

Chapitre XVIII

POUTRES DROITES

1. POUTRES ISOSTATIQUES.

1.1 POUTRE CONSOLE

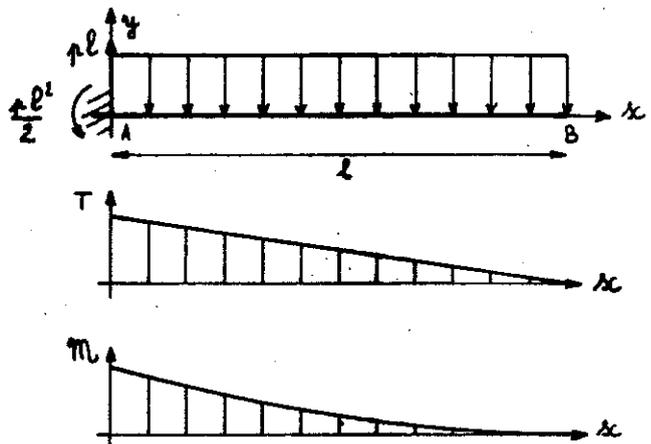
Dans les poutres droites, comme nous l'avons vu aux § XII.3.1 et XIII.2.1, les efforts extérieurs et intérieurs ne font intervenir que deux composantes (composantes de la résultante sur la verticale Oy et du moment sur Oz). Pour une poutre isostatique on connaît les efforts intérieurs, et il ne reste plus qu'à dimensionner et à calculer les déplacements.

Considérons par exemple une poutre console (encastrée-libre) soumise à une charge répartie uniforme de densité p . On obtient directement les inconnues de liaison

$$(1) \quad R_A = pl \quad , \quad M_A = \frac{pl^2}{2}$$

et les efforts intérieurs (effort tranchant et moment fléchissant)

$$(2) \quad T(x) = p(l-x) \quad , \quad m(x) = \frac{p(l-x)^2}{2}$$



Comme nous l'avons montré au § XIV.1.3, on peut négliger la contrainte de cisaillement dans la condition de dimensionnement qui s'écrit donc

$$(3) \quad \sigma_{11 \text{ max}} = \frac{m_f}{J/\eta} \leq \sigma_e$$

soit, dans l'exemple qui nous intéresse,

$$(4) \quad \frac{J}{\eta} \geq \frac{m_f}{\sigma_e} = \frac{p(l-x)^2}{2\sigma_e}$$

Cette condition permet donc de choisir la section droite. Par exemple, pour une section rectangulaire, cette condition donne

$$(5) \quad \frac{b h^2}{6} \geq \frac{p (l-x)^2}{2 \sigma_e}$$

qui permet de choisir h et b . Le plus souvent, on construira une poutre à section constante, càd que l'on choisira b et h de telle sorte que

$$(6) \quad \frac{b h^2}{2} \geq \frac{M_{f \max}}{\sigma_e} = \frac{p l^2}{2 \sigma_e}$$

la section la plus sollicitée étant à l'encastrement. Mais à partir de (5), on peut aussi construire une "poutre d'égale résistance", càd une poutre à section variable telle que la contraintemaximale dans chaque section soit la même tout au long de la poutre, ce qui permet dans certains cas un gain de matière appréciable. On se fixe par exemple b et il suffit de prendre

$$(7) \quad h = A \sqrt{\frac{3p}{b \sigma_e}} (l-x)$$

où A est un coefficient de sécurité. Ceci correspond donc à une poutre de profil triangulaire.

Pour le calcul des déplacements, on utilise la loi de comportement qui pour les poutres droites s'écrit sous la forme (XVI.50) obtenue au § XVI. 1.5. Le déplacement ne fait intervenir que deux composantes, le déplacement vertical v et la rotation ω . La loi de comportement (XVI.50) donne alors

$$(8) \quad \omega' = - \frac{m}{EJ} = - \frac{p}{EJ} \left(\frac{x^2}{2} - lx + \frac{l^2}{2} \right)$$

$$(9) \quad v' = \omega - \frac{T}{GS_2} = \omega + \frac{p}{GS_2} (x-l)$$

On intègre alors (8) et on obtient pour la poutre à section constante (sinon J dépend de x et c'est plus compliqué)

$$(10) \quad \omega = - \frac{p}{6EJ} (x^3 - 3lx^2 + 3l^2x) + \phi_A$$

la constante d'intégration ω_A étant nulle d'après l'encastrement en A. On intègre ensuite (9)

$$(11) \quad v = - \frac{p}{24 EJ} (x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2) + \frac{p}{2GS_2} (x^2 - 2lx) + \phi_A$$

la constante d'intégration v_A étant nulle d'après l'encastrement. En particulier, la flèche en B est donnée par

$$v(l) = v_B = - \frac{p l^4}{8EJ} - \frac{p l^2}{2GS_2}$$

$$(12) \quad v_b = - \frac{P l^4}{8 E J} \left[1 + \frac{4 E J}{G S_2 l^2} \right]$$

↑ flexion ↑ effort tranchant: $O\left(\frac{d^2}{l^2}\right)$

On constate que l'effet de l'effort tranchant est en $O(d^2/l^2)$ par rapport à l'effet du moment fléchissant, et qu'il est donc tout-à-fait légitime de le négliger. C'est ce que nous ferons désormais et, sauf mention explicite du contraire, nous calculerons les poutres droites en flexion pure, ce qui revient dans tous les calculs précédents à faire $1/GS_2 = 0$. En particulier, les équations (8) et (9) sont remplacées par (XVI.52)

$$(13) \quad E J v'' = - M$$

avec pour l'encastrement les conditions

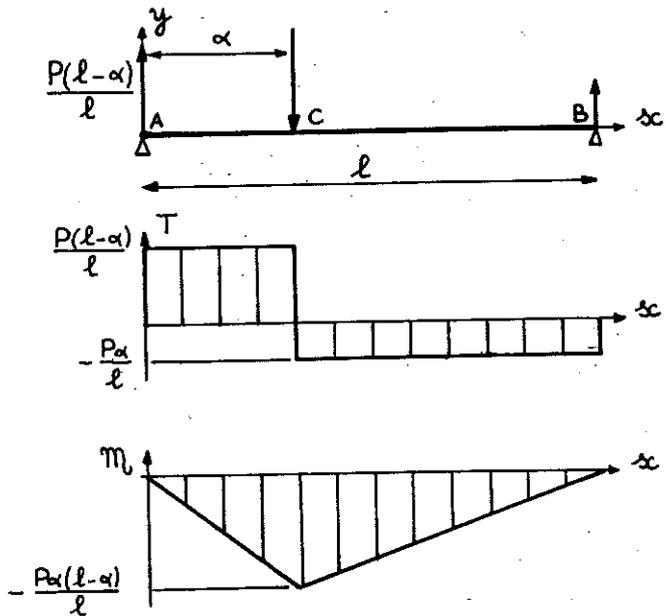
$$(14) \quad \underline{v_A = 0} \quad v'_A = \omega_A = 0$$

1.2 POUTRE SUR DEUX APPUIS

Considérons maintenant l'exemple 1 des § XII.3.1 et XIII 2.1 : poutre sur deux appuis soumise à une charge concentrée.

