

Chapitre XVII

TREILLIS

1. CALCUL ELASTIQUE

1.1 TREILLIS ISOSTATIQUES

Nous avons présenté les treillis de manière générale au § XII.3.3. Dans une telle structure, les barres travaillent uniquement en traction - compression, et les efforts intérieurs se réduisent à des efforts normaux (§ XIII.1.3). Comme nous l'avons discuté au § XII.3.3, le caractère isostatique ou hyperstatique dépend uniquement du nombre de barres, de noeuds et de liaisons avec l'extérieur.

Pour un treillis isostatique, comme celui de l'exemple 1 au § XII.3.3, les équations de la statique permettent le calcul de tous les efforts de liaison et donc des tensions dans toutes les barres - équations (XII.39). Puisque dans chaque barre il n'y a qu'un effort normal, la condition de dimensionnement s'écrit directement sous la forme XV.13

$$(1) \quad \frac{|N_i|}{S_i} \leq \sigma_{ei} \quad i = 1, \dots, b$$

Par exemple, si l'on suppose que toutes les barres sont constituées du même matériau (même E et même σ_e pour toutes les barres), on obtient

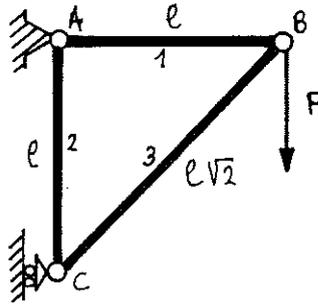
$$(2) \quad S_i \geq \frac{|N_i|}{\sigma_e}$$

et cette condition donne la section minimale pour chacune des barres. On peut donc dimensionner la structure, c'ad choisir la dimension des barres. Ce dimensionnement est un dimensionnement purement élastique, destiné à éviter la ruine du treillis par entrée en plasticité d'une des barres. Nous verrons au Chapitre XX qu'il convient de rajouter une condition de dimensionnement supplémentaire pour éviter le flambement des barres travaillant en compression (la barre 3 dans l'exemple du § XII.3.3).

Il reste à calculer les déplacements. La méthode générale de calcul, par intégration des déformations, sera présentée au § 1.3, mais on peut déjà remarquer qu'un déplacement caractéristique de la déformation du treil-

lis de l'exemple 1 du § XII.3.3 sera la flèche au point B, c'ad le déplacement vertical du point d'application de la force P.

Exemple 1. Treillis isostatique
Treillis isostatique.



Or, d'après le théorème de Castigliano (§ XVI.2.5), cette flèche est donnée par la dérivée de l'énergie de déformation par rapport à P. Pour calculer l'énergie de déformation du treillis, on remarque que, d'après (XVI.36), la densité d'énergie est constante dans chaque barre, et que l'énergie de déformation totale du treillis est

$$(3) \quad W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{l_i (N_i)^2}{ES_i}$$

où l_i désigne le longueur de la barre i . Par exemple, dans l'Exemple 1, on a, d'après (XII.39),

$$(4) \quad N_1 = N_2 = -P \quad N_3 = P\sqrt{2}$$

$$(5) \quad W = \frac{l}{2} \left(\frac{P^2}{ES_1} + \frac{P^2}{ES_2} + \frac{2\sqrt{2} P^2}{ES_3} \right)$$

De sorte que la flèche en B est donnée par

$$(6) \quad \delta_P = -v_B = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{Pl}{E} \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{2\sqrt{2}}{S_3} \right)$$

1.2 TREILLIS HYPERSTATIQUES

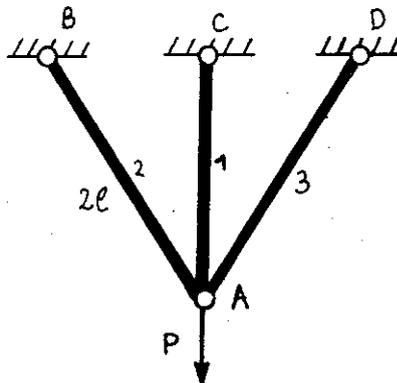
Dans un treillis hyperstatique de degré h, on peut calculer les tensions de toutes les barres en fonction de h inconnues hyperstatiques (que l'on choisira en général comme étant les tensions dans h barres particulières) que nous noterons de manière générale par $\underline{X} = (X_1, \dots, X_h)$. En d'autres termes, un CSA sera caractérisé par une valeur \hat{X} de \underline{X} . On peut lever l'hyperstaticité, c'ad déterminer \underline{X} , en appliquant le théorème de Menabrea: il suffit de calculer, en utilisant (3), l'énergie de déformation $W(\hat{X})$ et d'écrire que W est minimum, c'ad

