

Chapitre XIX

STRUCTURES PLANES

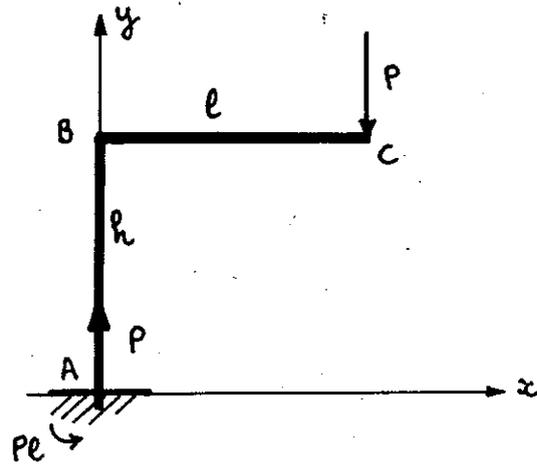
1. STRUCTURES ISOSTATIQUES

1.1 CONSOLE COUDEE

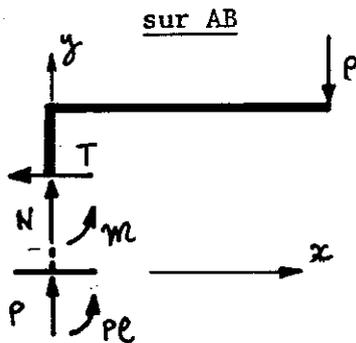
Nous prenons comme premier exemple une console coudeée ABC encastrée en A.

La structure est isostatique et nous avons

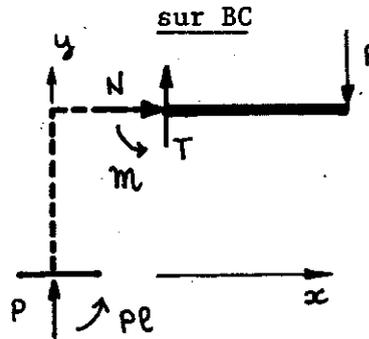
$$(1) \quad \begin{cases} X_A = 0 & Y_A = P \\ M_A = Pl \end{cases}$$



Les efforts intérieurs sont alors calculés comme on l'a fait au § XIII.2.2



$$(2) \quad \begin{cases} N = P \\ T = 0 \\ m = Pl \end{cases}$$



$$\begin{cases} N = 0 \\ T = P \\ m = P(l-x) \end{cases}$$

Comme on l'a vu au § XVI.2.2, on peut négliger l'effort tranchant dans le dimensionnement et, la partie AB étant la plus sollicitée, la condition

(XVI.31) donne

$$(3) \quad \frac{Pl}{J/\eta} + \frac{P}{S} \leq \sigma_e$$

soit, pour une section carrée de côté a

$$(4) \quad \frac{6Pl}{a^3} + \frac{P}{a^2} \leq \sigma_e$$

le second terme (contribution de l'effort normal) étant $O(a/l)$ par rapport au premier (moment fléchissant).

Pour calculer le déplacement le long de la poutre, on peut utiliser les formules de Navier-Bresse (XVI.46), (XVI.49) ou intégrer directement (XVI.45) et (XVI.47).

Sur AB on a $\Delta = \eta y$, $\theta = \pi/2$; l'intégration de (XVI.45) et (XVI.47) se fait directement, compte-tenu des conditions d'encastrement en A

$$\begin{cases} \mu_A = 0 & , & v_A = 0 & , & \omega_A = 0 \\ \omega' = -\frac{m}{EJ} = -\frac{Pl}{EJ} & \Rightarrow & \omega = -\frac{Pl}{EJ} \eta y + \cancel{\omega_A} \\ \mu' = \frac{T}{GS_2} - \omega = \frac{Pl}{EJ} \eta y & \Rightarrow & \mu = \frac{Pl}{EJ} \frac{\eta^2 y^2}{2} + \cancel{\mu_A} \\ v' = -\frac{N}{ES} = -\frac{P}{ES} & \Rightarrow & v = -\frac{P}{ES} \eta y + \cancel{v_A} \end{cases}$$

En particulier, on a au point B

$$(5) \quad \omega_B = -\frac{Plh}{EJ} \quad , \quad \mu_B = \frac{Plh^2}{2EJ} \quad , \quad v_B = -\frac{Ph}{ES}$$

Sur BC on a $\Delta = x$, $\theta = 0$, et il vient de même

$$\begin{aligned} \omega' = -\frac{m}{EJ} = \frac{P(x-l)}{EJ} & \Rightarrow \omega = \frac{P}{EJ} \left(\frac{x^2}{2} - lx \right) + \omega_B \\ \mu' = -\frac{N}{ES} = 0 & \Rightarrow \mu = \mu_B \\ v' = -\frac{T}{GS_2} + \omega = -\frac{P}{GS_2} + \frac{P}{EJ} \left(\frac{x^2}{2} - lx \right) + \omega_B & \\ \Rightarrow v = \frac{P}{EJ} \left(\frac{x^3}{6} - l \frac{x^2}{2} \right) + \omega_B x - \frac{P}{GS_2} x + \cancel{v_B} & \end{aligned}$$

soit, compte-tenu des conditions de raccord (5)

$$\begin{cases} \omega = \frac{P}{2EJ} (x^2 - 2lx - 2lh) \\ \mu = \frac{Plh^2}{2EJ} \\ v = \frac{P}{6EJ} (x^3 - 3lx^2 - 6lhx) - \frac{Ph}{ES} - \frac{Px}{GS_2} \end{cases}$$

En particulier, on obtient au point C

$$\begin{cases} \omega_C = -\frac{Pl(2h+l)}{2EJ} \quad , \quad \mu_C = \frac{Plh^2}{2EJ} \\ v_C = -\frac{Pl^2(l+3h)}{3EJ} - \frac{Ph}{ES} - \frac{Pl}{GS_2} \end{cases}$$

Sur AC, $s = y$, $\theta = \pi/2$, il vient avec (XIII.41)

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega' = -\frac{m}{EJ} = \frac{Py}{EJ} \Rightarrow \omega = \frac{P}{EJ} \frac{y^2}{2} + \omega_A \\ \mu' = -\omega = -\frac{P}{EJ} \frac{y^2}{2} - \omega_A \Rightarrow \mu = -\frac{P}{EJ} \frac{y^3}{6} - \omega_A y + \mu_A \\ \nu' = 0 \Rightarrow \nu = \nu_A = 0 \end{array} \right.$$

ce qui donne au point C

$$(11) \quad \omega_c = \omega_A + \frac{Ph^2}{2EJ}, \quad \mu_c = -\frac{Ph^3}{6EJ} - \omega_A h, \quad \nu_c = 0$$

Sur CD, $s = x$, $\theta = 0$, il vient avec (XIII.42)