On a obtenu

$$(15) \quad R_A = \frac{P(l-\alpha)}{l}, \quad R_B = \frac{P\alpha}{l}$$



$$(16) \quad \underline{0 \leq x \leq \alpha} \quad T(x) = \frac{P(l-\alpha)}{l}$$

$$(17) \quad M(x) = - \frac{P(l-\alpha)}{l} x$$

$$\underline{\alpha \leq x \leq l} \quad T(x) = - \frac{P\alpha}{l}$$

$$M(x) = - \frac{P\alpha}{l} (l-x)$$

La section la plus sollicitée est la section C où est appliquée la force P et la condition de dimensionnement (3) donne alors directement

$$(18) \quad \frac{J}{\eta} \geq \frac{M_{f \max}}{\sigma_e} = \frac{P\alpha(l-\alpha)}{l \sigma_e}$$

ce qui permet de dimensionner une poutre à section constante (bien évidemment, on pourrait construire une poutre d'égale résistance, comme au § 1.1)

Pour calculer les déplacements, il reste à intégrer (13) avec les conditions aux limites correspondant aux conditions d'appuis en A et B

$$(19) \quad \begin{array}{l} v_A = v(0) = 0 \\ 0 \leq x \leq \alpha \\ EJ v'' = \frac{P(l-\alpha)}{l} x \\ EJ v' = \frac{P(l-\alpha)}{l} \frac{x^2}{2} + A \\ EJ v = \frac{P(l-\alpha)}{l} \frac{x^3}{6} + Ax + EJ \phi_A \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} v_B = v(l) = 0 \\ \alpha \leq x \leq l \\ EJ v'' = -\frac{P\alpha}{l} (x-l) \\ EJ v' = -\frac{P\alpha}{l} \frac{(x-l)^2}{2} + B \\ EJ v = -\frac{P\alpha}{l} \frac{(x-l)^3}{6} + B(x-l) + EJ \phi_B \end{array} \right.$$

avec deux constantes d'intégration A et B que l'on va déterminer en racordant les deux solutions, c'ad en écrivant la continuité de v et de $\omega = v'$ en C pour $x = \alpha$

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{P(l-\alpha)}{l} \frac{\alpha^2}{2} + A = -\frac{P\alpha}{l} \frac{(\alpha-l)^2}{2} + B \\ \frac{P(l-\alpha)}{l} \frac{\alpha^3}{6} + A\alpha = -\frac{P\alpha}{l} \frac{(\alpha-l)^3}{6} + B(\alpha-l) \end{array} \right.$$

On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnues qui permet de calculer A et B

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = -\frac{P\alpha(l-\alpha)(2l-\alpha)}{6l} = EJ \omega'_A \\ B = \frac{P\alpha(l-\alpha)(l+\alpha)}{6l} = EJ \omega'_B \end{array} \right.$$

On en tire l'équation de la déformée

$$(23) \quad v = \left\{ \begin{array}{l} \frac{P(l-\alpha)}{6EJl} [x^3 - \alpha(2l-\alpha)x] \quad 0 \leq x \leq \alpha \\ \frac{P\alpha}{6EJl} [(l-x)^3 - (l-\alpha)(l+\alpha)(l-x)] \quad \alpha \leq x \leq l \end{array} \right.$$

En particulier, la flèche au point C d'application de la force est donnée par $x = \alpha$

$$(24) \quad \delta = -v_C = \frac{P\alpha^3(l-\alpha)^2}{3EJl}$$

En particulier, si la force est appliquée au milieu de la poutre, $\alpha = l/2$, il vient

$$(25) \quad \delta = -v_C = \frac{Pl^3}{48EJ}$$

1.3 CATALOGUE DE POUTRES ISOSTATIQUES

Nous allons terminer en donnant les résultats relatifs à un certain nombre de poutres isostatiques classiques. Ces résultats nous serviront plus loin, au § 2.3. Le lecteur pourra en guise d'exercice refaire le détail des calculs.

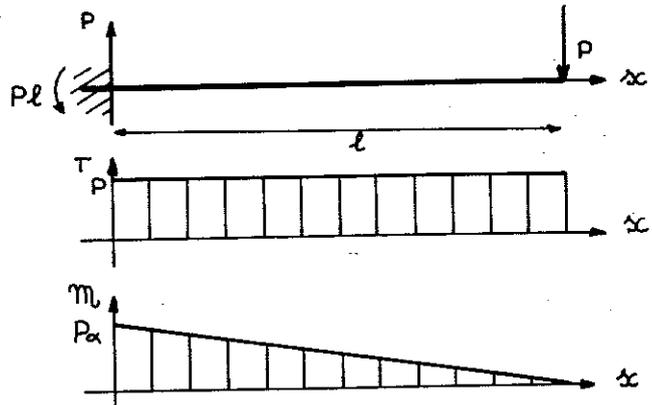
a) Poutre console soumise à une force concentrée.

Les équations de la statique donnent directement :

$$(26) \quad R_A = P, \quad M_A = Pl$$

$$(27) \quad T = P, \quad m = P(l-x)$$

La section la plus sollicitée est encore l'encastrement, et le moment fléchissant maximal vaut Pl , ce qui par (3) permet de dimensionner.



Pour calculer le déplacement, on intègre (13)

$$(28) \quad \begin{cases} EJv'' = -m = P(x-l) \\ EJv' = P\left(\frac{x^2}{2} - lx\right) + EJ\theta'_A \\ EJv = P\left(\frac{x^3}{6} - l\frac{x^2}{2}\right) + EJ\theta'_A x \end{cases}$$

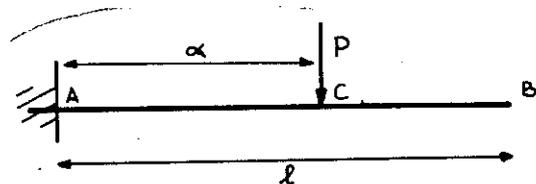
D'où l'expression de la flèche

$$(29) \quad v = \frac{P}{6EJ} (x^3 - 3lx^2) = \frac{Px^2(x-3l)}{6EJ}$$

En particulier, on a au point B

$$(30) \quad \delta = -v_B = \frac{Pl^3}{3EJ}$$

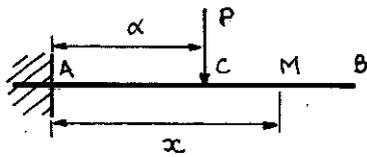
Si maintenant la force P n'est pas appliquée à l'extrémité B de la poutre mais à un point C intermédiaire, alors les résultats précédents restent valables entre A et C en remplaçant l par α pour $0 \leq x \leq \alpha$



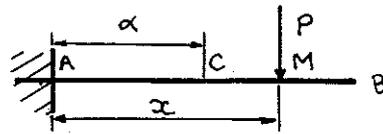
$$(31) \quad v = \frac{Px^2(x-3\alpha)}{6EJ}$$

Entre C et B, on peut procéder directement, mais il est plus simple d'appli-

quer le théorème de réciprocité du § XVI.2.4. Nous considérons les deux problèmes suivants



Problème 1



Problème 2

Le théorème de réciprocité du § XVI.2.4 donne alors

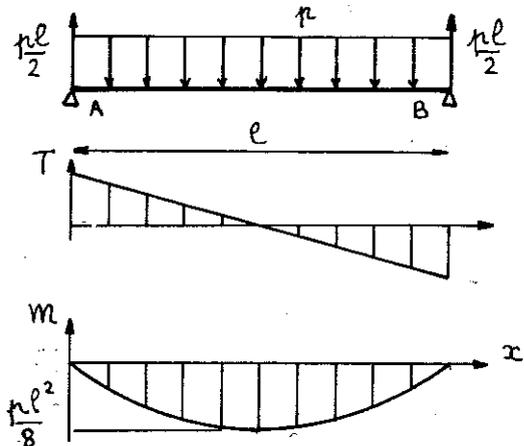
$$(32) \quad P v_M^1 = P v_C^2 \quad \text{ou} \quad v_M^1 = v_C^2$$

Ainsi, une force P appliquée en C provoque en M un déplacement égal à celui provoqué en C par une force P appliquée en M. Mais pour avoir ce dernier, il suffit d'appliquer la formule (31) en échangeant x et α . On obtient donc pour $\alpha \geq l$

$$(33) \quad v = - \frac{P \alpha^2 (3x - \alpha)}{6 E J}$$

b) Poutre sur deux appuis soumise à une charge répartie uniforme.

$$(34) \quad \begin{cases} T(x) = p \left(\frac{l}{2} - x \right) \\ M(x) = - \frac{p l x}{2} + \frac{p x^2}{2} \end{cases}$$