$$(7) \quad \frac{\partial W}{\partial X_1} = \frac{\partial W}{\partial X_2} = \dots = \frac{\partial W}{\partial X_h} = 0$$

ce qui déterminera X et permettra de calculer les efforts intérieurs, puis de dimensionner, en appliquant (1) ou (2). Cependant, on remarque que les sections S_i de chacune des barres interviennent dans l'expression (3) de l'énergie, c'est-à-dire dans le calcul des efforts intérieurs; contrairement à ce qui se passait dans le cas isostatique, il y a bouclage: pour dimensionner, il faut connaître les efforts intérieurs, mais pour déterminer les efforts intérieurs il faut connaître les S_i et donc avoir déjà dimensionné. Pour briser ce cercle vicieux, il faut faire une hypothèse sur le dimensionnement, par exemple supposer que toutes les barres sont identiques (même section et même matériau) ou bien procéder par tâtonnements.

Considérons par exemple l'exemple 2 du § XII.3.3.

Exemple 2
Treillis hyperstatique
de degré 1.



On a obtenu au § XII.3.3, en prenant comme inconnue hyperstatique X , la tension dans la barre 2

$$(8) \quad \hat{N}_2 = \hat{N}_3 = X, \quad \hat{N}_1 = -(P + \sqrt{3} X)$$

D'après (3), l'énergie de déformation sera

$$(9) \quad W = \frac{l}{2} \left[\frac{2X^2}{ES_2} + \frac{2X^2}{ES_3} + \frac{\sqrt{3} (P + \sqrt{3} X)^2}{ES_1} \right] = W(X, P)$$

et en écrivant le théorème de Menabrea

$$(10) \quad \frac{\partial W}{\partial X} = 0$$

on obtiendrait X en fonction de P et des sections S_1, S_2, S_3 , mais la condition de dimensionnement (2) conduirait à un système d'inéquations non linéaires en S_1, S_2, S_3 . Nous supposons donc que toutes les barres sont identiques, et dans ces conditions, (9) devient

$$(11) \quad W = \frac{l}{ES} \left[2X^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} (P + \sqrt{3} X)^2 \right]$$

Le théorème de Menabrea (10) donne alors

$$(12) \quad 2X + \frac{3}{2} (P + \sqrt{3} X) = 0$$

ce qui donne la valeur de X

$$(13) \quad X = - \frac{3P}{4 + 3\sqrt{3}}$$

On obtient alors les tensions par (8)

$$(14) \quad N_2 = N_3 = - \frac{3P}{4 + 3\sqrt{3}}, \quad N_1 = - \frac{4P}{4 + 3\sqrt{3}}$$

Les trois barres travaillent en traction, et la barre centrale 1 est la plus sollicitée. La condition de dimensionnement (2) donne

$$(15) \quad S \geq \frac{4P}{4 + 3\sqrt{3}} \frac{1}{\sigma_e} = \frac{0,434 P}{\sigma_e}$$

mais il faut se souvenir que ces résultats ne sont valables que pour un choix particulier ($S_1 = S_2 = S_3 = S$). Pour un autre choix, par exemple $S_1 = 2S_2 = 2S_3 = S$, on obtiendrait un autre résultat, et il est clair que le choix fait n'est pas optimal, car les barres 2 et 3 travaillent en dessous de leur capacité de résistance.

Le calcul général des déplacements sera fait au § 1.3, mais le théorème de Castigliano donne directement la flèche, c'ad le déplacement vertical du point A, par

$$(16) \quad \delta = - v_A = \frac{\partial W}{\partial P}$$

On peut remarquer que pour faire ce calcul on peut indifféremment

- a) dériver $W(X, P)$ par rapport à P , puis remplacer X par sa valeur;
- b) remplacer X par sa valeur dans W pour obtenir $\bar{W}(P)$, puis dériver par rapport à P .

