

Chapitre XX

FLAMBEMENT - INSTABILITE ELASTIQUE

1. FLAMBEMENT D'UNE POUTRE DROITE

1.1 CHARGE CRITIQUE D'EULER

Lorsqu'on exerce sur une barre longue un effort de compression, l'expérience la plus naïve montre que la ruine de la structure ne se produit pas par un fluage en compression, comme le prédit la résistance des matériaux, mais par un phénomène de courbure de grande amplitude: le flambement.

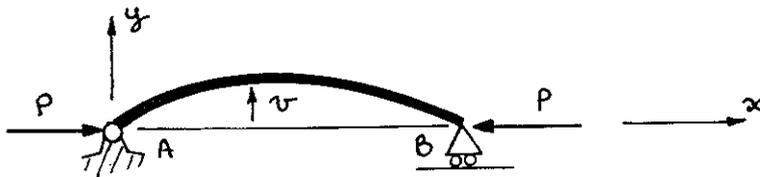
Considérons par exemple une poutre articulée-appuyée soumise à un effort de compression



La solution unique de ce problème de RDM est donnée par

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_A = P \quad , \quad Y_A = Y_B = 0 \\ N = P \quad , \quad T = 0 \quad , \quad M = 0 \\ u = \frac{Px}{ES} \quad , \quad v = 0 \quad , \quad \omega = 0 \end{array} \right.$$

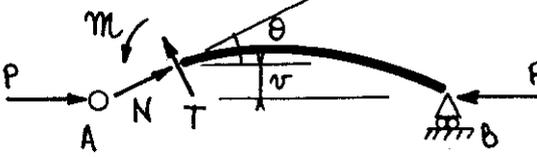
Or, il est très facile de mettre expérimentalement une solution différente par courbure de la barre



Dans cette configuration, on voit que la force P appliquée crée au point M un moment fléchissant qui sera d'autant plus important que la courbure de la poutre sera grande. On est donc en présence d'un phénomène d'instabilité. Pour en rendre compte, il est clair qu'il faut calculer les efforts intérieurs à partir de la configuration déformée courbe, et non à partir de la configuration initiale rectiligne qui, elle, ne pourra donner que (1). Nous

devons donc abandonner l'hypothèse de linéarité externe (voir § XII.1.3) qui était à la base de la RDM. Nous quittons donc le cadre de la RDM classique, incapable de rendre compte d'autre chose que de (1), mais nous essaierons néanmoins de nous en éloigner le moins possible.

Nous supposons donc connue la flèche $v(x)$, et nous allons calculer les efforts intérieurs dans la configuration déformée. Il vient

$$(2) \quad \begin{cases} N = P \cos \theta \sim P \\ T = -P \sin \theta \sim 0 \\ M = Pv \end{cases}$$


Nous nous limiterons dans la suite à un calcul en flexion pure. Cela semble très discutable car l'effort normal est certainement prépondérant. On vérifierait néanmoins facilement que la prise en compte de l'effort normal ne changerait rien d'essentiel aux résultats qui suivent.

Il reste donc à écrire la loi de comportement de flexion (XVI.52) qui relie la courbure au moment de flexion

$$(3) \quad EJ v'' = -M = -Pv$$

Nous obtenons par intégration de cette équation différentielle

$$(4) \quad v = A \cos kx + B \sin kx, \quad k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

Reste à déterminer les constantes d'intégration A et B à partir des conditions aux limites

$$(5) \quad v(0) = 0, \quad v(l) = 0$$

La première condition donne $A = 0$ et la seconde donne

$$(6) \quad B \sin kl = 0$$

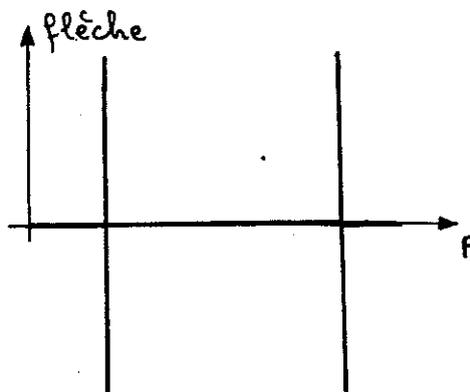
. Si $\sin kl \neq 0$, on doit donc avoir $B = 0$ et $v = 0$. La seule solution est la solution nulle; on retrouve la solution RDM (1).

. Si $\sin kl = 0$, alors B peut être quelconque, et il peut exister une solution non nulle. La constante B est alors indéterminée. Pour qu'il en soit ainsi, il faut donc que $\sin kl = 0$, c'est-à-dire d'après la définition

(4) de k

$$(7) \quad kl = n\pi, \quad P = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2}$$

Ainsi, si P est inférieur à la valeur (7) pour $n = 1$, la seule solution est la solution nulle.