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega' = -\frac{m}{EJ} = \frac{Ph}{EJl}(l-x) \Rightarrow \omega = \frac{Ph}{EJl} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + \omega_c \\ \mu' = 0 \Rightarrow \mu = \mu_c \\ \nu' = \omega = \frac{Ph}{EJl} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + \omega_c \\ \Rightarrow \nu = \frac{Ph}{EJl} \left(l \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \omega_c x + \nu_c \end{array} \right.$$

ce qui donne au point D

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_D = \omega_c + \frac{Phl}{2EJ} = \frac{Ph(h+l)}{2EJ} + \omega_A \\ \mu_D = \mu_c = -\frac{Ph^3}{6EJ} - \omega_A h \\ \nu_D = \frac{Phl^2}{3EJ} + \omega_c l = \frac{Phl(2l+3h)}{6EJ} + \omega_A l \end{array} \right.$$

Sur DB, $s = h - y$, $\theta = -\pi/2$, il vient avec (XIII.43)

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega' = -\frac{m}{EJ} = 0 \Rightarrow \omega = \omega_D \\ \mu' = \omega = \omega_D \Rightarrow \mu = \omega_D (h - y) + \mu_D \\ \nu' = 0 \Rightarrow \nu = \nu_D \end{array} \right.$$

ce qui donne au point B

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_B = \omega_D = \frac{Ph(h+l)}{2EJ} + \omega_A \\ \mu_B = \omega_D h + \mu_D = \frac{Ph^2(2h+3l)}{6EJ} \\ \nu_B = \nu_D = \frac{Phl(2l+3h)}{6EJ} + \omega_A l \end{array} \right.$$

Nous pouvons maintenant déterminer la constante d'intégration ω_A en écrivant la dernière condition aux limites $v_B = 0$

$$(16) \quad \omega_A = - \frac{Ph(2l+3h)}{6EJ}$$

Et on obtiendrait ainsi, en reportant dans les équations précédentes, le déplacement tout au long de la poutre.

Si on cherche uniquement le déplacement horizontal du point C (où est appliquée la force P) il est beaucoup plus simple d'appliquer le théorème de Castigliano. En flexion pure, l'énergie de déformation est donnée par

$$(17) \quad W = \frac{1}{2} \int_{ACDB} \frac{m^2}{EJ} ds = \frac{1}{2EJ} \left\{ \int_0^h P^2 y^2 dy + \int_0^l \frac{P^2 h^2}{l^2} (l-x)^2 dx \right\}$$

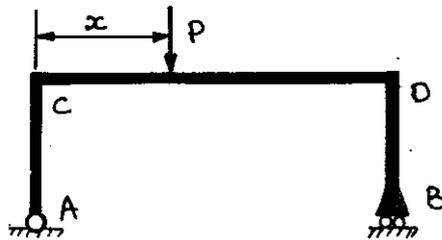
$$= \frac{P^2}{2EJ} \left[\frac{h^3}{3} + \frac{h^2 l}{3} \right] = \frac{P^2 h^2 (l+h)}{6EJ}$$

qui donne directement

$$(18) \quad u_C = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{Ph^2(l+h)}{3EJ}$$

ce qui coïncide avec la valeur obtenue en reportant (16) dans (11). On voit donc que le calcul par Castigliano est beaucoup plus rapide. De même, pour avoir le déplacement en un point donné, le déplacement horizontal du point B par exemple, on aurait meilleur compte à appliquer encore le théorème de Castigliano avec une force fictive. Pratiquement, le calcul complet du déplacement tel que nous l'avons fait ne se justifie que si l'on cherche à construire une ligne d'influence pour le déplacement horizontal du point C.

Considérons par exemple le même portique soumis à une charge verticale mobile P sur CD ($0 \leq x \leq l$). La ligne d'influence du déplacement u_C est la courbe donnant u_C en fonction de l'abscisse du point d'application de P.



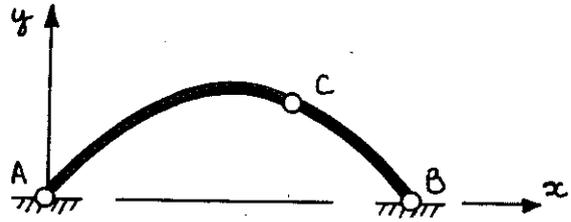
Problème 2

En prenant ce problème comme problème 2, et le problème résolu plus haut comme problème 1, le théorème de réciprocité donne directement

$$u_C^2 = -v^1(x) \text{ donné par (12)}$$

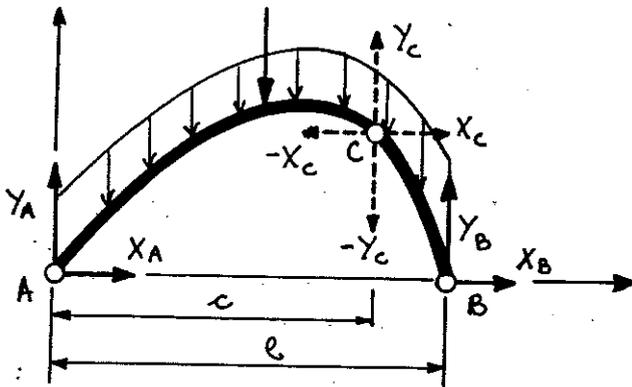
1.3 ARC A TROIS ARTICULATIONS

Nous avons envisagé aux § XII.3.2 et XIII.2.2 le cas du portique à trois articulations. De manière plus générale, on peut considérer un arc à trois articulations. C'est un système isostatique qui présente des particularités remarquables dont nous allons donner un aperçu.

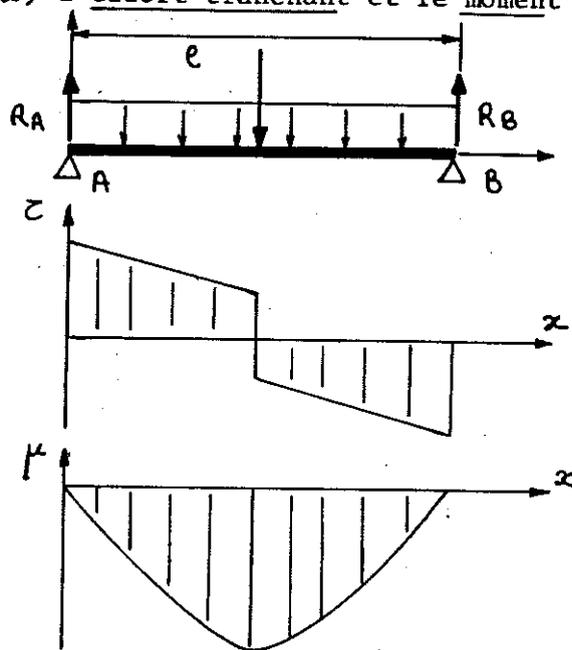


Considérons donc un

arc à trois articulations soumis à un chargement purement vertical. Nous considérons en parallèle la poutre droite AB soumise au même chargement vertical, et nous noterons $\tau(x)$ et $\mu(x)$ l'effort tranchant et le moment de flexion dans cette poutre droite



Soit $y(x)$ l'équation de la ligne moyenne de l'arc envisagé.