En effet, d'après (10), on a

$$(17) \quad \frac{dW}{dP} = \frac{\partial W}{\partial P} + \frac{\partial W}{\partial X} \frac{dX}{dP}$$

Dans notre exemple, on a

$$(18) \quad \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{l\sqrt{3}}{ES} (P + \sqrt{3}X) = \frac{Pl}{ES} \frac{4\sqrt{3}}{4 + 3\sqrt{3}}$$

1.3 COMPATIBILITE DES DEPLACEMENTS

Comme mentionné à la fin du § XVI.1.4, une autre méthode pour lever l'hyperstaticité d'un système consiste à calculer les déplacements et à écrire la compatibilité des différentes conditions. Dans le cas d'un

treillis, chaque barre travaille en traction - compression, et sa déformation sera caractérisée par son allongement ϵ_i . La loi de comportement sera alors

$$(19) \quad \epsilon_i = \frac{\Delta l_i}{l_i} = - \frac{N_i}{E S_i}$$

en notant Δl_i la variation de longueur de la barre i . Pour un treillis plan, nous avons, avec les notations du § XII.3.3,

- $b + e$ inconnues (les tensions dans les b barres, et e inconnues de liaisons)

- $2q$ équations d'équilibre (2 pour chacun des q noeuds)

et si $b + e \gg 2q$, le système est hyperstatique.

Si maintenant nous considérons également les déplacements, alors il faut introduire

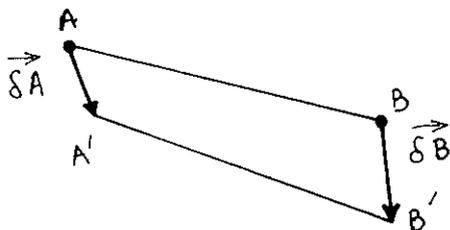
- $2q - e$ inconnues supplémentaires (les deux composantes du déplacement de chacun des q noeuds, e d'entre elles étant imposées par les e conditions cinématiques de liaison)

- b équations supplémentaires (la loi de comportement (19) pour chacune des b barres).

Nous avons donc finalement $2q + b$ équations pour $2q + b$ inconnues, ce qui permet de résoudre le système.

Considérons par exemple l'exemple 2 envisagé précédemment. Le déplacement de la structure sera complètement caractérisé par les composantes u_A et v_A du déplacement du point A (les déplacements des points B, C et D sont nuls d'après les conditions de liaison), alors que l'on aura 3 lois de comportement (19). Ceci nous fournira donc une relation de compatibilité permettant le calcul de l'inconnue hyperstatique.

Pour calculer l'allongement ϵ d'une barre AB qui, après déformation, devient A'B', on note $\vec{\delta A}$ et $\vec{\delta B}$ les déplacements des points



A et B

$$\vec{\delta A} = \vec{AA'}, \quad \vec{\delta B} = \vec{BB'}$$

L'allongement est donné par

$$(20) \quad \epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{A'B' - l}{l}$$

$$(21) \quad \begin{aligned} (A'B')^2 &= \vec{A'B'} \cdot \vec{A'B'} = (\vec{AB} + \vec{\delta B} - \vec{\delta A}) \cdot (\vec{AB} + \vec{\delta B} - \vec{\delta A}) \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{AB} + 2\vec{AB} \cdot (\vec{\delta B} - \vec{\delta A}) + o(\delta^2) \\ &= l^2 \left[1 + \frac{2\vec{AB} \cdot (\vec{\delta B} - \vec{\delta A})}{l^2} + o(\delta^2) \right] \end{aligned}$$

$$(22) \quad A'B' = \overline{A'B'} \cdot \overline{A'B'} = l \left[1 + \frac{\overline{AB} \cdot (\overline{\delta B} - \overline{\delta A})}{l^2} + O(\delta^2) \right]$$

Nous obtenons donc au premier ordre

$$(23) \quad \epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\overline{AB} \cdot (\overline{\delta B} - \overline{\delta A})}{l^2}$$

Pour le treillis de l'exemple 2,

$$BA = \begin{vmatrix} l \\ -l\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

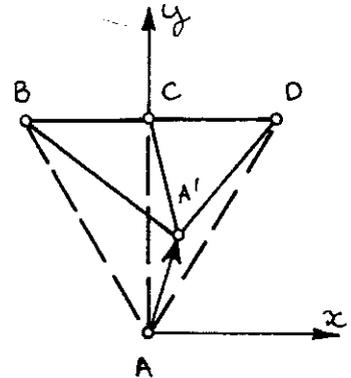
$$\epsilon_2 = \frac{l \delta x - \sqrt{3} l \delta y}{4 l^2}$$

$$DA = \begin{vmatrix} -l \\ -l\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

$$\epsilon_3 = \frac{-l \delta x - \sqrt{3} l \delta y}{4 l^2}$$

$$CA = \begin{vmatrix} 0 \\ -l\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

$$\epsilon_1 = -\frac{\sqrt{3} l \delta y}{3 l^2}$$



$$(24) \quad \epsilon_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\delta y}{l}, \quad \epsilon_2 = -\frac{\sqrt{3} \delta y - \delta x}{4 l}, \quad \epsilon_3 = -\frac{\sqrt{3} \delta y + \delta x}{4 l}$$

