta} + l_{\beta,\alpha} = 0$$

$$(51) \quad \gamma_\alpha = l_{\alpha} - w_{,\alpha} = 0$$

L'intégration de (49) est l'analogue plan de ce qui a été fait lors de la démonstration du Théorème 2 du § III.3.1. On obtient ainsi

$$(52) \quad \mu_1 = \mu_1^0 - \omega_3^0 x_2, \quad \mu_2 = \mu_2^0 + \omega_3^0 x_1$$

L'intégration de (50) donne de la même manière

$$l_1 = l_1^0 - a^0 x_2, \quad l_2 = l_2^0 + a^0 x_1$$

En écrivant (51) il vient alors

$$w_{,1} = l_1^0 - a^0 x_2, \quad w_{,2} = l_2^0 + a^0 x_1$$

qui ne permettra de calculer  $w$  que si  $w_{,1} = w_{,21}$  c'ad si

$$w_{,12} = w_{,21} \Rightarrow -a^0 = a^0 \Rightarrow a^0 = 0$$

On obtient alors directement

$$(53) \quad l_1 = l_1^0, \quad l_2 = l_2^0, \quad w = l_1^0 x_1 + l_2^0 x_2$$

ce qui, combiné avec (52) redonne (48).

cqfd

On peut également interpréter les déformations (45), (46) en partant du champ de déplacement tridimensionnel (31) et en calculant le tenseur de déformation associé  $\epsilon_{ij}$ . On obtient ainsi directement

$$(54) \quad \begin{cases} \epsilon_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta} + \alpha_3 k_{\alpha\beta} \\ \epsilon_{\alpha 3} = \gamma_\alpha, \quad \epsilon_{33} = 0 \end{cases}$$

Ainsi,  $d_{\alpha\beta}$  est la déformation plane du feuillet moyen  $x_3 = 0$ ,  $k_{\alpha\beta}$  est le gradient vertical de déformation plane, tandis que  $\gamma_\alpha$  caractérise le glissement  $\epsilon_{\alpha 3}$ .

### 3. PLAQUES DE LOVE-KIRCHHOFF

#### 3.1 L'HYPOTHESE DE LOVE-KIRCHHOFF

On fait traditionnellement en théorie des plaques l'hypothèse suivante

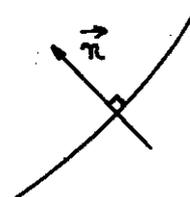
Hypothèse de Love-Kirchhoff. Les normales restent normales au plan moyen déformé.

C'est, en théorie des plaques, l'analogue de l'hypothèse de Navier-Bernoulli pour les milieux curvilignes (§ XII.1.3). Comme on l'a vu plus haut, cette hypothèse revenait à négliger l'influence de l'effort tranchant, ce qui est justifié dans la plupart des applications. Il en va de même en théorie des plaques, et l'hypothèse de Love-Kirchhoff conduit à la théorie classique des plaques en flexion. On démontre alors l'analogue du théorème 2 du § XIV.2.2

Théorème 2. Une CNS pour que la normale reste normale au plan moyen déformé est que

$$(55) \quad \gamma_\alpha = l_\alpha - w_{,\alpha} = 0$$

Dém. Compte-tenu de l'hypothèse de petits déplacements ( $u_\alpha, w, l_\alpha$  petits) l'équation de la déformée du



plan moyen est

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_3 + w(x_1, x_2) = 0$$

Son vecteur unitaire normal est donc, à un terme du second ordre près,

$$(56) \quad \vec{n} = \frac{\vec{\text{grad}} \varphi}{|\text{grad} \varphi|} = (w_{,1}, w_{,2}, 1)$$

alors que d'après (29) la déformée de la normale est donnée par

$$(57) \quad (l_1, l_2, 1)$$

et la comparaison de (56) et (57) démontre le théorème.

cqfd

L'hypothèse de Love-Kirchhoff revient donc à annuler  $\gamma_\alpha$  et donc à supprimer l'effort tranchant  $Q_\alpha$  dans l'expression (44) du travail des efforts intérieurs

$$(58) \quad \dot{W}_{int}^* = - \iint_D [ N_{\alpha\beta} \dot{d}_{\alpha\beta}^* + C_{\alpha\beta} \dot{k}_{\alpha\beta}^* ] dS$$

Dans le cadre de cette hypothèse, le déplacement est alors uniquement caractérisé par  $u_\alpha$  et  $w$ , c'ad par le déplacement du feuillet moyen. En utilisant les équations d'équilibre (18) et (27), on peut oublier complètement l'effort tranchant. La déformation  $k_{\alpha\beta}$  est donnée, d'après (46) et (55), par

$$(59) \quad k_{\alpha\beta} = w_{,\alpha\beta}$$

C'est donc le tenseur de courbure du plan moyen déformé. Plus précisément, on montre directement que si l'on définit la courbure directionnelle  $\kappa(\vec{v})$  comme étant la courbure de la courbe  $C(\vec{v})$ , trace du plan moyen déformé sur le plan vertical passant par  $\vec{v}$ , alors

$$(60) \quad \begin{cases} \kappa(\vec{e}_1) = w_{,11} = k_{11} \\ \kappa(\vec{e}_2) = w_{,22} = k_{22} \\ \kappa(\vec{v}) = w_{,\alpha\beta} v_\alpha v_\beta = k_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta \end{cases}$$

Le tenseur  $k_{\alpha\beta}$  apparaît donc comme une forme bilinéaire donnant les courbures directionnelles pour toute direction  $\vec{v}$ . C'est un tenseur symétrique, donc diagonalisable, et on peut définir deux courbures principales.