Nous avons 6 inconnues de liaison et 6 équations statiques: le système est isostatique. L'équilibre global de la structure donnera 3 équations. En supposant que le chargement se compose d'une densité d'effort réparti $p(x)$ et de quelques forces concentrées P_i appliquées en ξ_i , ces équations d'équilibre donnent

$$(19) \quad \begin{cases} Y_A + Y_B - \int_0^l p(\xi) d\xi - \sum P_i = 0 \\ Y_B l - \int_0^l \xi p(\xi) d\xi - \sum \xi_i P_i = 0 \end{cases}$$

$$(20) \quad X_A + X_B = 0$$

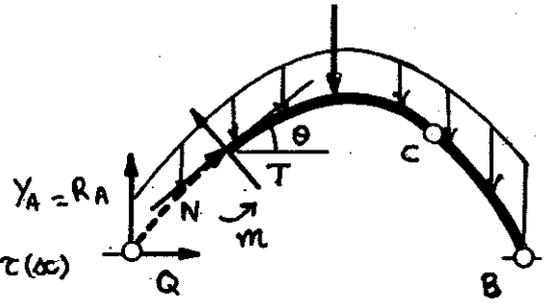
Les deux premières équations sont exactement les mêmes que pour la poutre droite, et donneront donc le même résultat; nous avons donc

$$(21) \quad Y_A = R_A \quad Y_B = R_B \quad X_A = -X_B = Q$$

où la poussée Q sera déterminée en écrivant que le moment fléchissant au point d'articulation C doit être nul (§ XIII.2.2, exemple 3).

De la même manière, le calcul des efforts intérieurs donnera

$$(22) \quad \begin{cases} T \cos \theta + N \sin \theta = R_A - \int_0^x p \, d\xi - \dots = \tau(x) \\ - T \sin \theta + N \cos \theta = Q \\ \mathcal{M} = Q y - R_A x + \int_0^x (x-\xi) p(\xi) \, d\xi + \dots = Q y - \mu(x) \end{cases}$$



où l'on retrouve l'expression de τ et μ pour la poutre droite associée. On en tire

$$(23) \quad \begin{cases} \mathcal{M} = \mu(x) + Q y(x) \\ N = \tau(x) \sin \theta + Q \cos \theta \\ T = \tau(x) \cos \theta - Q \sin \theta \end{cases}$$

En écrivant qu'à l'articulation $\mathcal{M} = 0$, on en tire Q

$$(24) \quad Q = - \frac{\mu(x)}{y(x)}$$

Nous considérons maintenant l'arc funiculaire associé au chargement appliqué et défini par

$$(25) \quad y(x) = - \lambda \mu(x) = - \frac{1}{Q} \mu(x) \quad \lambda > 0$$

où le coefficient λ est d'après (24) l'inverse de la poussée. On tire alors de (23)

$$(27) \quad \mathcal{M} = \mu(x) + Q y(x) = 0$$

et en remarquant que

$$(28) \quad \tau(x) = - \frac{d\mu}{dx} = Q \frac{dy}{dx} = Q \tan \theta$$

$$(29) \quad N = \frac{Q}{\cos \theta}, \quad T = 0$$

Ainsi, un arc à trois articulations travaille en compression simple (si $\lambda < 0$ en traction simple; c'est donc aussi la figure d'équilibre d'un fil - voir § XIV.3.2 - soumis à ce chargement), et ce quel que soit le point où se trouve l'articulation. On verra au § 3.3 que l'on peut même supprimer l'articulation. Il est clair que ce type de construction joue un rôle important pour des matériaux qui ne supportent pas des contraintes de traction (voir § XV.2.3).

2. ETUDE D'UNE STRUCTURE HYPERSTATIQUE.

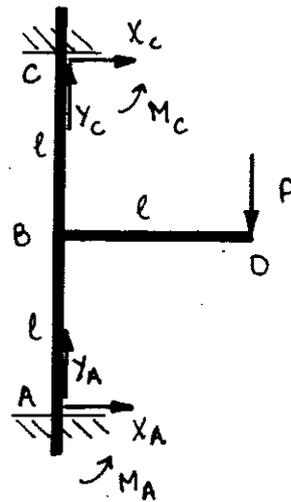
Le principe de l'étude d'une structure hyperstatique est similaire à ce que nous avons vu pour les poutres. Nous allons traiter complètement un exemple.

2.1 STATIQUE - DIMENSIONNEMENT

Nous considérons la structure ci-contre que nous supposons à section constante.

On a 6 inconnues de liaison $(X_A, Y_A, M_A, X_C, Y_C, M_C)$; le système est donc hyperstatique de degré 3.

Les équations de la statique donnent

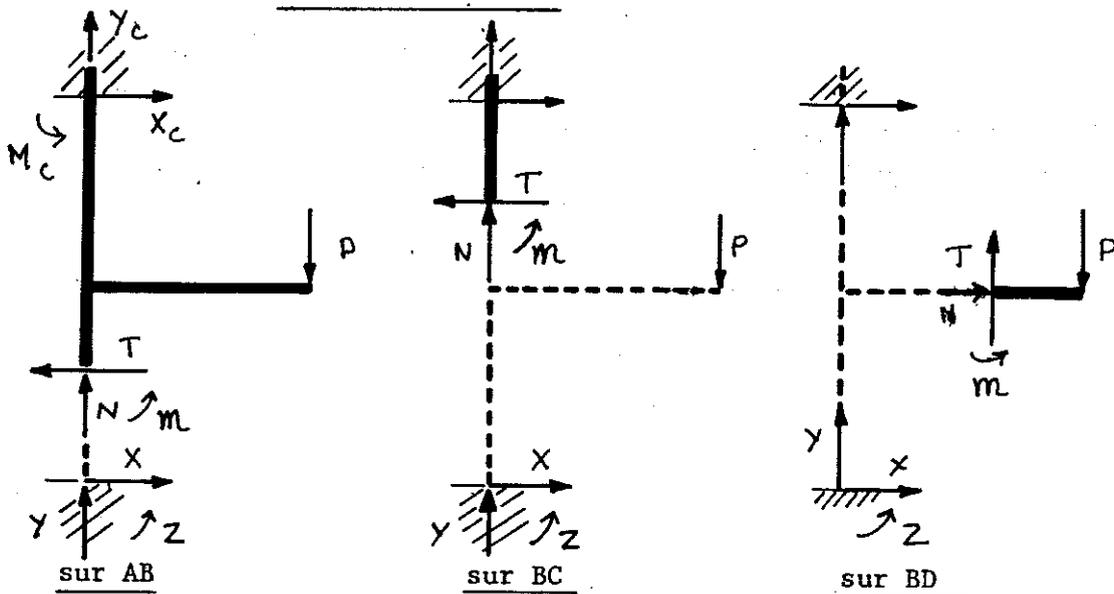


$$(30) \begin{cases} X_A + X_C = 0 \\ Y_A + Y_C = P \\ M_C + M_A + 2X_A l - Pl = 0 \end{cases}$$

et nous prendrons comme inconnues hyperstatiques X_A, Y_A et M_A .