Pour

$$(8) \quad P = P_c = \frac{\pi^2 EJ^*}{l^2}$$

il y a bifurcation, c'ad apparition de nouvelles solutions non nulles. Pour $P \geq P_c$, on retrouve à nouveau la seule solution nulle, mais on verra plus loin que cette solution n'a pas de sens physique, car il y aura eu flambement pour $P = P_c$. La charge P_c donnée par (8) est appelée la "charge critique d'Euler".

1.2 APPROCHE ENERGETIQUE

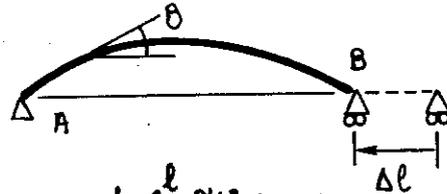
Une déformée $\tilde{v}(x)$ nulle pour $x=0$ et $x=l$ définit un champ cinématiquement admissible. Son énergie de déformation sera donnée, d'après (XVI.52) par

$$(9) \quad W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\tilde{m}^2}{EJ} dx = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \tilde{v}''^2 dx$$

Le travail de la force extérieure P est donné par

$$(10) \quad \mathcal{E}_{ext} = P \Delta l$$

On calcule Δl en écrivant qu'il n'y a pas de variation de longueur de la poutre



$$(11) \quad \Delta l = \int_0^l \cos \theta dx - l = \frac{1}{2} \int_0^l \tilde{v}'^2 dx$$

puisque $\theta \sim \text{tg} \theta = v'$ et $\cos \theta \sim 1 - \theta^2/2$

L'énergie potentielle du CCA \tilde{v} est donc donnée d'après (XVI.69) par

$$(12) \quad K(\tilde{v}) = \frac{1}{2} \int_0^l (EJ \tilde{v}''^2 - P \tilde{v}'^2) dx$$

A nouveau la notion d'énergie potentielle d'un CCA et le théorème correspondant n'ont été introduits que dans le cadre de la RDM classique. Néanmoins leur contenu physique et thermodynamique est suffisamment naturel pour que nous puissions l'étendre au cadre élargi qui nous intéresse ici. Nous développons la fonction \tilde{v} , nulle en $x=0$ et $x=l$, en série de Fourier

$$(13) \quad \tilde{v} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

On obtient alors, en reportant dans (12),

$$(14) \quad K(\tilde{v}) = \frac{\pi^2}{4l} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi^2 EJ}{l^2} m^2 - P \right) m^2 \tilde{a}_m^2 \right\}$$

Si $P < P_c$ défini par (8), alors tous les termes de (14) sont positifs, et la fonction $K(\tilde{v})$ est minimale pour $\tilde{a}_m = 0$, c'ad pour $\tilde{v} = 0$. La solution est la solution nulle.

Si $P > P_c$, alors en prenant $a_1 \neq 0$, $a_2 = a_3 = \dots = a_m = 0$, on construit une solution d'énergie potentielle moindre que la solution 0. On aura donc instabilité.

Un autre point de vue consiste à affirmer que

- si pour tout CCA \tilde{v} on a $W > \mathcal{G}_{ext}$, alors l'énergie potentielle K est définie positive, la solution est la solution nulle;
- s'il existe un CCA \tilde{v} tel que $W < \mathcal{G}_{ext}$, alors l'énergie $K(\tilde{v})$ peut devenir négative, il y a instabilité. On définit alors la charge critique P_c comme étant la plus petite charge pour laquelle on puisse trouver \tilde{v} tel que $W < \mathcal{G}_{ext}$

$$(15) \quad P_c = \inf_{\tilde{v} \text{ CCA}} \frac{\int_0^l EJ v''^2 dx}{\int_0^l v'^2 dx}$$

On montre alors - c'est un problème classique de calcul des variations - que pour notre problème, c'ad avec les conditions (5), P_c est donné par (8). On voit alors que tout CCA \tilde{v} définit une borne supérieure de la charge critique, et si \tilde{v} est bien choisi (par intuition ou par expérience) une estimation de P_c . Par exemple, pour le problème qui nous intéresse, la charge critique correspond à

$$(16) \quad \tilde{v} = a \sin \frac{\pi x}{l} \quad \Rightarrow \quad P_c = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = 9,87 \frac{EJ}{l^2}$$

Et pour d'autres fonctions \tilde{v} , on obtient les résultats suivants

$$(17) \quad \tilde{v} = a x(l-x) \quad \Rightarrow \quad P_c = 12 \frac{EJ}{l^2}$$

$$(18) \quad \tilde{v} = a \left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{l^3 x}{12} \right) \quad \Rightarrow \quad P_c = \frac{168}{17} \frac{EJ}{l^2} = 9,88 \frac{EJ}{l^2}$$

La forme (17) est le CCA le plus simple, la forme (18) est la déformée statique (XVIII.17) de cette poutre soumise à une charge répartie uniforme.