On écrit alors les trois lois de comportement (19) avec (8) pour écrire

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\delta y}{l} = -\frac{P + \sqrt{3} X}{E S_1} \\ \frac{\sqrt{3} \delta y - \delta x}{4 l} = \frac{X}{E S_2} \\ \frac{\sqrt{3} \delta y + \delta x}{4 l} = \frac{X}{E S_3} \end{cases}$$

ystème de trois équations à trois inconnues, qui permet de calculer X , δx et δy . Par exemple, si nous supposons encore que les trois barres sont identiques, on obtient

$$(26) \quad \delta x = 0, \quad \delta y = -\frac{4 \sqrt{3}}{4 + 3 \sqrt{3}} \frac{P l}{E S}, \quad X = -\frac{3 P}{4 + 3 \sqrt{3}}$$

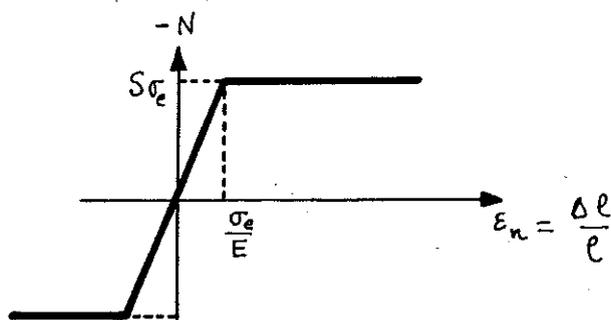
et on obtient les mêmes résultats qu'au § 1.2.

De même, pour calculer les déplacements du treillis isostatique de l'exemple 1, on a trois déplacements inconnus (les deux composantes du déplacement du point B et le déplacement vertical du point C) pour les trois lois de comportement dans chacune des barres.

2. CALCUL PLASTIQUE

2.1 COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DES TREILLIS

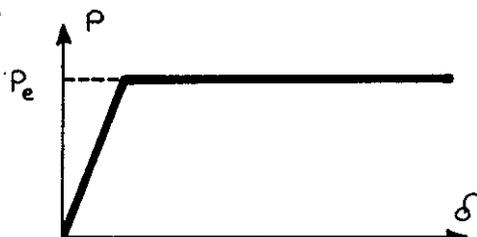
Tout ce que nous avons présenté jusqu'à présent concernait le calcul élastique. Sur l'exemple très simple des treillis, nous allons mettre en évidence quelques idées de base sur le calcul plastique des structures. Nous considérons donc un treillis constitué d'un matériau élasto-parfaitement plastique (voir Chapitre X, § X.1.1). Pour une barre travaillant en traction-compression, cela correspond au comportement suivant



Nous envisageons un treillis donné, et nous imposons une charge P croissante. Nous allons caractériser la réponse de ce treillis. Considérons d'abord un treillis isostatique comme celui de l'exemple 1. Pour fixer les idées, nous supposons que toutes les barres sont identiques. Dans ce cas la solution élastique du § 1.1 reste valable tant que la condition (1) reste vérifiée dans toutes les barres, c'est-à-dire d'après (4) tant que

$$(27) \quad P \leq \frac{S \sigma_e}{\sqrt{2}} = P_e$$

puisque la barre 3 est la plus sollicitée. Lorsque P atteint cette valeur, la barre 3 rentre en plasticité, conduisant à la ruine de la structure. Si donc on caractérise la réponse de la structure par la courbe donnant la flèche δ en fonction de P, on obtient la réponse suivante



Le calcul plastique prédit le même résultat que le calcul élastique: ruine de la structure lorsque P atteint la valeur P_e donnée par (27).