$$(31) \begin{cases} X_A = X & , & Y_A = Y & , & M_A = Z \\ X_C = -X & , & Y_C = P - Y & , & M_C = -Z - 2lX + Pl \end{cases}$$

On calcule ensuite les efforts intérieurs



$$(32) \begin{cases} N = Y \\ T = -X \\ m = Z + Xl \end{cases} \quad \begin{cases} N = Y - P \\ T = -X \\ m = Z + Xl - Pl \end{cases} \quad \begin{cases} N = 0 \\ T = P \\ m = P(l - x) \end{cases}$$

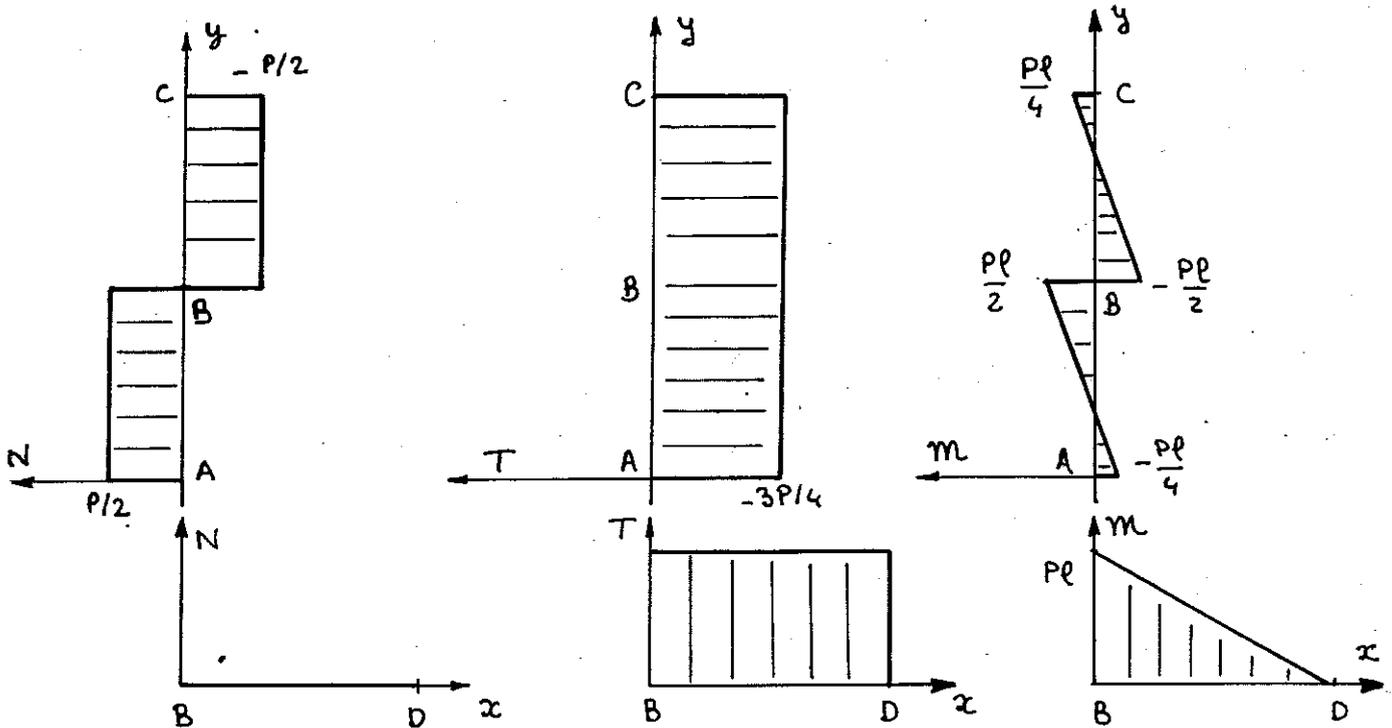
Il reste à lever l'hyperstaticité, ce qui fera l'objet des deux prochains paragraphes. Nous obtiendrons alors, en négligeant l'effort tranchant,

$$(33) \quad X = \frac{3P}{4}, \quad Y = \frac{P}{2}; \quad Z = -\frac{Pl}{4}$$

Les efforts de liaison sont alors

$$(34) \quad X_A = -X_B = \frac{3P}{4}, \quad Y_A = Y_B = \frac{P}{2}, \quad M_A = M_C = -\frac{Pl}{4}$$

et on peut tracer les diagrammes des efforts intérieurs



La section la plus sollicitée est la section B sur BD, et la condition de dimensionnement s'écrit

$$(35) \quad \frac{Pl}{J/\eta} \leq \sigma_e$$

2.2 METHODES ENERGETIQUES

Comme pour les poutres droites, la première méthode pour lever l'hyperstaticité consiste à utiliser le théorème de Menabrea. Nous allons ici faire le calcul complet, en tenant compte de l'effort normal et de l'effort tranchant. D'après (XVI.36) et (32), l'énergie de déformation est donnée par

$$(36) \quad W = \frac{1}{2ES} \left\{ \int_0^l Y^2 dy + \int_l^{2l} (Y-P)^2 dy \right\} + \frac{1}{2GS_2} \left\{ \int_0^{2l} X^2 dy + \int_0^l P^2 dx \right\} + \frac{1}{2EJ} \left\{ \int_0^l (Z+Xy)^2 dy + \int_l^{2l} (Z+Xy-Pl)^2 dy + \int_0^l P^2(l-x)^2 dx \right\}$$

mais

$$\begin{aligned} & \int_0^l (Z + Xy)^2 dy + \int_l^{2l} (Z + Xy - Pl)^2 dy \\ &= \int_0^{2l} (Z + Xy)^2 dy + \int_l^{2l} [-2Pl(Z + Xy) + P^2 l^2] dy \\ &= 2lZ^2 + 4l^2 ZX + \frac{8}{3} X^2 l^3 - 2Pl^2 Z - 3Pl^2 X + P^2 l^3 \end{aligned}$$

et finalement, en reportant dans (36), on obtient

$$(37) \quad W = \frac{l}{2ES} [Y^2 + (Y-P)^2] + \frac{l}{2GS_s} [2X^2 + P^2] + \frac{l}{2EJ} [2Z^2 + 4lZX + \frac{8}{3} l^2 X^2 - 2lPZ - 3l^2 PX + \frac{4}{3} l^2 P^2]$$