L'intégration de (13) donne

$$(35) \quad \begin{aligned} E J v'' &= - \frac{p x^2}{2} + \frac{p l x}{2} \\ E J v' &= - \frac{p x^3}{6} + \frac{p l x^2}{4} + E J v'_A \end{aligned}$$

$$E J v = - \frac{p x^4}{24} + \frac{p l x^3}{12} + E J v'_A x + E J v_A$$

On détermine la constante d'intégration en écrivant que $v_B = v(l) = 0$

$$(36) \quad E J v'_A = - \frac{p l^3}{24}$$

ce qui donne finalement

$$(37) \quad v = - \frac{p}{24 E J} (x^4 - 2 l x^3 + l^3 x)$$

La flèche au milieu de la poutre vaut

$$(38) \quad f = - v \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{5}{8} \frac{p l^4}{48 E J}$$

c) Poutre sur deux appuis soumise à un moment terminal

On obtient directement

$$EJ v'' = - q(x) = \frac{M}{l}(x-l) \quad M \left(\begin{array}{c} \uparrow M/l \\ \triangle A \end{array} \quad \begin{array}{c} \triangle B \\ \downarrow M/l \end{array} \right)$$

$$(39) \quad EJ v' = \frac{M}{l} \left(\frac{x^2}{2} - lx \right) + EJ v'_A$$

$$EJ v = \frac{M}{l} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2} \right) + EJ v'_A x + EJ v_A$$

et en écrivant que $v_B = v(l) = 0$, il vient

$$(40) \quad EJ v'_A = \frac{M l^2}{3}$$

$$(41) \quad v = \frac{M}{6EJl} (x^3 - 3lx^2 + 2lx)$$

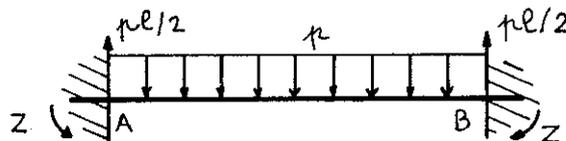
$$(42) \quad v'_B = v'(l) = - \frac{M l^2}{6EJ} \quad , \quad v'_A = \frac{M l^2}{3EJ}$$

2. POUTRES HYPERSTATIQUES

2.1 EXEMPLES - DIMENSIONNEMENT

Pour une poutre hyperstatique, on sait calculer les efforts intérieurs en fonction des inconnues hyperstatiques, mais il reste à déterminer ces dernières, c'est à lever l'hyperstaticité. Pour cela, il existe trois méthodes essentielles que nous allons appliquer sur deux exemples: l'exemple 2 des § XII.3.1 et XIII.2.1 (poutre encadrée-encadrée, charge répartie) et une poutre encadrée-appuyée soumise à une charge répartie. Nous nous limiterons aux poutres à section constante - en effet, il se produit ce que nous avons déjà constaté sur les treillis: pour dimensionner une structure hyperstatique, il faut lever l'hyperstaticité, mais pour lever l'hyperstaticité, il faut connaître $J(x)$ et donc avoir dimensionné. Pour une poutre hyperstatique, on ne peut donc pas construire simplement une poutre d'égale résistance.

Exemple 1



L'application des équations de la statique donne, comme on l'a vu aux § XII.3.1 et XIII.2.1

$$(43) \quad R_B = pl - R_A \quad M_B = -M_A + R_A l - \frac{pl^2}{2}$$

Le système est hyperstatique de degré 2, et nous prenons R_A et M_A comme inconnues hyperstatiques. Les efforts intérieurs ont été obtenus au § XIII.2.1

$$(44) \quad T = Y - px \quad , \quad q(x) = Z - Yx + \frac{px^2}{2}$$

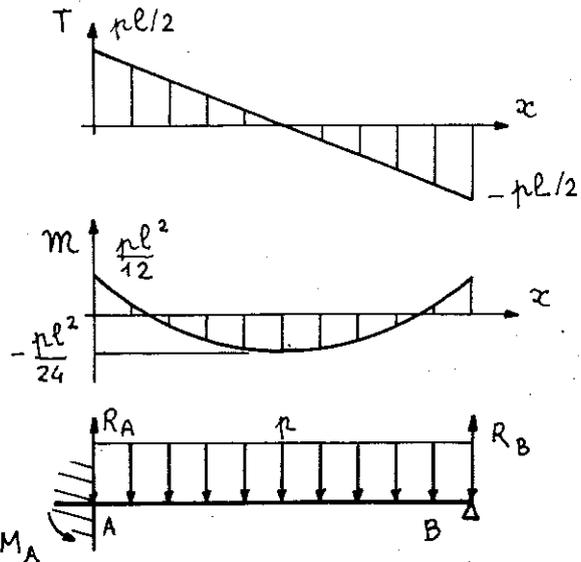
Reste à lever l'hyperstaticité. Pour ce faire, on peut utiliser trois méthodes qui feront l'objet des trois prochains paragraphes. On obtiendra alors pour cet exemple

$$(45) \quad Y = \frac{pl}{2} = R_A = R_B, \quad Z = \frac{pl^2}{12} = M_A = -M_B$$

On peut alors - et alors seulement - tracer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants.

On constate alors que le moment fléchissant maximum vaut $pl^2/12$ et est atteint aux encastresments. On peut alors dimensionner en utilisant la formule (3) qui donne

$$(46) \quad \frac{J}{\eta} \geq \frac{m_{fmax}}{\sigma_e} = \frac{pl^2}{12\sigma_e}$$



Exemple 2

Une poutre de longueur l encastrée en A et appuyée en B est soumise à une charge répartie uniforme. Le système est hyperstatique de degré 1, et en prenant R_B comme inconnue hyperstatique il vient

$$(47) \quad R_B = Y, \quad R_A = pl - Y, \quad M_A = -Yl + \frac{pl^2}{2}$$

Pour les efforts intérieurs, on obtient, en utilisant la méthode A du § XIII 1.3,

$$(48) \quad T = -R_B + p(l-x), \quad m = -R_B(l-x) + \frac{p(l-x)^2}{2}$$

ou en utilisant la méthode B

$$(49) \quad T = R_A - px, \quad m = M_A - R_A x + \frac{px^2}{2}$$

Suivant la méthode utilisée, il sera plus commode d'utiliser l'une ou l'autre de ces expressions. La levée de l'hyperstaticité nous donnera

$$(50) \quad Y = R_B = \frac{3pl}{8}, \quad R_A = \frac{5pl}{8}, \quad M_A = \frac{pl^2}{8}$$

ce qui permet de tracer les diagrammes des efforts tranchants et moments fléchissants.

Le moment fléchissant maximum peut a priori être atteint

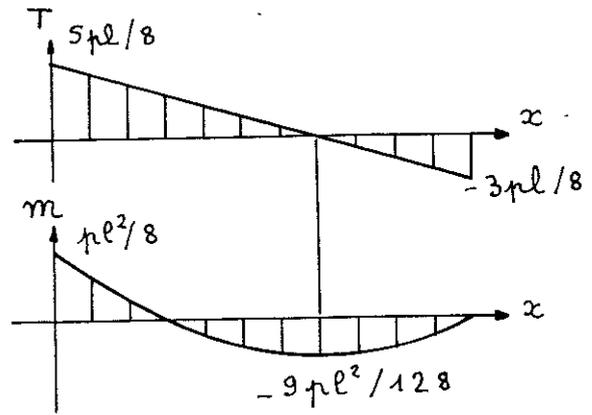
- à l'encastrement $x=0$, $m = \frac{pl^2}{8}$

- au point $x = 5l/8$ où s'annule l'effort tranchant et où, comme nous l'avons déjà vu au § XIII.

2.1, le moment fléchissant passe par un extremum.

En reportant (50) dans (48), on trouve pour

$$x = \frac{5l}{8}, \quad m = -\frac{9pl^2}{128}$$



Le moment fléchissant maximum est donc atteint à l'encastrement et vaut $pl^2/8$ ce qui permet le dimensionnement.

Il reste donc à lever l'hyperstaticité, c'est à obtenir (45) et (50). Comme annoncé plus haut, nous négligerons l'effet de l'effort tranchant. En toute rigueur, cela demanderait justification. Nous avons en effet montré que cette hypothèse était légitime

- pour le dimensionnement (§ XV.1.3)
- pour le calcul du déplacement (§ 1.1)

Il resterait à montrer qu'elle l'est aussi

- pour la levée de l'hyperstaticité.