Pour un système hyperstatique comme celui de l'exemple 2, la situation est tout-à-fait différente: la solution élastique du § 1.2 reste valable tant que la barre la plus sollicitée, en l'occurrence d'après (14)

la barre 1, reste élastique, c'ad tant que

$$(28) \quad P \leq P_e = \frac{4+3\sqrt{3}}{4} S\sigma_e = 2,299 \cdot S\sigma_e$$

Lorsque P dépasse la charge élastique P_e , la barre 1 rentre en plasticité, mais maintenant sa déformation est "contenue" par les barres 2 et 3 qui elles sont encore élastiques. La barre 1 étant dans le domaine plastique, on a alors directement

$$(29) \quad N_1 = - S\sigma_e$$

d'où l'on tire, d'après (8),

$$(30) \quad N_2 = N_3 = X = - \frac{P - S\sigma_e}{\sqrt{3}}$$

Cette solution reste valable tant que les barres 2 et 3 restent élastiques, soit tant que

$$(31) \quad \frac{P - S\sigma_e}{\sqrt{3}} \leq S\sigma_e$$

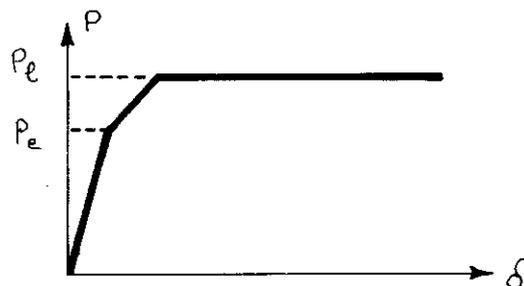
soit encore tant que

$$(32) \quad P \leq P_l = (1+\sqrt{3}) S\sigma_e = 2,732 S\sigma_e$$

Pour calculer la flèche δ , on peut utiliser la loi de comportement (19) pour les barres 2 et 3 qui restent élastiques. On obtient ainsi

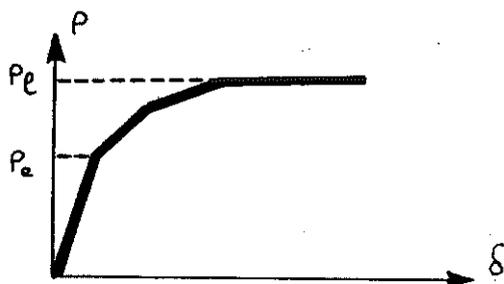
$$(33) \quad \delta = \frac{4l}{3} \frac{P - S\sigma_e}{ES}$$

Enfin, lorsque P dépasse P_l , les barres 2 et 3 rentrent aussi en plasticité, et rien ne peut empêcher la ruine de la structure. La courbe de réponse est alors



2.2 ANALYSE LIMITE

De manière générale, pour n'importe quel treillis, et même pour n'importe quelle structure, la réponse élastoplastique a toujours la même allure



Le comportement est élastique pour une charge inférieure à la charge élastique P_e , ensuite apparaissent dans la structure des plastifications locales, mais qui ne compromettent pas la tenue de la structure. Enfin, lorsque P atteint la charge plastique ou charge limite P_l la plastification se généralise et conduit à la ruine de la structure. On a déjà rencontré cette situation en plasticité tridimensionnelle (§ X.2.1 et X.2.2).

Le calcul élastique des structures donne accès à la charge élastique P_e , mais les exemples du § 2.1 montrent que P_e ne traduit pas bien la capacité de résistance d'une structure, puisque pour une structure isostatique cette charge élastique coïncide avec la ruine de la structure, alors que pour des structures très hyperstatiques elle peut en être très éloignée. De ce point vue la charge limite plastique P_l est beaucoup plus représentative. Le principe de base du calcul plastique des structures est de rechercher directement à calculer P_l . Or cela est facile - plus facile même qu'un calcul élastique -. Par exemple, pour l'exemple du § 1.2 il est clair que la ruine sera obtenue lorsque toutes les barres rentreront en plasticité, c'ad lorsque

$$(34) \quad N_1 = N_2 = N_3 = S\sigma_e$$

L'équilibre de la structure donne alors directement (§ XII.3.3)

$$(35) \quad P = P_l = N_1 + \frac{(N_2 + N_3)\sqrt{3}}{2} = (1 + \sqrt{3}) S\sigma_e$$

c'ad (32). Evidemment un tel raisonnement est très intuitif. Pour le rendre plus sûr, on fait appel à l'analyse limite et à ses deux théorèmes (§ X.3.2) qui, dans le cas particulier des treillis, donnent

Théorème statique. S'il existe un CSA licite (c'ad vérifiant la condition (1) pour toute barre), alors la structure peut supporter le chargement appliqué.