Le théorème de Menabrea donne alors

$$(38) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial Y} = 0 & \Rightarrow 2Y + 2(Y-P) = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 & \Rightarrow 4Z + 4lX - 2Pl = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial X} = 0 & \Rightarrow 4Z + \frac{16}{3} lX - 3Pl + 4 \frac{EJ}{GS_s l} X = 0 \end{cases}$$

En introduisant le coefficient sans dimension

$$(39) \quad \alpha = \frac{EJ}{GS_s l^2} = O\left(\frac{d^2}{l^2}\right)$$

on obtient facilement

$$(40) \quad 2Y = P$$

$$(41) \quad \begin{cases} 2Z + 2lX = Pl \\ 4Z + 4\left(\frac{4}{3} + \alpha\right)lX = 3Pl \end{cases}$$

qui donne la solution

$$(42) \quad Y = \frac{P}{2}, \quad X = \frac{3P}{4} \frac{1}{1+3\alpha}, \quad Z = -\frac{Pl}{4} \frac{1-6\alpha}{1+3\alpha}$$

Le paramètre α est d'ordre d^2/l^2 et en première approximation on retrouve bien (33), et les formules (42) donnent les corrections d'effort tranchant.

Si on néglige l'effort tranchant et l'effort normal, alors seul subsiste dans (37) le terme dû au moment fléchissant; on obtient alors par application du théorème de Menabrea le système

$$(43) \quad \begin{cases} 2Z + 2lX = Pl \\ 4Z + \frac{16}{3} lX = 3Pl \end{cases}$$

càd le système (41) avec $\alpha = 0$, tandis que W ne dépend pas de Y . On ne peut donc pas lever l'hyperstaticité en Y , ce qui n'a d'ailleurs pas une énorme importance, puisque Y n'intervient pas dans le moment de flexion. On voit donc que pour obtenir (33) il faut négliger l'effort tranchant mais non l'effort normal. On obtient alors le système (40), (43) qui donne (33). Il s'agit cependant ici d'une situation relativement exceptionnelle, et en général on pourra négliger, pour lever l'hyperstaticité, l'effort tranchant et l'effort normal: les structures planes sont habituellement calculées à la flexion pure.

Pour calculer la flèche au point D, on utilise le théorème de Castigliano qui donne à partir de (37)

$$(44) \quad \delta = -v_D = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{l}{ES} (P-Y) + \frac{Pl}{GS_2} + \frac{l^2}{2EJ} \left[\frac{8Pl}{3} - 3lX - 2Z \right]$$

soit, compte-tenu de (42),

$$(45) \quad \delta = \underbrace{\frac{11 Pl^3}{24 EJ}}_{\substack{\uparrow \\ \text{flexion}}} \frac{1 + \frac{60}{11} \alpha}{1 + 3\alpha} + \frac{Pl}{2ES_2} + \frac{Pl}{GS_2} = \frac{11 Pl^3}{24 EJ} \left[1 + O\left(\frac{d^2}{l^2}\right) \right]$$

\uparrow
effort normal
 \uparrow
effort tranchant

2.3 COMPATIBILITE DES DEFORMATIONS

Comme pour les poutres droites, on peut également lever l'hyperstaticité en écrivant la compatibilité des déformations. En effet, si une structure fait intervenir L inconnues de liaison et est donc hyperstatique de degré $L-3$, alors il faut intégrer (XVI.45), (XVI.47) système différentiel d'ordre 3 avec L conditions aux limites pour 3 constantes d'intégration. Il restera donc $L-3$ équations de compatibilité des déplacements qui permettront de déterminer les $L-3$ inconnues hyperstatiques. Nous allons, sur notre exemple, appliquer cette méthode, en nous limitant à un calcul à la flexion pure. Les conditions aux limites sont donc

$$(46) \quad u_A = 0, \quad v_A = 0, \quad \omega_A = 0, \quad u_C = 0, \quad v_C = 0, \quad \omega_C = 0$$

Sur AB: $\theta = \pi/2$, $s = y$, on aura donc d'après (32)

$$(47) \quad \begin{cases} \omega' = -\frac{m}{EJ} = -\frac{1}{EJ} (Z + X y) & \Rightarrow \omega = -\frac{1}{EJ} \left(Z y + X \frac{y^2}{2} \right) + \phi_A \\ u' = -\omega = \frac{1}{EJ} \left(Z y + X \frac{y^2}{2} \right) & \Rightarrow u = \frac{1}{EJ} \left(Z \frac{y^2}{2} + X \frac{y^3}{6} \right) + \mu_1 \\ v' = 0 & \Rightarrow v = v_A = 0 \end{cases}$$

On en tire au point B

$$(48) \quad \omega_B = -\frac{1}{EJ} \left(Zl + X \frac{l^2}{2} \right) \quad u_B = \frac{1}{EJ} \left(Z \frac{l^2}{2} + X \frac{l^3}{6} \right) \quad v_B = 0$$

Sur BC: $\theta = \pi/2$, $s = \eta y$

$$\omega' = -\frac{\eta}{EJ} = -\frac{1}{EJ} (Z + X \eta y - Pl)$$

$$\Rightarrow \omega = -\frac{1}{EJ} \left(Z \eta y + X \frac{\eta^2 y^2}{2} - Pl \eta y \right) + Cte$$

La constante est déterminée en écrivant la continuité en B

$$(49) \quad \omega = -\frac{1}{EJ} \left[Z \eta y + X \frac{\eta^2 y^2}{2} - Pl (\eta y - l) \right]$$

$$u' = -\omega = \frac{1}{EJ} \left[Z \eta y + X \frac{\eta^2 y^2}{2} - Pl (\eta y - l) \right]$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{EJ} \left[Z \frac{\eta^2 y^2}{2} + X \frac{\eta^3 y^3}{6} - Pl \left(\frac{\eta^2 y^2}{2} - l \eta y \right) \right] + Cte$$

$$(50) \quad u = \frac{1}{EJ} \left[Z \frac{\eta^2 y^2}{2} + X \frac{\eta^3 y^3}{6} - Pl \frac{(\eta y - l)^2}{2} \right]$$

$$(51) \quad v' = 0 \quad \Rightarrow \quad v = v_B = 0$$

On en tire au point C

$$(52) \quad \begin{cases} \omega_c = -\frac{1}{EJ} [2Zl + 2Xl^2 - Pl^2] \\ u_c = \frac{1}{EJ} [2Zl^2 + 4X \frac{l^3}{3} - Pl^3] \\ v_c = 0 \end{cases}$$

Les conditions aux limites (46) donnent alors le système

$$(54) \quad \begin{cases} 2Z + 2Xl = Pl \\ 4Z + \frac{8}{3}Xl = Pl \end{cases}$$

et on obtient les valeurs (33) de X et Z . Comme précédemment, la flexion seule ne permet pas de déterminer Y qui ne peut s'obtenir qu'en tenant également compte de l'effort normal, ce qui ne change rien aux équations (47) à (52) pour u et ω , mais transforme celle pour v en