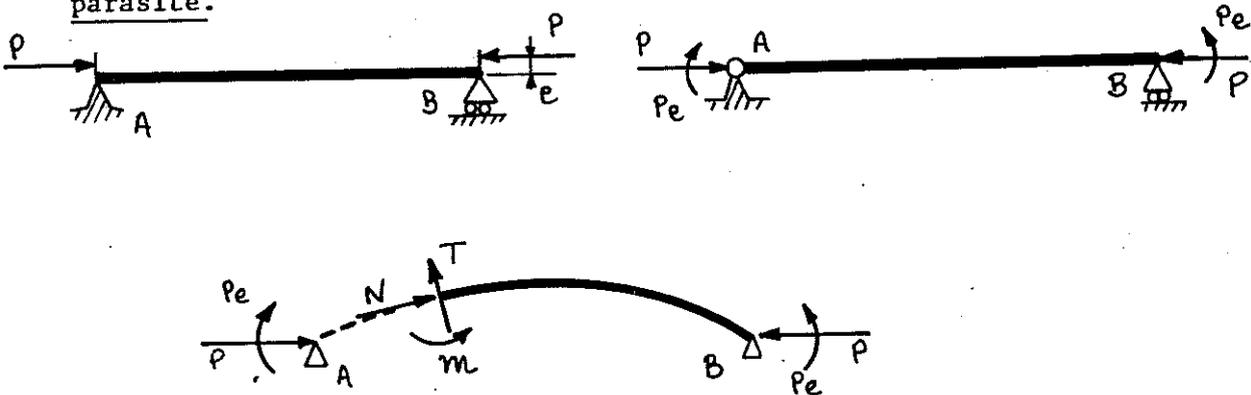
L'énorme avantage de cette approche énergétique est d'être générale et de pouvoir s'appliquer à n'importe quel problème en l'absence de solutions analytiques. De plus, elle se prête bien aux calculs approchés et numériques. D'un point de vue mathématique, il s'agit de problèmes aux valeurs propres, très proches des problèmes rencontrés en Mécanique des Vibrations et justiciables des mêmes méthodes.

1.3 INFLUENCE DES DEFAUTS

Le flambement se caractérise entre autres par une rupture de symétrie: la poutre initialement symétrique par rapport à l'axe des x perd cette symétrie. Il est donc naturel que tous les défauts susceptibles de perturber cette symétrie facilitent le flambement. L'analyse que nous allons présenter peut être menée pour différents types de défauts par rapport à la situation idéale envisagée

- Défauts de rectitude de la poutre,
- Petite charge transversale appliquée,
- Charge excentrée ou désalignée,
- Inhomogénéité de la poutre, etc

Tous ces défauts donneraient des résultats analogues. Nous présenterons l'analyse sur un exemple choisi pour sa simplicité: défaut de centrage de la force appliquée, ou, ce qui revient au même, application en B d'un moment parasite.



Nous obtenons alors directement au lieu de (2)

$$(19) \quad N = P \cos \theta \quad , \quad T = -P \sin \theta \quad , \quad M = P v - P e$$

L'équation différentielle (3) devient

$$(20) \quad \begin{aligned} EJ v'' &= -Pv + Pe \\ EJ v'' + Pv &= Pe \end{aligned}$$

et pour obtenir la solution générale, il faut rajouter à la solution générale (4) de l'équation sans second membre une solution particulière de l'équation avec second membre

$$(21) \quad v = A \cos kx + B \sin kx + e \quad , \quad k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

et pour déterminer les constantes A et B , il faut écrire les conditions aux limites (5)

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} A + e &= 0 & A \cos kl + B \sin kl + e &= 0 \\ A &= -e & B &= -\frac{e(1 - \cos kl)}{\sin kl} \end{aligned} \right.$$

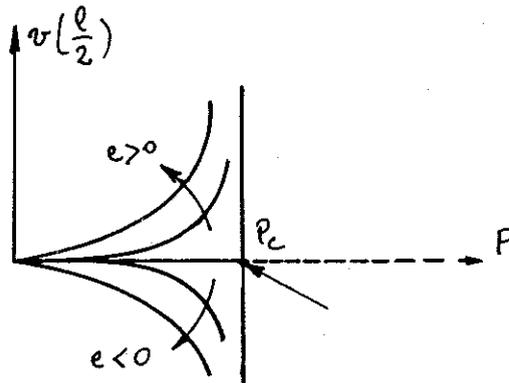
soit finalement

$$(23) \quad v = e \left[1 - \cos kx - \frac{1 - \cos kl}{\sin kl} \sin kx \right] = e \left[1 - \frac{\cos k(\frac{l}{2} - x)}{\cos \frac{kl}{2}} \right]$$