Théorème cinématique. S'il existe un mécanisme (défini par les vitesses de chaque noeud) respectant les liaisons et tel que la puissance des efforts extérieurs soit plus grande que la puissance de dissipation

$$(36) \quad P_{ext} > \dot{D} = S\sigma_e \sum l_i |\dot{\epsilon}_i|$$

alors la structure ne peut pas supporter le chargement appliqué.

Comme nous l'avons expliqué au § X.3.2, le premier théorème permet d'obtenir des bornes inférieures de la charge limite, et le second des bornes supérieures. Dans l'exemple du § 1.2, nous prenons comme CSA le champ défini par

$$(37) \quad N_1 = N_2 = N_3 = - \frac{P}{1 + \sqrt{3}}$$

qui sera licite pour

$$(38) \quad P \leq S \sigma_e (1 + \sqrt{3}) = P_\ell^-$$

Ainsi, le théorème statique montre que la structure peut supporter la charge P_ℓ^- qui est donc une borne inférieure de la charge limite. Nous prenons le mécanisme correspondant à une vitesse verticale $-\dot{v}$ du point A. D'après (24), les vitesse d'allongement des 3 barres sont

$$(39) \quad \dot{\epsilon}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\dot{v}}{\ell} \quad \dot{\epsilon}_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\dot{v}}{\ell} = \dot{\epsilon}_3$$

La puissance de dissipation est donc

$$(40) \quad \dot{D} = S \sigma_e (l \sqrt{3} \dot{\epsilon}_1 + 2l \dot{\epsilon}_2 + 2l \dot{\epsilon}_1) = S \sigma_e (1 + \sqrt{3}) \dot{v}$$

alors que la puissance des efforts extérieurs est

$$(41) \quad \dot{P}_{ext} = P \dot{v}$$

Le théorème cinématique montre alors que si

$$(42) \quad P > S \sigma_e (1 + \sqrt{3}) = P_\ell^+$$

alors la structure ne peut pas supporter la charge P. La charge P_ℓ^+ est donc une borne supérieure de la charge limite

$$(43) \quad P_\ell^- \leq P \leq P_\ell^+$$

d'où la conclusion, puisque $P_\ell^- = P_\ell^+$.

Le choix d'un CSA et d'un mécanisme permettant d'obtenir des bornes supérieures et inférieures égales n'est pas toujours aussi évident, mais en RDM on y arrive généralement sans trop de difficultés (voir [43], [44], [45], [29]).

Nous considérons toujours notre structure hyperstatique de l'exemple 1.2, et nous supposons maintenant qu'elle est soumise à une charge P qui n'est plus constante, mais qui oscille entre deux valeurs limites P_- et P_+ . Si

$$(44) \quad -P_e \leq P_- < P_+ \leq P_e$$

l'évolution sera complètement élastique. Que se passe-t-il si $P_e < P_+ < P_e$? Tout d'abord, lors du chargement jusqu'à P_+ , il se produit comme on l'a vu au § 1.2 une plastification de la barre 1. Lors d'un déchargement, de P_+ jusqu'à P_- , l'évolution redevient élastique, tout au moins au départ. Pour caractériser la réponse de la structure, nous introduisons pour représenter l'état de tension dans le treillis un système de variables P, Q par

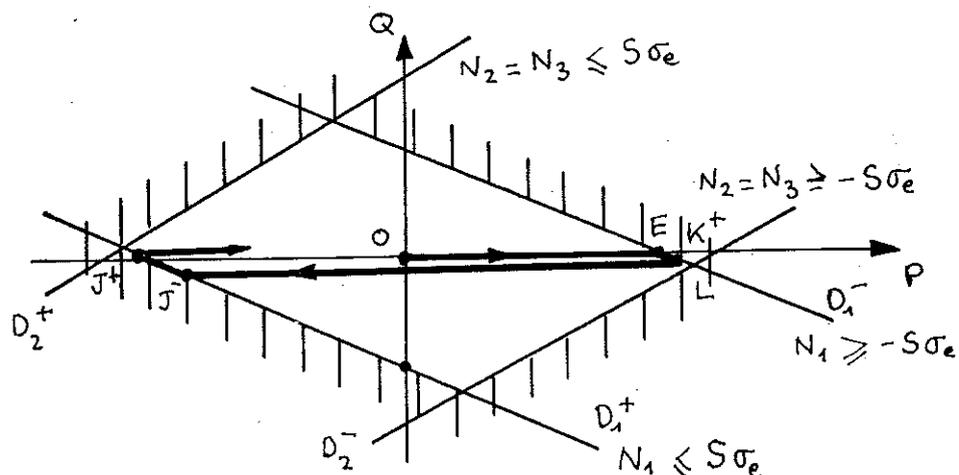
$$(45) \quad N_2 = N_3 = -\frac{3P}{4+3\sqrt{3}} + Q, \quad N_1 = -\frac{4P}{4+3\sqrt{3}} - Q\sqrt{3}$$