Sur AB

$$(55) \quad v' = -\frac{N}{ES} = -\frac{Y}{ES} \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{Y}{ES} \eta y + v_A$$

Sur BC

$$(56) \quad v' = -\frac{N}{ES} = \frac{P-Y}{ES} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{P-Y}{ES} + Cte = \frac{P(\eta y - l)}{ES} - \frac{Y \eta y}{ES}$$

La condition $v_c = 0$ donne alors

$$(57) \quad \frac{Pl}{ES} - \frac{2\gamma l}{ES} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{P}{2}$$

Il reste à calculer la déformée de BD. En revenant au cas de la flexion seule, on obtient avec (33)

$$(58) \quad \begin{aligned} \omega' &= -\frac{m}{EJ} = \frac{P(x-l)}{EJ} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{P}{EJ} \left(\frac{x^2}{2} - lx \right) + \omega_B \\ \omega &= \frac{P}{EJ} \left(\frac{x^2}{2} - lx \right) - \frac{1}{EJ} \left(Zl + X \frac{l^2}{2} \right) = \frac{P}{EJ} \left(\frac{x^2}{2} - lx - \frac{l^2}{8} \right) \\ \omega' &= \omega = \frac{P}{EJ} \left(\frac{x^2}{2} - lx - \frac{l^2}{8} \right) \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{P}{EJ} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2} - \frac{l^2x}{8} \right) + \frac{\gamma}{6} \\ \omega' &= 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \mu_B = \frac{1}{EJ} \left(Z \frac{\gamma^2}{2} + X \frac{\gamma^3}{6} \right) = 0 \end{aligned}$$

Soit finalement au point D

$$(59) \quad \mu_D = 0, \quad \omega_D = -\frac{5Pl^2}{8EJ}, \quad \sigma_D = -\frac{11Pl^3}{24EJ}$$

en accord avec (45).

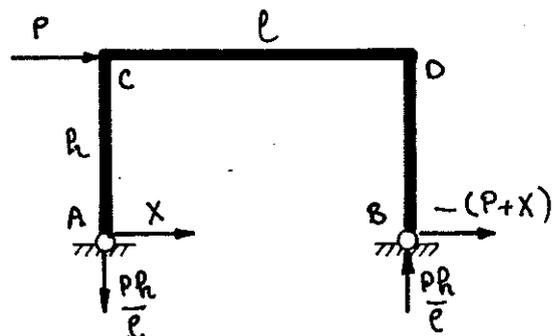
3. EXEMPLES DE STRUCTURES HYPERSTATIQUES

Pour lever l'hyperstaticité d'une structure plane, le principe des trois méthodes présentées pour les poutres droites subsiste. Cependant, d'un point de vue pratique, la méthode énergétique s'impose très nettement. En effet, on a pu apprécier aux § 2.3 et 1.2 la lourdeur des calculs de déplacements. D'autre part, la méthode de superposition perd beaucoup de son intérêt en l'absence d'un catalogue de solutions isostatiques. Son seul avantage est alors de permettre de scinder un problème complexe en plusieurs problèmes simples, chacun étant lui-même résolu par la méthode énergétique. Un autre avantage - et non des moindres - des méthodes énergétiques est le fait qu'elles n'exigent le calcul du moment fléchissant qu'au signe près, ce qui, pour des structures complexes, élimine une importante source d'erreurs.

3.1 PORTIQUE HYPERSTATIQUE

Nous considérons comme premier exemple le portique hyperstatique, exemple 2 des § XII.3.2 et XIII.2.2.

Le système est hyperstatique de



degré 1, et on prend comme inconnue hyperstatique $X = X_A$.

$$(60) \quad X_A = X, \quad X_B = -(P+X), \quad Y_A = -\frac{Ph}{l}, \quad Y_B = +\frac{Ph}{l}$$

Nous négligeons l'effet de l'effort tranchant et de l'effort normal. D'après (XIII.44,45 et 46) l'énergie de déformation est donnée par

$$(61) \quad W = \frac{1}{2EJ} \left\{ \int_0^h X^2 y^2 dy + \int_0^l (Xh + \frac{Ph}{l}x)^2 dx + \int_0^h (P+X)^2 y^2 dy \right\}$$

$$= \frac{1}{2EJ} \left[X^2 \frac{h^3}{3} + X^2 h^2 l + XP h^2 l + P^2 \frac{h^2 l}{3} + (P+X)^2 \frac{h^3}{3} \right]$$

$$= \frac{h^2}{6EJ} \left[(2h+3l)X^2 + (2h+3l)XP + (l+h)P^2 \right]$$

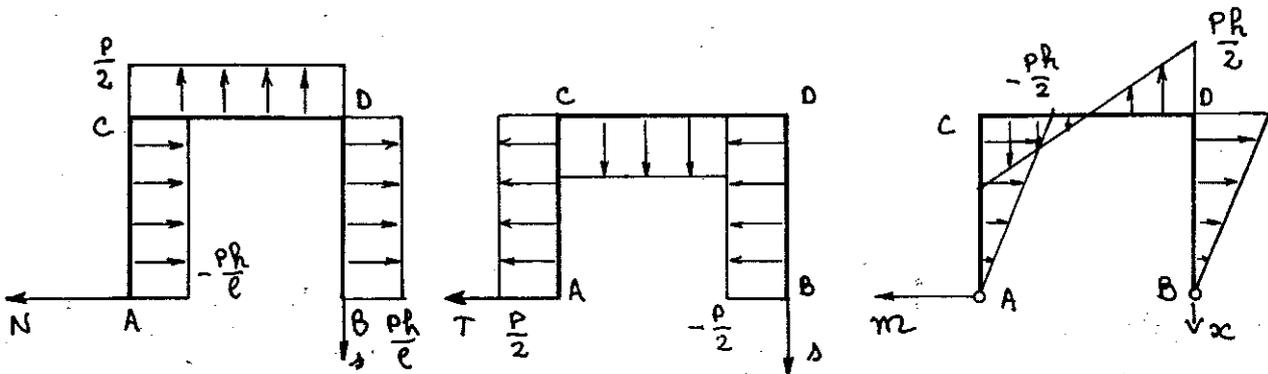
Le théorème de Menabrea donne

$$(62) \quad \frac{\partial W}{\partial X} = \frac{h^2(2h+3l)}{6EJ} (2X+P) = 0 \quad \Rightarrow \quad X = -\frac{P}{2}$$

On en tire les inconnues de liaison

$$(63) \quad X_A = X_B = -\frac{P}{2}, \quad -Y_A = Y_B = \frac{Ph}{l}$$

et on peut tracer les diagrammes d'effort normal, d'effort tranchant et de moment fléchissant