Un calcul complet montrerait que tel est bien le cas (nous verrons d'ailleurs un calcul analogue au § XIX.2.2). Les trois méthodes que nous allons présenter restent d'ailleurs valables dans le cas général, mais les calculs deviennent tout de suite beaucoup plus lourds.

2.2 METHODES ENERGETIQUES

La première méthode pour lever l'hyperstaticité consiste à utiliser le théorème de Menabrea. En négligeant l'effet de l'effort tranchant ($1/GS_3=0$) l'énergie de déformation d'une poutre droite est donnée, d'après (XVI.36), par

$$(51) \quad W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{m^2}{EJ} dx$$

Exemple 1. On aura donc, à partir de (44)

$$(52) \quad \begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_0^l \left(\hat{z} - \hat{y}x + \frac{px^2}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \left(\hat{z}^2 + \hat{y}^2 x^2 - 2\hat{z}\hat{y}x + p\hat{z}x^2 - p\hat{y}x^3 + \frac{p^2 x^4}{4} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\hat{z}^2 l + \hat{y}^2 \frac{l^3}{3} - 2\hat{z}\hat{y}l^2 + p\hat{z} \frac{l^3}{3} - p\hat{y} \frac{l^4}{4} + \frac{p^2 l^5}{20} \right] \end{aligned}$$

Le théorème de Menabrea donne alors

$$(53) \quad \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial Z} &= Z l - Y \frac{l^2}{2} + \frac{p l^3}{6} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial Y} &= -Z \frac{l^2}{2} + Y \frac{l^3}{3} - \frac{p l^4}{8} = 0 \end{aligned}$$

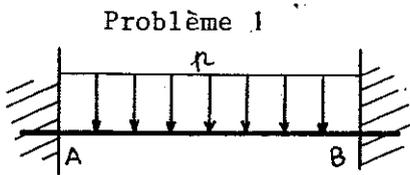
système de deux équations à deux inconnues qui s'écrit encore

$$(54) \quad \begin{cases} 6Z - 3Yl = -pl^2 \\ -12Z + 8Yl = 3pl^2 \end{cases}$$

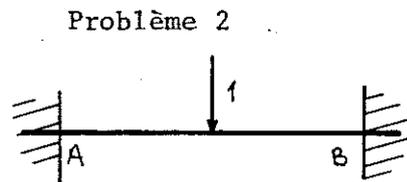
et qui donne bien (45)

$$(55) \quad Y = \frac{pl}{2}, \quad Z = \frac{pl^2}{12}$$

Pour calculer la flèche au milieu de la poutre, on peut appliquer le théorème de Castigliano en appliquant une force fictive au milieu de la poutre



$$m = \frac{pl^2}{12} - \frac{plx}{2} + \frac{px^2}{2}$$



$$\hat{m} = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ -\frac{1}{2}(l-x) & \text{pour } \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

(en prenant le CSA correspondant à une poutre sur deux appuis, $\hat{M}_A = \hat{M}_B = 0$)

On a alors, d'après la symétrie,

$$\begin{aligned} W(\mathcal{C}_1 + \lambda \hat{\mathcal{C}}_2) &= \frac{1}{2EJ} \int_0^l (m + \lambda \hat{m})^2 dx = \frac{1}{EJ} \int_0^{l/2} (m + \lambda \hat{m})^2 dx \\ &= \frac{1}{EJ} \int_0^{l/2} \left[\frac{pl^2}{12} - \frac{plx}{2} + \frac{px^2}{2} - \frac{\lambda}{2}x \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{EJ} \left\{ \lambda^2 \int_0^{l/2} \frac{x^2}{4} dx - \lambda \int_0^{l/2} \left(\frac{px^3}{2} - \frac{plx^2}{2} + \frac{pl^2x}{12} \right) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{l/2} \left(\frac{pl^2}{12} - \frac{plx}{2} + \frac{px^2}{2} \right)^2 dx \right\} \end{aligned}$$

Le théorème de Castigliano donne alors

$$(56) \quad \begin{aligned} f = -v\left(\frac{l}{2}\right) &= \frac{d}{d\lambda} W(\mathcal{C}_1 + \lambda \hat{\mathcal{C}}_2) \Big|_{\lambda=0} = -\frac{1}{EJ} \int_0^{l/2} \left(\frac{px^3}{2} - \frac{plx^2}{2} + \frac{pl^2x}{12} \right) dx \\ &\quad - \frac{1}{EJ} \left[\frac{px^4}{8} - \frac{plx^3}{6} + \frac{pl^2x^2}{24} \right]_0^{l/2} = \frac{pl^4}{384 EJ} \end{aligned}$$

Exemple 2. On obtient de la même manière, en utilisant la forme (48),

$$(57) \quad W = \frac{1}{2EJ} \int_0^l \left[-\gamma(l-x) + \frac{px(l-x)^2}{2} \right]^2 dx$$

en faisant le changement de variable $\xi = l-x$, on obtient facilement

$$(58) \quad EJW = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{px\xi^2}{2} - \gamma\xi \right)^2 d\xi = \frac{1}{2} \left[\gamma^2 \frac{l^3}{3} - p\gamma \frac{l^4}{4} + \frac{pl^5}{20} \right]$$

et le théorème de Menabrea donne

$$(59) \quad EJ \frac{\partial W}{\partial \gamma} = \gamma \frac{l^3}{3} - \frac{pl^4}{8} = 0, \quad \gamma = \frac{3pl}{8}$$

càd le résultat annoncé (50).

2.3 COMPATIBILITE DES DEFORMATIONS

Si on impose à une poutre droite L conditions de liaisons cinématiques, elle sera isostatique si $L = 2$, hyperstatique de degré L-2 si $L > 2$. On pourra donc calculer les efforts intérieurs en fonction de L-2 inconnues hyperstatiques. La déformée $v(x)$ s'obtiendra par intégration de l'équation différentielle du second ordre (13), ce qui introduira deux constantes d'intégration, alors que L conditions aux limites seront imposées. Il en résultera donc L-2 équations de compatibilité qui permettront de calculer les L-2 inconnues hyperstatiques. Revenons à nos deux exemples.

Exemple 1. Il faut intégrer (13) avec les conditions aux limites

$$(60) \quad v_A = 0, \quad v'_A = 0, \quad v_B = 0, \quad v'_B = 0$$

Compte-tenu de (44), l'équation (13) donne

$$(61) \quad \begin{aligned} EJv'' &= -\frac{px^2}{2} + \gamma x - Z \\ EJv' &= -\frac{px^3}{6} + \gamma \frac{x^2}{2} - Zx + EJv'_A \\ EJv &= -\frac{px^4}{24} + \gamma \frac{x^3}{6} - Z \frac{x^2}{2} + EJv_A \end{aligned}$$

et les deux conditions aux limites en B restantes nous donnent un système de deux équations à deux inconnues qui va nous permettre de calculer X et Y

$$(62) \quad \begin{cases} EJv'(l) = -\frac{pl^3}{6} + \gamma \frac{l^2}{2} - Zl = 0 \\ EJv(l) = -\frac{pl^4}{24} + \gamma \frac{l^3}{6} - Z \frac{l^2}{2} = 0 \end{cases}$$

$$(63) \quad \begin{cases} 6Z - 3\gamma l = -pl^2 \\ 12Z - 4\gamma l = -pl^2 \end{cases}$$

système qui redonne (45). L'équation de la déformée est alors

$$EJv = - \frac{px^4}{24} + \frac{plx^3}{12} - \frac{pl^2x^2}{24}$$

$$(64) \quad v = - \frac{p}{24 EJ} x^2 (l-x)^2$$

et pour $x = l/2$ on retrouve bien (56).