La flèche au milieu $v(l/2)$ vaut donc

$$(24) \quad v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{\cos \frac{kl}{2}} - 1 \quad e$$

Ainsi, contrairement à ce qui se passait dans le cas parfait du § 1.1, la solution du problème est non nulle et fonction croissante de k , et elle devient singulière lorsque $kl \rightarrow \pi$, c'ad lorsque $P \rightarrow P_c$. Le diagramme de bifurcation du § 1.1 devient

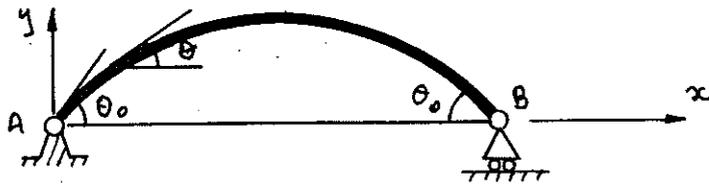


et on retrouve pour $e \rightarrow 0$ une situation proche de celle du § 1.1, à ceci près que la solution $v = 0$ disparaît pour $P > P_c$. On voit ainsi la signification de la charge critique d'Euler: un défaut quelconque - aussi petit soit-il - provoque un "éclatement" de la solution lorsque la charge P atteint la charge critique d'Euler.

1.4 CHARGEMENTS POST-CRITIQUES

Que se passe-t-il si l'on dépasse la charge critique ? L'expérience commune montre qu'alors la poutre peut prendre des déformations très importantes. Or, l'analyse que nous avons présentée était basée sur la loi de comportement (3), soit sur une loi de comportement en petites perturbations. En fait, nous ne nous sommes écartés de la RDM linéaire classique que pour l'écriture des équations d'équilibre en configuration déformée. Nous avons construit une théorie de stabilité linéaire qui décrit correctement la "bifurcation" (c'ad l'apparition d'une solution non triviale pour $P = P_c$), mais ne peut pas décrire ce qui se passe au delà. Pour ce faire, il faut introduire une théorie non linéaire. La théorie qui convient ici est une théorie "Petites déformations, Grands déplacements et Grandes rotations". Cette

théorie suppose que dans la poutre les déplacements peuvent devenir importants, mais que les déformations, au sens du Chapitre XIV, restent petites.



Dans une hypothèse de flexion pure, cela revient à supposer que la déformation de flexion, c'est-à-dire la courbure, reste petite. Nous conserverons donc la loi de comportement linéaire mais en remplaçant l'expression linéarisée de la courbure v'' par son expression générale non linéaire

$$(25) \quad EJ \kappa = - m, \quad \kappa = \frac{d\theta}{ds}$$

On obtient donc, au lieu de (3), l'équation

$$(26) \quad EJ \frac{d\theta}{ds} = - P y$$

soit, en dérivant par rapport à s

$$(27) \quad EJ \frac{d^2\theta}{ds^2} = - P \frac{dy}{ds} = - P \sin\theta$$

Cette équation est classique. On l'intègre une fois

$$(28) \quad EJ \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 2P (\cos\theta - \cos\theta_0)$$

où θ_0 est la valeur de θ pour $d\theta/ds = 0$, c'est-à-dire d'après (26) en A et B. On intègre (28) de la manière habituelle

$$(29) \quad ds = - \frac{d\theta}{2k \sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}} \quad k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

On en déduit, pour θ variant entre θ_0 et $-\theta_0$

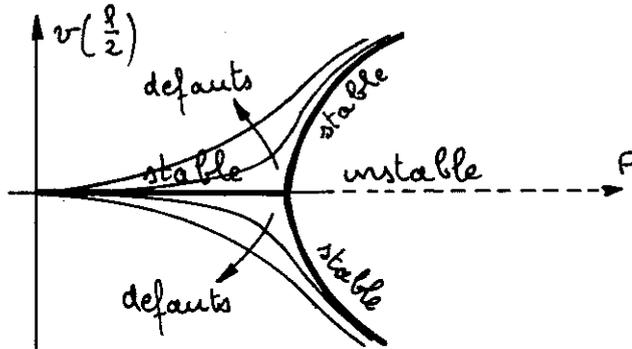
$$(30) \quad s(\theta) = \frac{1}{2k} \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}} \\ x(\theta) = \frac{1}{2k} \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}, \quad y(\theta) = \frac{1}{2k} \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