Les sections les plus sollicitées sont les sections C et D sur les montants AC, BD si $2h \geq l$ et sur la traverse CD si $2h < l$. La condition de dimensionnement découle directement de (XVI.31)

$$(64) \quad \frac{Ph}{J/\eta} + \max\left(\frac{P}{2S}, \frac{Ph}{Sl}\right) \leq \sigma_e$$

La flèche en C est donnée directement par le théorème de Castigliano

$$(65) \quad \delta = v_c = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{h^2}{6EJ} [2P(l+h) + X(2h+3l)]$$

$$\delta = \frac{Ph^2(l+2h)}{12EJ}$$

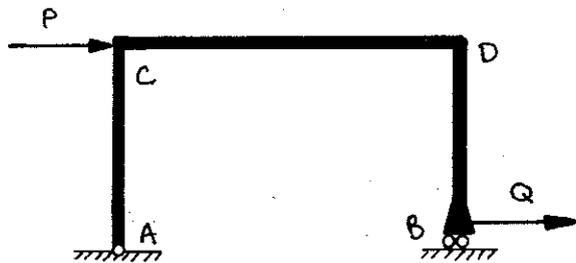
Pour appliquer la méthode de compatibilité des déformations, il faut reprandre les calculs de déplacements du § 1.2 en rajoutant dans l'expression de \mathcal{M} le terme provenant de l'inconnue hyperstatique X qui sera déterminée avec la constante d'intégration ω_A en écrivant que

$$(66) \quad u_B = v_B = 0$$

Pour appliquer la méthode de superposition, on peut remplacer l'articulation B par un appui simple. On retrouve alors la structure du § 1.2 avec une force horizontale Q en B, qui sera déterminée en annulant le déplacement horizontal u_B .

Mais la méthode la plus rapide pour calculer u_B est d'appliquer le théorème de Castigliano et d'écrire

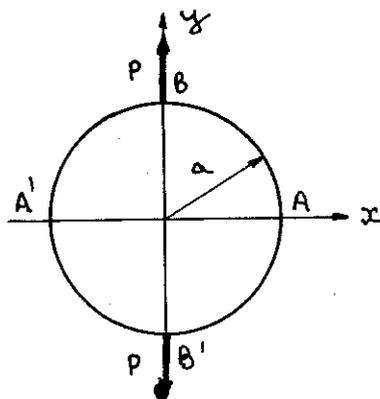
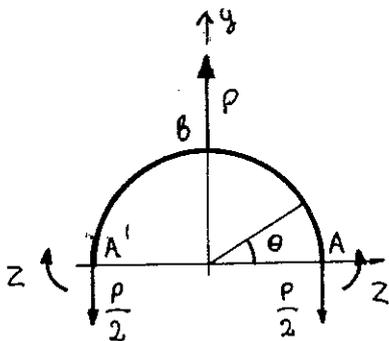
$$(67) \quad u_B = \frac{\partial W}{\partial Q} = 0$$



ce qui est exactement le théorème de Menabrea. Pour pouvoir lever l'hyperstaticité sans calcul, comme au § XVIII.2.4, il faudrait disposer d'un catalogue de solutions isostatiques.

3.2 ANNEAU HYPERSTATIQUE

Considérons l'anneau hyperstatique (exemple 2 du § XIII.2.3). Compte-tenu des symétries, c'est un système hyperstatique interne de degré 1



On choisit comme inconnue hyperstatique le moment Z en A ($\theta = 0$). Les efforts intérieurs sont alors donnés par (XIII.54).

Pour déterminer Z on va appliquer le théorème de Menabrea. L'énergie de déformation est alors donnée par

$$(68) \quad W = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{EJ} \left[Z - \frac{aP}{2} (1 - \cos \theta) \right]^2 + \frac{P^2}{4ES} \cos^2 \theta + \frac{P^2}{4GS_2} \sin^2 \theta \right\} d\theta$$

(en remarquant que $ds = a d\theta$ et que l'énergie totale de l'anneau est égale à quatre fois celle d'un quart d'anneau AB, $0 \leq \theta \leq \pi/2$). Le théorème de Menabrea donne alors, en dérivant sous le signe intégral,

$$(69) \quad \frac{\partial W}{\partial Z} = \frac{4a}{EJ} \int_0^{\pi/2} \left[Z - \frac{aP}{2}(1 - \cos\theta) \right] d\theta = 0$$

$$\frac{\pi Z}{2} = \frac{aP}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \left[\sin\theta \right]_0^{\pi/2} \right) = \frac{aP}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

ce qui donne

$$(70) \quad Z = \frac{aP}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right)$$

Le moment fléchissant est alors donné par

$$(71) \quad \eta = \frac{aP}{2} \left(\cos\theta - \frac{2}{\pi} \right)$$

Ainsi, on aura au point A

$$(72) \quad \eta_A = \frac{aP}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) = 0,364 \frac{aP}{2}, \quad N_A = -\frac{P}{2}, \quad T_A = 0$$

$$(73) \quad \eta_B = \frac{aP}{2} \frac{2}{\pi} = 0,636 \frac{aP}{2}, \quad N_B = 0, \quad T_B = +\frac{P}{2}$$

La section la plus sollicitée peut être A ou B. En effet, la condition de dimensionnement pour ces deux sections s'écrit

$$(74) \quad \begin{cases} \sigma_{max}^A = \frac{aP}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \frac{\eta}{J} + \frac{P}{2S} \leq \sigma_e \\ \sigma_{max}^B = \frac{aP}{2} \frac{2}{\pi} \frac{\eta}{J} \leq \sigma_e \end{cases}$$

Considérons par exemple une section circulaire de diamètre d . Les conditions (74) deviennent

$$(75) \quad \begin{cases} \sigma_{max}^A = \frac{16}{\pi} \frac{aP}{d^3} \left[\left(1 - \frac{2}{\pi} \right) + \frac{d}{8a} \right] \leq \sigma_e \\ \sigma_{max}^B = \frac{16}{\pi} \frac{aP}{d^3} \frac{2}{\pi} \leq \sigma_e \end{cases}$$

et on vérifie que la section la plus sollicitée est B tant que

$$\frac{2}{\pi} \geq \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) + \frac{d}{8a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{a} \leq 8 \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) = 2,19$$