Exemple 2. Les conditions aux limites sont ici

$$(65) \quad v_A = 0, \quad v'_A = 0, \quad v_B = 0$$

Nous partons maintenant de (49), et par intégration de (13) nous obtenons

$$EJv'' = - \frac{px^2}{2} + R_A x - M_A$$

$$(66) \quad EJv' = - \frac{px^3}{6} + R_A \frac{x^2}{2} - M_A x + EJv'_A$$

$$EJv = - \frac{px^4}{24} + R_A \frac{x^3}{6} - M_A \frac{x^2}{2} + EJv_A$$

Il reste à écrire la condition aux limites en B

$$(67) \quad EJv(l) = - \frac{pl^4}{24} + R_A \frac{l^3}{6} - M_A \frac{l^2}{2} = 0$$

et en remplaçant M_A et R_A par leur expression (47) en fonction de l'in-
connue hyperstatique γ on trouve

$$12 \left(\gamma l - \frac{pl^2}{2} \right) + 4 (pl - \gamma) l - pl^2 = 0$$

$$(68) \quad 12\gamma - 6pl + 4pl - 4\gamma - pl = 0$$

équation qui redonne $\gamma = 3pl/8$, soit (50).

L'équation de la déformée est

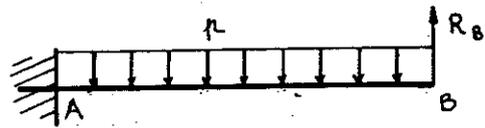
$$(69) \quad v = - \frac{p}{48 EJ} x^2 (2x^2 - 5xl + 3l^2)$$

2.4 METHODE DE SUPERPOSITION

La troisième méthode est la méthode de superposition: on commence par rendre le problème isostatique en supprimant des liaisons surabondantes et en considérant les inconnues de liaison correspondantes comme des forces extérieures. On résout ce problème isostatique par superposition de problèmes isostatiques élémentaires, et on détermine les inconnues de liaison en écrivant que les conditions cinématiques de liaison supprimées au départ sont vérifiées

Exemple 2.

On supprime l'appui en B en appli-
quant au point B une force concen-



trée R_B . Le problème devient isostatique et, après l'avoir résolu, on dé-
terminera R_B en écrivant que la flèche en B est nulle

$$(70) \quad v_B = v(l) = 0$$

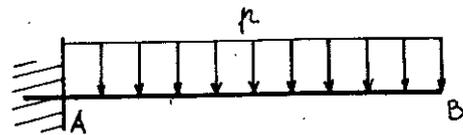
Il est clair que pour ce problème isostatique, les efforts intérieurs sont
encore donnés par (48) (la seule différence étant que R_B n'est plus une
inconnue hyperstatique, mais une charge appliquée) et on peut résoudre ce
problème par l'une des deux méthodes envisagées jusqu'à présent. Si l'on
choisit la méthode énergétique, on remarque que d'après (48) l'énergie de
déformation sera toujours donnée par (57) avec $\gamma = R_B$. L'application du
théorème de Castigliano donne alors

$$(71) \quad v_B = \frac{\partial W}{\partial R_B}$$

Ainsi, l'écriture de (70) redonne exactement (59). En passant, nous remar-
quons que lorsque les inconnues hyperstatiques sont les inconnues de liai-
son associées à des liaisons surabondantes, alors le théorème de Menabrea
est un cas particulier du théorème de Castigliano, et il est souvent pré-
senté comme tel dans les cours de RDM. Si l'on préfère appliquer la métho-
de de compatibilité des déformations, alors on peut encore écrire (66),
et la condition (70) redonne directement (67). Ainsi, si l'on envisage les
deux méthodes présentées plus haut, la transformation du problème que nous
avons faite ne nous rapporte rien, les calculs étant exactement les mêmes.
Par contre, on peut résoudre ce problème par superposition de deux problè-
mes élémentaires qui ont été étudiés au § 1 :

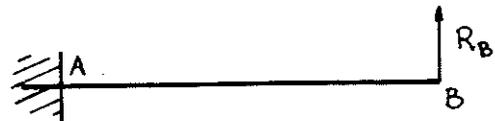
Pb1. C'est le problème du § 1.1, et
on a trouvé (12)

$$(72) \quad v_B^1 = - \frac{pl^4}{8EJ}$$



Pb 2. C'est le problème a) du § 3.1
et on a trouvé (30)

$$(73) \quad v_B^2 = \frac{R_B l^3}{3EJ}$$



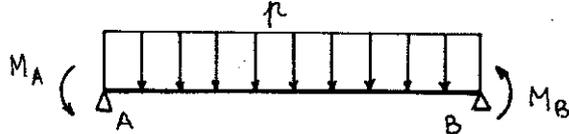
Par superposition, on a $v_B = v_B^1 + v_B^2$ et la condition (70) donne directe-
ment

$$(74) \quad \frac{R_B l^3}{3 EJ} - \frac{pl^4}{8 EJ} = 0 \quad , \quad R_B = \frac{3 pl}{8}$$

càd (50); on voit que cette méthode évite tout calcul.

Exemple 2.

On remplace les encastrements en A et B par deux appuis simples, et on considère les moments d'encastrement M_A et M_B comme des efforts extérieurs. La condition à écrire sera donc

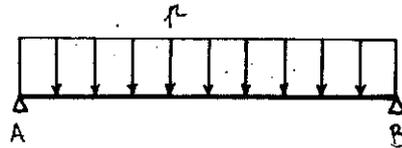


$$(75) \quad v'_A = 0 \quad , \quad v'_B = 0$$

Pour résoudre ce problème, on superpose trois problèmes isostatiques :

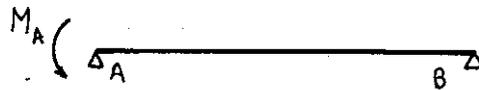
Pb 1. C'est le problème b) du § 3.1.

On obtient alors directement à partir de (37)



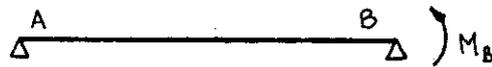
$$(76) \quad v'_B = -v'_A = \frac{pl^3}{24 EJ}$$

Pb 2. C'est le problème c) du § 3.1 et (40) donne



$$(77) \quad v'_B = -\frac{M_A l^2}{6 EJ} \quad , \quad v'_A = \frac{M_A l^2}{3 EJ}$$

Pb 3. C'est le symétrique du précédent, et on a



$$(78) \quad v'_B = \frac{M_B l^2}{3 EJ} \quad , \quad v'_A = -\frac{M_B l^2}{6 EJ}$$

La condition (75) donne alors

$$(79) \quad \begin{cases} \frac{M_A l^2}{3 EJ} - \frac{M_B l^2}{6 EJ} - \frac{pl^3}{24 EJ} = 0 \\ -\frac{M_A l^2}{6 EJ} + \frac{M_B l^2}{3 EJ} + \frac{pl^3}{24 EJ} = 0 \end{cases}$$

système de deux équations à deux inconnues qui donne directement

$$(80) \quad M_A = -M_B = \frac{pl^2}{12}$$

càd (45) par les équations de la statique.

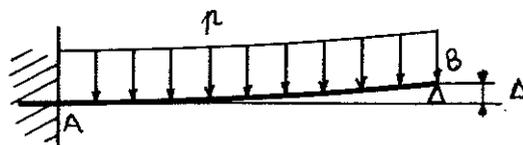
La méthode de superposition permet d'obtenir sans aucun calcul le système d'équations vérifié par les inconnues hyperstatiques. Comme on l'a vu, son succès est lié au fait que pour une poutre droite les problèmes isostatiques élémentaires sont en nombre très limité, et il est facile d'en dresser un catalogue. Celui du § 1.3 permet déjà de résoudre bon nombre de problèmes.

2.5 PROBLEMES NON CLASSIQUES

Comme nous l'avons souligné au § XVI.2.2, les théorèmes énergétiques démontrés au Chapitre XVI ne sont valables que pour les problèmes classiques de RDM, c'ad pour des liaisons parfaites imposant des déplacements nuls. Nous allons montrer dans ce paragraphe comment ces méthodes peuvent encore être utilisées pour des problèmes non classiques. Nous envisagerons deux types de liaisons non classiques: dénivellation d'appuis et appui élastique, et nous envisagerons dans les deux cas un problème analogue à celui de l'exemple 2.