En particulier, la longueur l et la flèche $v(l/2)$ sont données par

$$(31) \quad l = \frac{1}{k} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}} = l(k, \theta_0)$$

$$(32) \quad f = v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{2k} \int_0^{\theta_0} \frac{\sin \theta \, d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}} = f(k, \theta_0)$$

Ces différentes intégrales sont tabulées et la formule (31) permet de calculer θ_0 pour une charge $P > P_c$ donnée (la longueur l est fixée une fois pour toute). On obtient alors le diagramme de bifurcation suivant



On peut alors montrer que la solution $v = 0$ est stable pour $P < P_c$ et instable pour $P > P_c$, alors que les deux branches bifurquées définies par (30), (31) et (32) sont stables. Ce diagramme correspond à la poutre parfaite du § 1.1. On a également tracé sur le diagramme les courbes correspondant à l'influence des défauts. Les résultats sont similaires à ceux du § 1.3.

De manière générale, ces problèmes de stabilité non linéaire sont des problèmes très difficiles, encore mal compris.

1.5 CALCUL AU FLAMBEMENT

Nous avons envisagé une poutre articulée-appuyée. La prise en compte d'autres types de conditions aux limites ne pose pas de problème particulier. Envisageons par exemple une poutre encastrée-appuyée



La solution RDM est encore donnée par (1) avec de plus $M_A = 0$. Pour calculer la charge critique d'Euler, on suppose connue la déformée $v(x)$



et l'inconnue hyperstatique Y . Les efforts intérieurs sont alors donnés

par

$$(33) \quad N \sim P, \quad T \sim -Y, \quad m = Pv - Y(l-x)$$

L'équation différentielle est donc

$$(34) \quad EJv'' = -Pv + Y(l-x)$$

avec les conditions aux limites

$$(35) \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(l) = 0$$

La solution générale de (34) est

$$(36) \quad v = A \cos kx + B \sin kx + \frac{Y}{P}(l-x)$$

Les conditions aux limites (35) donnent alors le système

$$(37) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & l/P \\ 0 & k & -1/P \\ \cos kl & \sin kl & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ Y \end{bmatrix} = 0$$

Si le déterminant de la matrice est non nul, alors on obtiendra $A = B = Y = 0$ et on ne peut avoir que la solution nulle. La charge critique d'Euler sera donc la première valeur de P annulant le déterminant

$$(38) \quad \frac{1}{P} [\sin kl - kl \cos kl] = 0$$

Si α_1 est la première racine de l'équation

$$(39) \quad \sin \alpha - \alpha \cos \alpha = 0$$

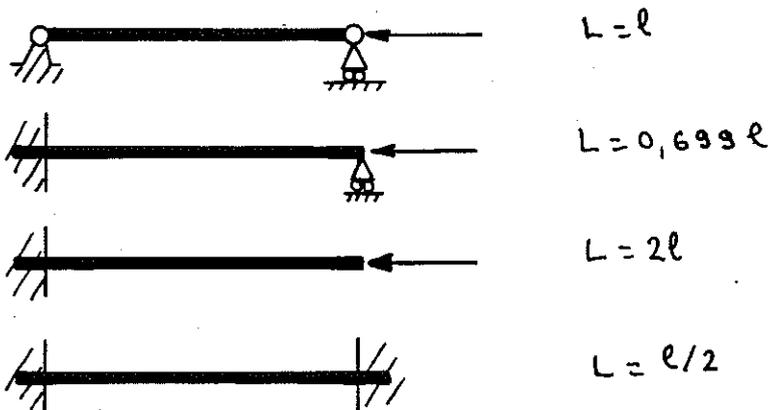
la charge critique d'Euler sera donnée par

$$(40) \quad P_c = \frac{\alpha_1^2 EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2}$$

où L est la "longueur libre de flambement", c'est la longueur d'une poutre articulée-appuyée ayant même charge critique que la poutre considérée. On trouve ici

$$(41) \quad \alpha_1 = 1,430 \pi, \quad L = 0,699 l$$

Plus généralement, on peut calculer la longueur libre de flambement pour diverses conditions aux limites



On voit donc l'importance des conditions aux limites.

Lorsqu'une poutre travaille en compression, ce qui est notamment le cas dans un treillis, il convient de la dimensionner non seulement en compression, comme nous l'avons fait au Chapitre XVII, mais aussi au flambement. Le dimensionnement au flambement consiste simplement à écrire que la force de compression appliquée est plus petite que la charge critique d'Euler

$$(42) \quad P \leq \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = P_c$$

Il est clair que le moment d'inertie qui intervient dans (42) est le plus petit des deux moments d'inertie principaux. Les sections rectangulaires ou en I ne sont donc pas intéressantes, car le moment d'inertie important dans une direction est faible dans l'autre, et c'est celui-là qui conditionne la résistance au flambement. Il vaut mieux utiliser des sections circulaires ou des cornières.