où P est la force appliquée et Q est une contrainte interne, nulle en élasticité par (14).

Pour que le champ soit licite, il faut que les conditions suivantes soient vérifiées

$$(46) \quad \begin{aligned} -S\sigma_e &\leq -\frac{3P}{4+3\sqrt{3}} + Q \leq S\sigma_e \\ -S\sigma_e &\leq -\frac{4P}{4+3\sqrt{3}} - Q\sqrt{3} \leq S\sigma_e \end{aligned}$$

Ces 4 inégalités définissent dans le plan P, Q un domaine quadrangulaire.

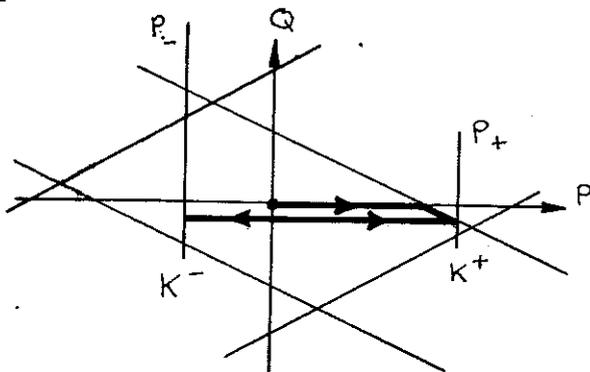


Ce domaine permet de suivre très simplement la réponse de la structure à une histoire de chargement quelconque, Partant de l'origine O (structure non char-

gée); on augmente la charge appliquée P . Au départ, l'évolution est élastique et Q reste nul, le point représentatif se déplace donc sur l'axe horizontal OE . Lorsque P atteint P_e , on arrive au point E , et la barre l entre en plasticité; on suit alors la droite D_1^- jusqu'au point L ($P = P_e$) qui correspond à la ruine de la structure. Si, sans aller jusqu'à L , on s'arrête au point K_+ ($P = P_+$) pour décharger, alors l'évolution redevient élastique et on se déplace sur l'horizontale K_+J^- jusqu'au point J^- ($P = P_+ - 2P_e$) où la barre l rentre à nouveau en plasticité. On suit alors la droite D_1^+ , et ainsi de suite.

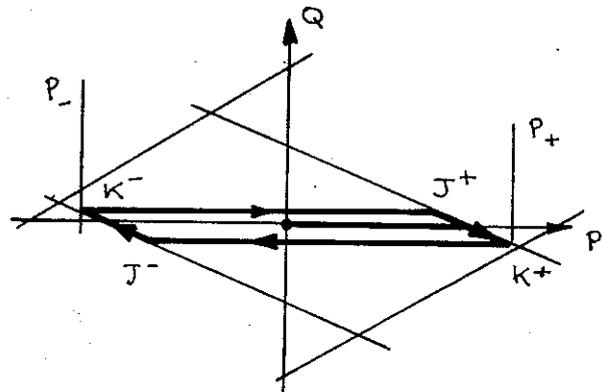
Si on revient maintenant à notre chargement oscillant entre P_- et P_+ , deux cas peuvent se produire

a) $P_+ - P_- \leq 2P_e$



Après la plastification initiale EK_+ l'évolution de la structure est purement élastique, il y a "adaptation". Cette situation est parfaitement sûre.

b) $P_+ - P_- > 2P_e$



La structure décrit toujours le cycle $K_+J^-K_-J_+$, et la barre l est soumise à des déformations plastiques alternées qui conduisent rapidement à sa rupture.

Nous n'avons fait qu'aborder, sur l'exemple simple des treillis, les principes de base du calcul plastique des structures. On trouvera en [43], [44], [45] des développements plus complets sur cet important domaine de la RDM.