1. Dénivellation d'appuis

Nous considérons la poutre de l'exemple 2, mais nous supposons maintenant que l'appui B est dénivelé d'une quantité Δ . Les conditions aux limites (65) sont donc remplacées par



$$(81) \quad v_A = 0, \quad v'_A = 0, \quad v_B = \Delta$$

Les équations de la statique sont inchangées. La méthode de compatibilité des déformations s'applique directement, il suffit en effet d'introduire (81) dans (67). La méthode de superposition est cependant la plus rapide: il suffit d'écrire au lieu de (74)

$$(82) \quad \frac{R_B l^3}{3 EJ} - \frac{p l^4}{8 EJ} = \Delta$$

$$(83) \quad R_B = \frac{3 p l}{8} + \frac{3 EJ \Delta}{l^3}$$

et connaissant Δ , on peut déterminer R_A , M_A et les efforts intérieurs.

Pour appliquer la méthode énergétique, il suffit, comme au § 2.4, de supprimer l'appui B en le remplaçant par la force extérieure R_B . On obtient alors W donné par (58), et pour écrire la condition supprimée il suffit d'appliquer le théorème de Castigliano

$$(84) \quad v_B = \frac{\partial W}{\partial R_B} = \Delta$$

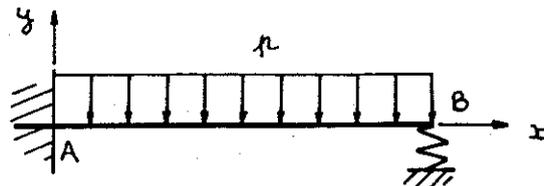
qui donne donc d'après (58)

$$\frac{1}{EJ} \left[R_B \frac{l^3}{3} - \frac{pl^4}{8} \right] = \Delta$$

ce qui redonne directement (82). A nouveau pour $\Delta = 0$ on retrouve le théorème de Menabrea.

2. Appui élastique

Nous considérons à nouveau la poutre AB de l'exemple 2, mais nous supposons maintenant que l'appui en B est élastique, c'ad que la réaction en B est proportionnelle à la flèche



$$(85) \quad R_B = -k v_B$$

A nouveau, la méthode de compatibilité des déformations s'applique encore, en écrivant (85) au lieu de (67), mais la méthode de superposition est la plus rapide; on écrit simplement, au lieu de (74), la condition (85)

$$(86) \quad \frac{R_B l^3}{3 EJ} - \frac{pl^4}{8 EJ} = -\frac{R_B}{k}$$

ce qui donne

$$(87) \quad R_B = \frac{1}{1 + \frac{3 EJ}{k l^3}} \frac{3 pl}{8}$$

Si l'appui élastique est très rigide ($k \rightarrow \infty$), on retrouve la poutre de l'exemple 2 avec un appui classique en B; s'il est très souple ($k \rightarrow 0$), on retrouve la poutre console du § 1.1.

Pour appliquer la méthode énergétique, on montre que l'on peut encore appliquer le théorème de Menabrea à condition de prendre comme système la poutre et l'appui élastique, c'ad de rajouter à l'énergie de déformation l'énergie de l'appui élastique

$$(88) \quad W_B = \frac{1}{2k} R_B^2$$

L'énergie de déformation du système est donc d'après (58)

$$(89) \quad W = \frac{1}{2EJ} \left[R_B^2 \frac{l^3}{3} - p R_B \frac{l^4}{4} + \frac{p^2 l^5}{20} \right] + \frac{1}{2k} R_B^2$$

Le théorème de Menabrea donne alors

$$(90) \quad \frac{\partial W}{\partial R_B} = \frac{1}{EJ} \left(R_B \frac{l^3}{3} - \frac{p l^4}{4} \right) + \frac{1}{k} R_B = 0$$

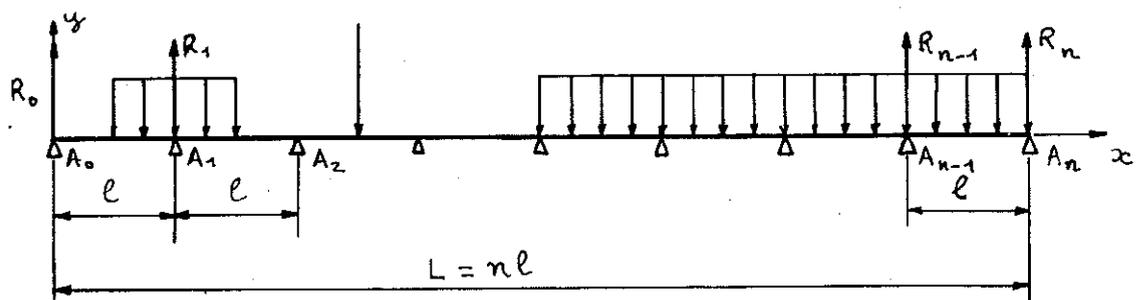
câd encore (86).

3. POUTRES CONTINUES

Les méthodes que nous présentons sont les méthodes de base de la RDM. Elles conviennent parfaitement pour des systèmes simples. Pour des systèmes plus compliqués, à haut degré d'hyperstaticité, elles donneraient lieu, appliquées naïvement, à des calculs inextricables à la main et peu propices au calcul sur ordinateur. On a donc développé pour les divers types de structures des méthodes particulières de calcul, qui conduisent à des calculs plus simples. On trouvera ces méthodes amplement développées dans les traités de Résistance des Matériaux, notamment en [33]. Il n'est pas dans l'objet de ce cours de les présenter en détail, mais il est intéressant d'en donner, sur le cas particulier des poutres droites, un aperçu.

3.1 METHODE DIRECTE

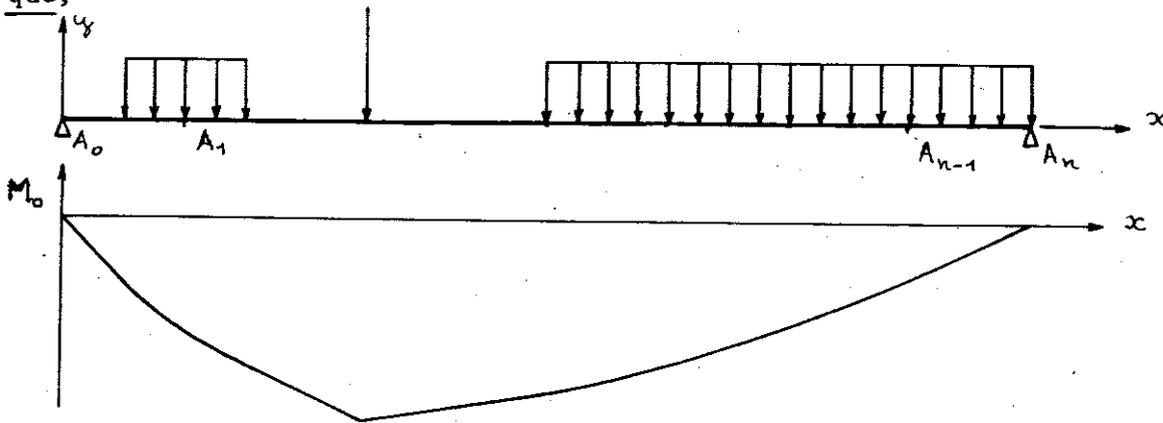
On appelle poutre continue une poutre sur $n+1$ appuis (n grand). Pour simplifier, nous supposons que la poutre est à section constante, que tous les appuis sont de niveau, et que tous les appuis sont équidistants. Si ces conditions ne sont pas vérifiées, les résultats qui suivent peuvent s'étendre, et nous renvoyons le lecteur par exemple à [33].