Considérons une poutre donnée travaillant en compression. Le dimensionnement à la compression donne

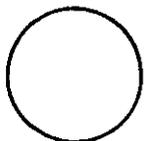
$$(43) \quad P \leq S\sigma_e = P_e$$

Si $P_e < P_c$, c'est à dire si

$$(44) \quad S\sigma_e \leq \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad l \leq l_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}} \sqrt{\frac{J}{S}}$$

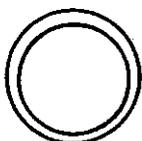
alors le dimensionnement à la compression est le plus exigeant, tandis que le dimensionnement au flambement est plus exigeant dans le cas contraire, c'est à dire si $l > l_0$. La longueur l_0 , qui ne dépend que de la section et du matériau, caractérise donc les risques de flambement: si $l > l_0$, le flambement n'est pas à craindre, alors que si $l < l_0$, il faut en tenir compte.

Section circulaire



$$\sqrt{\frac{J}{S}} = \frac{d}{4}, \quad l_0 = \frac{\pi d}{4} \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}} = \text{de } 10d \text{ à } 30d$$

Section tubulaire



$$\sqrt{\frac{J}{S}} = \frac{d}{2\sqrt{2}}, \quad l_0 = \sqrt{2} \text{ fois celle de la section pleine}$$

ce qui montre l'avantage de la section tubulaire. On remarque aussi que le flambement est d'autant plus à craindre que σ_e est élevé, c'est à dire que l'acier

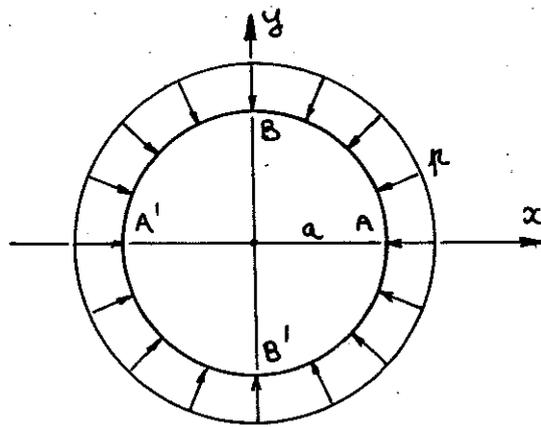
est de haute qualité. La qualité de l'acier utilisé n'améliore en rien la résistance au flambement.

2. AUTRES EXEMPLES D'INSTABILITE

On rencontre en RDM de nombreux autres types d'instabilité. Nous allons en présenter deux, mais on trouvera dans la littérature de nombreux autres exemples, voir [49], [50]. De manière générale, on retrouve dans tout problème d'instabilité élastique les propriétés que nous avons mises en évidence pour le flambement d'une poutre droite. Nous nous limiterons donc au calcul de la charge critique.

2.1 ANNEAU HYPERSTATIQUE SOUS PRESSION

Considérons l'anneau hyperstatique du § XIX.3.2 soumis à une pression externe uniforme p . (Ce problème correspond aussi à la stabilité d'un réservoir cylindrique mince sous pression externe).



La solution RDM correspond à un moment fléchissant nul

$$(45) \quad N = a p \quad , \quad T = 0 \quad , \quad \mathcal{M} = 0$$

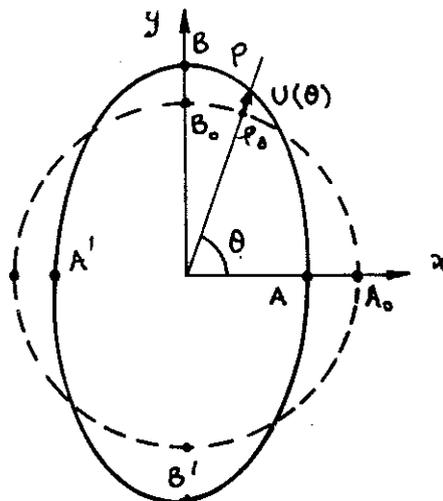
On vérifie en effet facilement que cette répartition d'efforts intérieurs

$$(46) \quad \vec{\mathcal{Q}} = a p \vec{e}_\theta \quad , \quad \vec{\mathcal{M}} = 0$$

vérifie les équations d'équilibre (XIII.17) et (XIII.18) avec le chargement $\vec{f} = -p \vec{e}_r$, $\vec{y} = 0$ et définit donc un CSA d'énergie de déformation nulle en flexion pure. C'est donc la solution (§ XIX.3.3). L'expérience nous suggère le mode de flambement suivant caractérisé par un déplacement radial