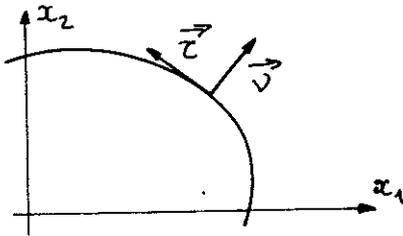
La théorie des plaques fait donc intervenir deux tenseurs statiques: le tenseur des efforts plans  $N_{\alpha\beta}$  et le tenseur de moments  $C_{\alpha\beta}$ , et deux tenseurs cinématiques de déformation: le tenseur de déformation plane  $d_{\alpha\beta}$  et le tenseur de courbure  $k_{\alpha\beta}$ .

3.2 CONDITIONS AUX LIMITES

La difficulté majeure, en théorie des plaques de Love-Kirchhoff, provient des conditions aux limites. En effet, si on part de l'expression (34) de la puissance virtuelle des efforts de contact à travers  $\partial D$ , on obtient avec (55)

$$(61) \quad \dot{W}_{\text{contact}} = \oint_{\partial D} \left( \eta_{\alpha} \dot{u}_{\alpha} - T \dot{w} + \mathcal{E}_{\alpha} \dot{w}_{,\alpha} \right) ds$$

et les deux derniers termes de la quantité intégrée ne sont pas indépendants.



Nous introduisons le long de la courbe  $\partial D$  les dérivées normale et tangentielle de la fonction  $w$

$$(62) \quad \begin{cases} \text{grad } w = \frac{dw}{dn} \vec{\nu} + \frac{dw}{ds} \vec{\tau} \\ w_{,\alpha} = \frac{dw}{dn} \nu_{\alpha} + \frac{dw}{ds} \tau_{\alpha} \end{cases}$$

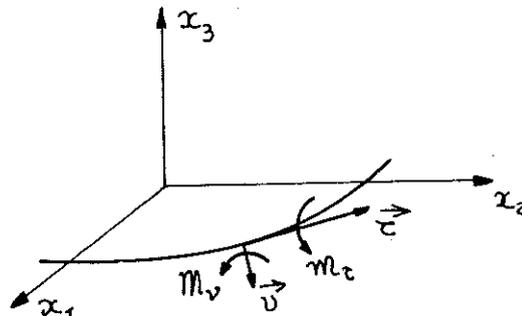
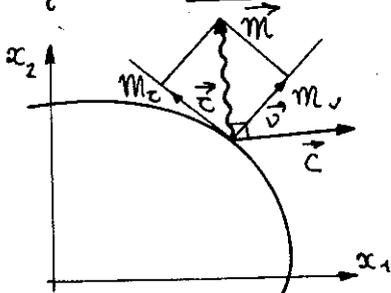
Nous pouvons alors écrire

$$(63) \quad \mathcal{E}_{\alpha} \dot{w}_{,\alpha} = \mathcal{E}_{\alpha} \nu_{\alpha} \frac{d\dot{w}}{dn} + \mathcal{E}_{\alpha} \tau_{\alpha} \frac{d\dot{w}}{ds}$$

mais d'après (6)

$$(64) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_{\alpha} \nu_{\alpha} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\nu} = (\vec{m} \wedge \vec{e}_3) \cdot \vec{\nu} = \vec{m} \cdot (\vec{e}_3 \wedge \vec{\nu}) = \vec{m} \cdot \vec{\tau} = m_{\tau} \\ \mathcal{E}_{\alpha} \tau_{\alpha} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\tau} = (\vec{m} \wedge \vec{e}_3) \cdot \vec{\tau} = \vec{m} \cdot (\vec{e}_3 \wedge \vec{\tau}) = -\vec{m} \cdot \vec{\nu} = -m_{\nu} \end{cases}$$

où  $m_{\tau}$  est un moment tangent à  $\partial D$ , càd un moment de flexion et  $m_{\nu}$  un



moment normal à  $\partial D$  souvent appelé moment de torsion

$$(65) \quad \begin{cases} m_{\tau} = \vec{m} \cdot \vec{\tau} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\nu} = C_{\alpha\beta} \nu_{\alpha} \nu_{\beta} \\ m_{\nu} = \vec{m} \cdot \vec{\nu} = -\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\tau} = -C_{\alpha\beta} \nu_{\alpha} \tau_{\beta} \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi

$$(66) \quad \oint_{\partial D} \varepsilon_{\alpha} \dot{w}_{,\alpha} ds = \oint_{\partial D} \left[ m_{\tau} \frac{d\dot{w}}{dn} - m_{\nu} \frac{d\dot{w}}{ds} \right] ds$$