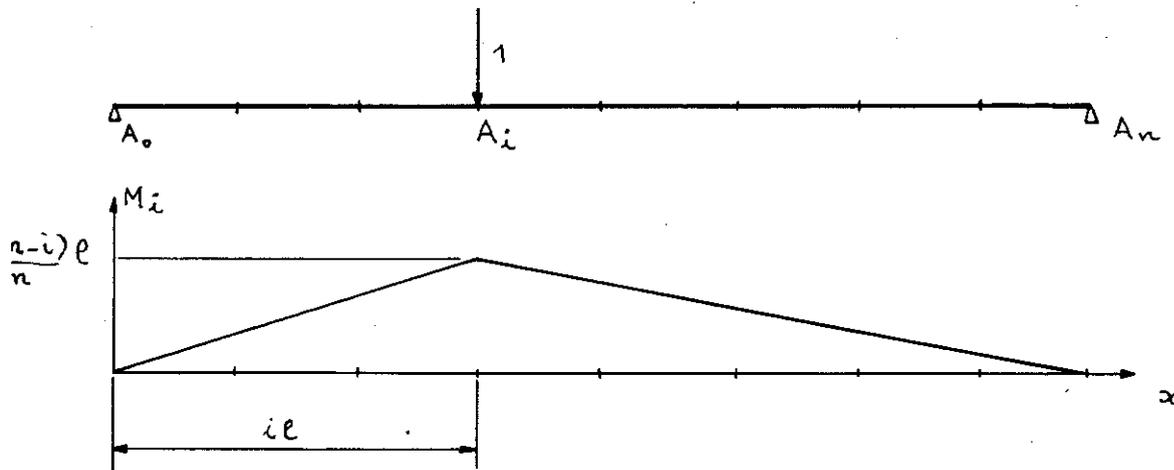
Cette poutre est soumise à un chargement quelconque. Les inconnues de liaison sont les $(n+1)$ réactions R_0, R_1, \dots, R_n . Le système est donc hyperstatique de degré $n-1$ et nous pouvons prendre comme inconnues hyperstatiques les réactions R_1, \dots, R_{n-1} sur les $n-1$ appuis intermédiaires. Le moment fléchissant sera alors donné par

$$(91) \quad M(x) = M_0(x) + \sum_{i=1}^{n-1} R_i M_i(x)$$

où $M_0(x)$ est le moment fléchissant lorsque tous les R_i ($i=1, n-1$) sont nuls, c'ad pour la poutre $A_0 A_n$ sur deux appuis soumise au chargement appliqué,



et où $M_i(x)$ est le moment obtenu en l'absence de chargement extérieur et lorsque tous les R_j ($j=1, n-1$) sont nuls sauf $R_i = 1$. C'est donc le moment créé dans la poutre sur deux appuis $A_0 A_n$ par une force concentrée unité appliquée en A_i (voir § XIII.2.1, exemple 1)



L'énergie de déformation de la poutre est alors

$$(92) \quad W = \frac{1}{2EJ} \int_0^{L=ml} \left[M_0(x) + \sum_{i=1}^{n-1} R_i M_i(x) \right]^2 dx$$

$$(93) \quad W = \frac{1}{2} c_{00} + \sum_{i=1}^{n-1} c_{0i} R_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij} R_i R_j$$

avec

$$(94) \quad c_{00} = \frac{1}{EJ} \int M_0^2 dx \quad c_{0i} = \frac{1}{EJ} \int M_0 M_i dx \quad c_{ij} = \frac{1}{EJ} \int M_i M_j dx$$

Les coefficients c_{00} , c_{0i} , c_{ij} font intervenir l'intégrale de produits de fonctions linéaires ou paraboliques, les configurations sont donc en nombre limité et facilement catalogable. Ce sont les intégrales de Mohr. Pour lever l'hyperstaticité du système il suffira ensuite d'appliquer le théorème de Menabrea en écrivant

$$(95) \quad \frac{\partial W}{\partial R_i} = c_{0i} + \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij} R_j = 0$$

système de (n-1) équations à (n-1) inconnues.

On peut aussi obtenir le même résultat en appliquant la méthode de superposition. Nous noterons pour la poutre sur deux appuis

c_{0i} la flèche causée en A_i par le chargement appliqué

c_{ij} la flèche causée en A_i par une force unité appliquée en A_j (le théorème de réciprocité donne alors $c_{ij} = c_{ji}$)

En écrivant que la flèche totale est nulle en A_1, \dots, A_{n-1} on obtiendra encore le système (95), et on vérifie facilement par application du théorème de Castigliano que les flèches c_{0i} et c_{ij} sont données par (94). Cependant leur interprétation en termes de flèches peut permettre de les tirer sans calcul des résultats obtenus au § 1. En particulier, les coefficients c_{ij} découlent directement de (23).

3.2 THEOREME DES TROIS MOMENTS

Nous pouvons également choisir comme inconnues hyperstatiques les moments fléchissants au droit des appuis A_1, \dots, A_{n-1}

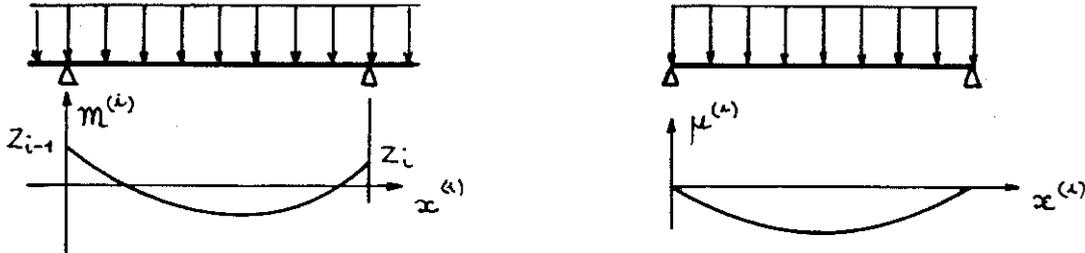
$$(96) \quad Z_i = M_{A_i} = m(i l) \quad i = 1, \dots, n-1$$

Considérons la i ème travée $A_{i-1}A_i$ et nous notons sur cette travée

$x^{(i)}$ l'abscisse par rapport à A_{i-1} .

$\mathcal{M}^{(i)}(x^{(i)})$ et $\mathcal{T}^{(i)}(x^{(i)})$ le moment fléchissant et l'effort tranchant

$\mu^{(i)}(x^{(i)})$ et $\tau^{(i)}(x^{(i)})$ le moment fléchissant d'une poutre $A_{i-1}A_i$ sur deux appuis soumise au même chargement



Les équations (XIII.24) et (XIII.25) montrent que, puisque les répartitions d'efforts intérieurs $(\mathcal{M}^{(i)}, \mathcal{T}^{(i)})$ et $(\mu^{(i)}, \tau^{(i)})$ correspondent au même chargement

$$(97) \quad \begin{cases} \mathcal{T}^{(i)} = \tau^{(i)} + Cte \\ \mathcal{M}^{(i)} = \mu^{(i)} + \text{fonction affine} \end{cases}$$

Puisque $\mu^{(i)}$ s'annule en A_i et A_{i-1} tandis que $\mathcal{M}^{(i)}$ prend respectivement les valeurs Z_{i-1} et Z_i , nous pouvons donc écrire sur la i ème travée

$$(98) \quad \mathcal{M}^{(i)}(x^{(i)}) = \mu^{(i)}(x^{(i)}) + \frac{Z_{i-1}}{l} (l - x^{(i)}) + \frac{Z_i}{l} x^{(i)}$$

expression qui donne le moment fléchissant en fonction des inconnues hyperstatiques Z_i ($i=1, n-1$). En particulier, on voit que l'expression du moment fléchissant sur la travée i ne fera intervenir que les moments Z_i aux extrémités. Il en résulte que dans l'énergie de déformation (51), le moment Z_i n'interviendra que pour les travées i et $i-1$. Lorsqu'on dérivera par rapport à Z_i pour appliquer le théorème de Menabrea, seuls subsisteront les termes relatifs à ces travées, c'est-à-dire des termes en Z_{i-1}, Z_i, Z_{i+1} . Ainsi pour lever l'hyperstaticité, il faudra résoudre un système linéaire dont la matrice est tridiagonale (alors que la matrice obtenue par la méthode directe du § 3.1 était pleine).