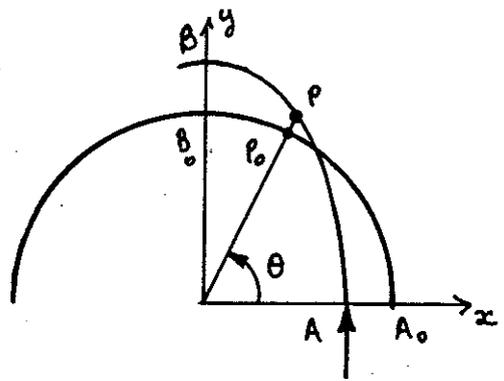
$$(47) \quad \vec{u} = U(\theta) \vec{e}_r$$

Compte-tenu des symétries, on a un système hyperstatique interne de degré 1, et on introduit comme inconnue hyperstatique le moment en A, $Z = \mathcal{M}_A$.



Pour calculer le moment de flexion - 164 -
 en P (càd dans la configuration dé-
formée), on remarque que d'après la
loi de transport des moments

$$(48) \quad \begin{cases} \vec{\mathcal{M}}_P[\mathcal{T}(\theta)] = \vec{\mathcal{M}}_{P_0}[\mathcal{T}(\theta)] + \vec{P}P_0 \wedge \vec{\mathcal{T}}(\theta) \\ \vec{\mathcal{M}}_{A_0}[\mathcal{T}(0)] = \vec{\mathcal{M}}_A[\mathcal{T}(0)] + \vec{A}_0A \wedge \vec{\mathcal{T}}(0) \end{cases}$$



en notant $[\mathcal{T}(\theta)]$ le torseur des efforts intérieurs dans la section située
 à θ . D'autre part, d'après l'équilibre de AP, on peut écrire

$$(49) \quad \begin{cases} \vec{\mathcal{M}}_{P_0}[\mathcal{T}(\theta)] = \vec{\mathcal{M}}_{A_0}[\mathcal{T}(0)] + \vec{P}_0A_0 \wedge \vec{\mathcal{T}}(0) + \vec{\mathcal{M}}_{P_0}[\int \vec{f} ds] \\ \vec{\mathcal{T}}(\theta) = \vec{\mathcal{T}}(0) + \int \vec{f} ds \end{cases}$$

mais on a, comme pour la solution RDM (45), $\vec{\mathcal{T}}(0) = \vec{\mathcal{Q}}_A = (\rho/a) \vec{e}_\theta$. Les
équations d'équilibre étant les mêmes que pour la solution RDM (45), on
trouve alors, d'après (46),

$$(50) \quad \begin{aligned} \vec{\mathcal{T}}(\theta) &= \vec{\mathcal{Q}}_{P_0} \Big|_{RDM} = \frac{\rho}{a} \vec{e}_\theta \\ \vec{P}_0A_0 \wedge \vec{\mathcal{T}}(0) + \vec{\mathcal{M}}_{P_0}[\int \vec{f} ds] &= \vec{m}_{P_0} \Big|_{RDM} = 0 \end{aligned}$$

La formule (48) se réduit alors à

$$(51) \quad \vec{\mathcal{M}}_P[\mathcal{T}(\theta)] = \vec{\mathcal{M}}_A[\mathcal{T}(0)] + \vec{A}_0A \wedge \vec{\mathcal{T}}(0) + \vec{P}P_0 \wedge \vec{\mathcal{T}}(\theta)$$

Compte-tenu de (50) et de (47), il vient donc

$$(52) \quad m = Z + \rho a [U(0) - U(\theta)]$$

Soit U et V les composantes du déplacement en coordonnées cy-
lindriques

$$(53) \quad \vec{u} = U \vec{e}_n + V \vec{e}_\theta, \quad \vec{\omega} = \omega \vec{e}_y$$

On tire alors de (XIV.37) les relations

$$(54) \quad \begin{cases} \vec{\chi} = \frac{d\vec{\omega}}{ds} = \frac{1}{a} \frac{d\omega}{d\theta} \vec{e}_y \\ \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{u}}{ds} + \vec{u} \wedge \vec{\omega} = \left[\frac{1}{a} \left(\frac{dU}{d\theta} - V \right) + \omega \right] \vec{e}_n + \frac{1}{a} \left(\frac{dV}{d\theta} + U \right) \vec{e}_\theta \end{cases}$$

Les lois de comportement (XVI.43) en flexion pure donnent alors

$$(55) \quad \begin{cases} \frac{1}{a} \frac{d\omega}{d\theta} = - \frac{m}{EJ} \\ \frac{1}{a} \left(\frac{dV}{d\theta} + U \right) = \varepsilon_\theta = 0 \Rightarrow \frac{dV}{d\theta} = -U \\ \frac{1}{a} \left(\frac{dU}{d\theta} - V \right) + \omega = \varepsilon_n = 0 \Rightarrow \frac{dU}{d\theta} = V - a\omega \end{cases}$$

En dérivant la troisième équation par rapport à θ , on trouve

$$(56) \quad \frac{d^2 U}{d\theta^2} + U = -a \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{a^2 \pi}{EJ}$$

équation générale de la déformée en flexion d'une poutre circulaire.