Le premier terme ne pose guère de problème puisque  $d\dot{w}/dn$  est, sur  $\partial D$ , indépendant de  $\dot{w}$ , mais le second terme s'intègre par partie

$$(67) \quad - \oint_{\partial D} m_{\nu} \frac{d\dot{w}}{ds} ds = - \oint_{\partial D} m_{\nu} d\dot{w} = \oint_{\partial D} \dot{w} dm_{\nu}$$

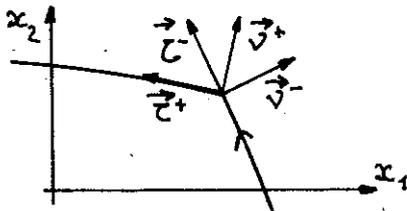
Si la fonction  $m_{\nu}$  est dérivable le long de  $\partial D$  sauf en un certain nombre de points de discontinuité, nous pouvons écrire

$$(68) \quad \oint_{\partial D} \dot{w} dm_{\nu} = \oint_{\partial D} \dot{w} \frac{dm_{\nu}}{ds} ds + \sum_i [m_{\nu}]_i \dot{w}_i$$

où l'on a noté  $[m_{\nu}]$  la discontinuité de  $m_{\nu}$ , au travers du point de discontinuité

$$(69) \quad [m_{\nu}]_i = m_{\nu}(A_i^+) - m_{\nu}(A_i^-)$$

D'un point de vue pratique, les fonctions  $C_{\alpha\beta}$  sont continues. La fonction  $m_{\nu}$  ne pourra donc présenter de discontinuité qu'aux points où  $\vec{\tau}$  et  $\vec{\nu}$  sont discontinus, c'ad aux points anguleux de  $\partial D$



$$[m_{\nu}] = C_{\alpha\beta} (\nu_{\alpha}^+ \tau_{\beta}^+ - \nu_{\alpha}^- \tau_{\alpha}^-)$$

Finalement, en reportant dans (61), on obtient

$$(70) \quad \dot{w}_{\text{contact}} = \oint_{\partial D} \left[ q_{\alpha} \dot{u}_{\alpha} + m_{\tau} \frac{d\dot{w}}{dn} - \left( T - \frac{dm_{\nu}}{ds} \right) \dot{w} \right] ds + \sum [m_{\nu}]_i \dot{w}_i$$

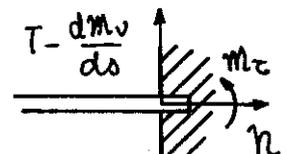
Si maintenant on reprend les conditions de liaison du § 2.1, on obtient à partir de (70):

a) Encastrement.

$$(71) \quad \dot{u}_{\alpha} = 0 \quad \dot{w} = 0 \quad , \quad \frac{d\dot{w}}{dn} = 0$$

Les efforts de liaison sont alors des densités linéiques d'efforts plans, de réaction d'appui et de moment d'encastrement

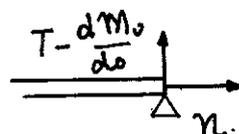
$$(72) \quad q_{\alpha} \text{ qcq} \quad T - \frac{dm_{\nu}}{ds} \text{ qcq} \quad , \quad m_{\tau} \text{ qcq}$$



b) Appui simple.

$$(73) \quad \ddot{u}_d = 0, \quad \ddot{w} = 0, \quad \frac{d\ddot{w}}{dn} qc q$$

Le moment d'encastrement disparaît

$$(74) \quad \mathcal{M}_d qc q, \quad T - \frac{d\mathcal{M}_v}{ds} qc q, \quad \mathcal{M}_\tau = 0$$


c) Bord libre.

$$(75) \quad \ddot{u}_d qc q, \quad \ddot{w} qc q, \quad \frac{d\ddot{w}}{dn} qc q$$

Les conditions aux limites sont alors

$$(76) \quad \mathcal{M}_d = 0, \quad T - \frac{d\mathcal{M}_v}{ds} = 0, \quad \mathcal{M}_\tau = 0$$

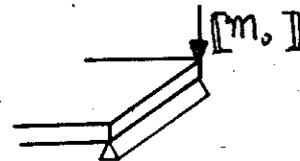
Contrairement à ce qui se passait dans la théorie générale, on ne doit pas annuler T et  $\mathcal{M}_v$ , mais seulement une densité de réaction d'appui effective

$$(77) \quad T^{eff} = T - \frac{d\mathcal{M}_v}{ds}$$

D'autre part, si la plaque présente un point anguleux, alors

- si ce point anguleux est situé sur un bord encastré ou appuyé, on a

$$(78) \quad \ddot{w} = 0, \quad [\mathcal{M}_v] qc q$$



avec apparition d'une réaction d'appui concentrée au point anguleux.

- si ce point anguleux est situé sur un bord libre

$$(79) \quad \ddot{w} qc q, \quad [\mathcal{M}_v] = 0$$

avec apparition d'une condition supplémentaire.