Les équations correspondantes peuvent s'obtenir directement à partir de (98) par calcul de W et dérivation. On peut également les obtenir en utilisant les formules de Navier-Bresse du § XVI.1.5: si on néglige l'effort tranchant les équations (XVI.46) et (XVI.51) donnent sur la travée i en notant $v_i = v_{A_i}$ et $\omega_i = \omega_{A_i}$

$$(99) \quad \begin{cases} \omega = \omega_{i-1} - \frac{1}{EJ} \int_0^{x^{(i)}} m^{(i)}(\xi) d\xi \\ v = v_{i-1} + \omega_{i-1} x^{(i)} - \frac{1}{EJ} \int_0^{x^{(i)}} (x^{(i)} - \xi) m^{(i)}(\xi) d\xi \end{cases}$$

En écrivant ces relations au point A_i , cād pour $x^{(i)} = l$, on obtient

$$(100) \quad \omega_i = \omega_{i-1} - \frac{1}{EJ} \int_0^l m^{(i)}(\xi) d\xi$$

$$(101) \quad v_i = v_{i-1} + \omega_{i-1} l - \frac{1}{EJ} \int_0^l (l - \xi) m^{(i)}(\xi) d\xi$$

Mais on doit avoir v nul aux appuis. La relation (101) donne alors

$$(102) \quad \omega_{i-1} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) m^{(i)}(\xi) d\xi$$

et en reportant dans (100) on obtient

$$(103) \quad \omega_i = -\frac{1}{EJl} \int_0^l \xi m^{(i)}(\xi) d\xi$$

On reporte alors (98) dans (103) et on obtient

$$(104) \quad \omega_i = -\frac{1}{EJl} \int_0^l \xi \mu^{(i)}(\xi) d\xi - \frac{l}{3EJ} Z_i - \frac{l}{6EJ} Z_{i-1}$$

De même pour la travée $i+1$ on trouve à partir de (102)

$$(104) \quad \omega_i = \frac{1}{EJ} \int_0^l \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) \mu^{(i+1)}(\xi) d\xi + \frac{l}{3EJ} Z_i + \frac{l}{6EJ} Z_{i-1}$$

En identifiant les deux valeurs de ω_i , on trouve

Théorème des trois moments

$$(105) \quad M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = -\frac{6}{l^2} \left\{ \int_0^l \xi \mu^{(i)}(\xi) d\xi + \int_0^l (l - \xi) \mu^{(i+1)}(\xi) d\xi \right\}$$

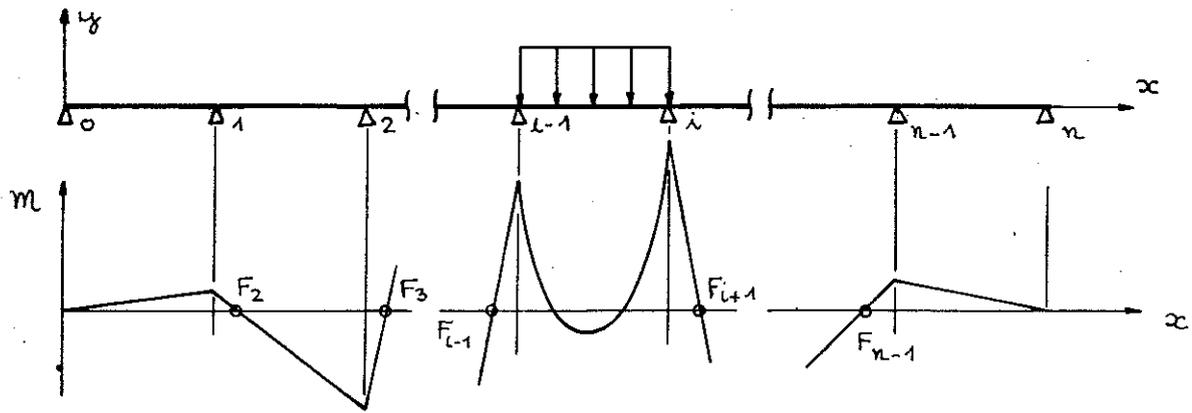
En écrivant ce théorème pour $i = 1, \dots, n-1$, avec $M_0 = M_n = 0$, on obtient le système annoncé.

3.3 METHODE DES FOYERS

Considérons maintenant une poutre sur n appuis telle que seule la travée i soit chargée (il suffira ensuite de superposer toutes ces solutions). On aura donc

$$(106) \quad \mu^{(i)}(x) = \mu(x) \quad \mu^{(j)}(x) = 0 \quad (i \neq j)$$

Le diagramme des moments fléchissants a alors l'allure suivante



L'application du théorème des trois moments (105) pour $i = 1, 2, \dots, n-1$ donne

$$(107) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4 M_1 + M_2 = 0 \\ M_1 + 4 M_2 + M_3 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ M_{i-3} + 4 M_{i-2} + M_{i-1} = 0 \\ M_{i-2} + 4 M_{i-1} + M_i = - \frac{6}{l^2} \int_0^l (l-\xi) \mu(\xi) d\xi \\ M_{i-1} + 4 M_i + M_{i+1} = - \frac{6}{l^2} \int_0^l \xi \mu(\xi) d\xi \\ M_i + 4 M_{i+1} + M_{i+2} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ M_{m-2} + 4 M_{m-1} = 0 \end{array} \right.$$

En partant de la lère de ces équations et en descendant on obtient

$$(108) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1 = - \phi_2 M_2, \quad \phi_2 = 1/4 \\ M_2 = - \phi_3 M_3, \quad \phi_3 = 1/(4 - \phi_2) = 4/15 \\ \dots\dots\dots \\ M_{i-2} = - \phi_{i-1} M_{i-1}, \quad \phi_{i-1} = 1/(4 - \phi_{i-2}) \end{array} \right.$$

Géométriquement, cela signifie que les points F_2, F_3, \dots, F_{i-1} où le moment fléchissant s'annule sur chaque travée, sont des points fixes indépendants du chargement appliqué; ce sont les "foyers" de la poutre.

De même, en partant de la dernière et en remontant, on obtient

$$(109) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{m-1} = - \phi'_{m-1} M_{m-2}, \quad \phi'_{m-1} = 1/4 = \phi_2 \\ \dots\dots\dots \\ M_{i+1} = - \phi'_{i+1} M_i, \quad \phi'_{i+1} = 1/(4 - \phi'_{i+2}) \end{array} \right.$$

Les foyers F_{m-1}, \dots, F_{i+1} sont également fixes. Finalement dans (107) les équations d'ordre $i-1$ et i donnent

$$(110) \quad \begin{cases} (4 - \phi_{i-1}) M_{i-1} + M_i = -\frac{6}{l^2} \int_0^l (l-\xi) \mu(\xi) d\xi \\ M_{i-1} + (4 - \phi'_{i+1}) M_i = -\frac{6}{l^2} \int_0^l \xi \mu(\xi) d\xi \end{cases}$$

système de deux équations à deux inconnues qu'il suffit de résoudre. Ainsi, on a pu ramener la levée de l'hyperstaticité à la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues. Les constantes ϕ_i sont des constantes universelles déterminées par réurrence

$$(111) \quad \begin{cases} \phi_2 = \phi'_{m-1} = 1/4 = 0,25 \\ \phi_3 = \phi'_{m-2} = 4/15 = 0,2667 \\ \phi_4 = \phi'_{m-3} = 15/56 = 0,2678 \\ \phi_j = \phi'_{m-j+1} \rightarrow 2 - \sqrt{3} = 0,2679 \quad \text{pour } j \rightarrow \infty \end{cases}$$

Bien entendu, ces formules ne sont plus valables si l'on ne fait pas les hypothèses que nous avons faites au départ (section constante, appuis équidistants, ...), mais le principe de ces méthodes subsiste. On trouvera aussi dans la littérature [46] [47] [48] des méthodes voisines adaptées au calcul sur ordinateur.