On reporte maintenant (52) dans (56)

$$(57) \quad \frac{d^2 U}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{\mu a^3}{EJ}\right) U(\theta) = \frac{a^2}{EJ} [Z + \mu a U(0)]$$

La solution générale de cette équation est

$$(58) \quad U = A \cos k\theta + B \sin k\theta + \frac{a^2}{k^2 EJ} [Z + \mu a U(0)]$$

$$(59) \quad k = \sqrt{1 + \frac{\mu a^3}{EJ}}$$

Les conditions aux limites sont ici remplacées par la condition de périodicité de U , qui doit être fonction périodique de période 2π . On doit donc avoir $k = m$ et la charge critique μ sera obtenue pour $k=2$ c'ad pour

$$(60) \quad \mu = \mu_c = \frac{3 EJ}{a^3}$$

2.2 FLAMBEMENT EN ROTATION

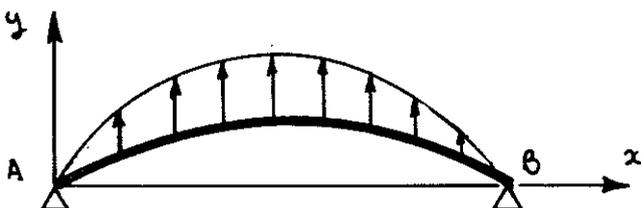
Considérons une poutre sur deux appuis, qui tourne autour de son axe à la vitesse angulaire Ω , et nous cherchons sa configuration d'équilibre (relatif).



La force centrifuge se traduit donc par une force répartie de densité

$$(61) \quad \mu = \rho \Omega^2 v$$

Dans le cadre de l'approximation RDM classique, on écrit les équations d'équilibre dans la configuration de référence ($v = 0$). La densité de force μ est donc nulle, et la solution est également nulle. Pour mettre en évidence une instabilité éventuelle, nous devons donc écrire les équations d'équilibre dans la configuration déformée



Nous partons des équations (XIII.24) et (XIII.25), qui donnent

$$(62) \quad \frac{d^2 m}{dx^2} = -p = -\rho \Omega^2 v$$

En dérivant la loi de comportement (XVI.52) on obtient donc pour v l'équation différentielle

$$(63) \quad EJ \frac{d^4 v}{dx^4} - \rho \Omega^2 v = 0$$

dont l'intégrale générale est

$$(64) \quad v = A \cos kx + B \sin kx + C \operatorname{ch} kx + D \operatorname{sh} kx$$

$$(65) \quad k^4 = \frac{\rho \Omega^2}{EJ}$$

Les conditions aux limites à écrire sont

$$(66) \quad v(0) = 0, \quad v(l) = 0, \quad m(0) = 0, \quad m(l) = 0$$

soit, compte-tenu de (XVI.52)

$$(67) \quad v(0) = 0, \quad v''(0) = 0, \quad v(l) = 0, \quad v''(l) = 0$$

On obtient donc le système

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} A + C = 0 \\ -k^2 A + k^2 C = 0 \\ A \cos kl + B \sin kl + C \operatorname{ch} kl + D \operatorname{sh} kl = 0 \\ -k^2 A \cos kl - k^2 B \sin kl + k^2 C \operatorname{ch} kl + k^2 D \operatorname{sh} kl = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = C = 0$$

soit finalement

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} B \sin kl + D \operatorname{sh} kl = 0 \\ -B \sin kl + D \operatorname{sh} kl = 0 \end{array} \right. \quad B \sin kl = 0, \quad D \operatorname{sh} kl = 0, \quad A = C = 0$$

Ainsi, si $\sin kl \neq 0$ on aura $A = B = C = D = 0$, la seule solution est la solution nulle. Si $\sin kl = 0$, alors on a la solution

$$(70) \quad \sin kl = 0, \quad v = B \sin kx$$

On en déduit la vitesse critique de rotation

$$(71) \quad k = \frac{\pi}{l}, \quad \Omega_c = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho}}$$

qui correspond à l'apparition d'une instabilité de flexion. On verra dans le cours de Mécanique des Vibrations que cette vitesse correspond à la pulsation propre du premier mode de flexion. Plus généralement, le flambement en rotation est gouverné par les mêmes équations que les vibrations propres, [48].