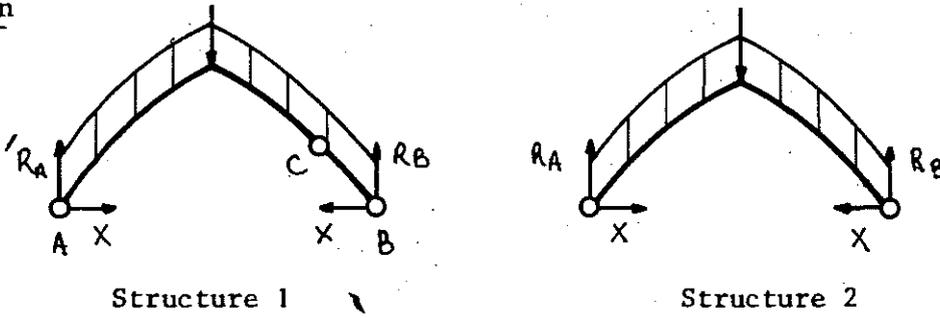
ce qui est toujours le cas. On vérifie une fois de plus que la correction d'effort normal est petite et que la section la plus sollicitée est la section de moment fléchissant maximal. Pour calculer l'allongement du diamètre auquel est appliquée la force, on applique le théorème de Castigliano et, tous calculs faits, on trouve

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{Pa^3}{EJ} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) + \frac{Pa}{ES} \frac{\pi}{4} + \frac{Pa}{GS_2} \frac{\pi}{4}$$

↑
↑
↑
flexion
effort normal
effort tranchant

3.3 RIGIDIFICATION D'ARTICULATIONS

A deux reprises (treillis au Chapitre XVII, arc funiculaire au § 1.3) nous avons rencontré des structures articulées travaillant uniquement en traction-compression. Or la réalisation technologique de ces articulations est difficile; il est donc tentant de les supprimer et de les remplacer par des liaisons rigides - ce que l'on fait pratiquement pour la plupart des treillis industriels. Nous allons étudier les conséquences de cette rigidification d'articulation. Considérons par exemple l'arc funiculaire à trois articulations du § 1.3 et l'arc identique sans articulation



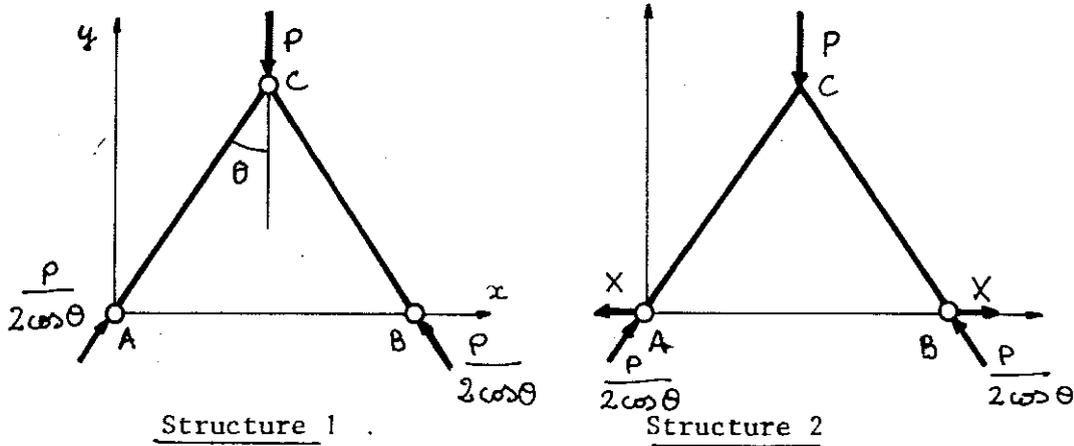
La structure 1 est isostatique et on sait calculer R_A , R_B et Q (§ 1.3). La structure 2 est hyperstatique de degré 1 et on peut prendre comme inconnue hyperstatique la réaction horizontale $X_A = X$ (il est clair que les réactions verticales R_A et R_B sont les mêmes pour les deux structures). Pour déterminer X il faut minimiser l'énergie de déformation, c'est à dire si on se limite à un calcul en flexion pure,

$$(76) \quad W = \int_A^B \frac{1}{2EJ} m^2(x) dx$$

Mais il résulte du § 1.3 que pour $X = Q$, le moment fléchissant s'annule dans toute la structure puisqu'on retrouve alors la répartition d'efforts intérieurs pour la structure 1. L'énergie de déformation s'annule donc, d'après (76), c'est donc là le minimum. On obtient donc pour la structure 2, $X = Q$ et la suppression de l'articulation n'a rien changé. Il en va de même pour un treillis.

Le raisonnement précédent n'est évidemment pas satisfaisant, car il est basé sur (76), donc sur un calcul à la flexion, ce qui est évidemment illégitime puisque cette hypothèse conduit à un moment de flexion nul. Il faudrait tenir compte de l'effort normal et de l'effort tranchant.

Nous allons faire le calcul sur le cas particulier simple suivant (qui est à la fois un treillis à deux barres et un arc funiculaire à trois articulations)



Le calcul de la structure 1 donne directement

$$(77) \quad \begin{aligned} X_A = -X_B = \frac{P}{2} \operatorname{tg} \theta, \quad Y_A = Y_B = \frac{P}{2} \\ W = \frac{P^2 l}{4ES \cos^2 \theta}, \quad \delta = -\nu_c = \frac{Pl}{2ES \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

Pour la structure 2, nous introduisons l'inconnue hyperstatique X définie par

$$(78) \quad X_A = -X_B = \frac{P}{2} \operatorname{tg} \theta - X, \quad Y_A = Y_B = \frac{P}{2}$$

Les efforts intérieurs dans AB sont alors donnés par

$$(79) \quad N = \frac{P}{2 \cos \theta} - X \sin \theta, \quad T = X \cos \theta, \quad M = X y = X s \cos \theta$$

L'énergie de déformation est donc

$$(80) \quad \begin{aligned} W &= \int_0^l \left\{ \frac{1}{ES} \left(\frac{P}{2 \cos \theta} - X \sin \theta \right)^2 + \frac{1}{GS_2} X^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{EJ} X^2 s^2 \cos^2 \theta \right\} ds \\ &= \frac{l}{ES} \left(\frac{P}{2 \cos \theta} - X \sin \theta \right)^2 + \frac{l}{GS_2} X^2 \cos^2 \theta + \frac{l^3}{EJ} X^2 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

et le théorème de Menabrea donne

$$(81) \quad \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial X} &= \frac{l}{ES} (2X \sin^2 \theta - P \operatorname{tg} \theta) + 2l \left(\frac{1}{GS_2} + \frac{l^2}{EJ} \right) X \cos^2 \theta = 0 \\ X &= \frac{Pl \operatorname{tg} \theta}{2ES} \left\{ \frac{l \sin^2 \theta}{ES} + \left(\frac{l}{GS_2} + \frac{l^3}{EJ} \right) \cos^2 \theta \right\}^{-1} \end{aligned}$$

Le terme entre accolades peut encore s'écrire

$$(82) \quad \frac{l^3 \cos^2 \theta}{EJ} \left(1 + \frac{EJ}{GS_2 l^3} + \frac{J}{Sl^2} \operatorname{tg}^2 \theta \right) = \frac{l^3 \cos^2 \theta}{EJ} \left[1 + O\left(\frac{d^2}{l^2}\right) \right]$$

