

Chapitre XVI

MILIEUX CURVILIGNES ELASTIQUES

1. LOI DE COMPORTEMENT

1.1 COMPORTEMENT ELASTIQUE

Comme en MMC (voir Chapitre V), le comportement élastique se caractérise par une relation linéaire biunivoque entre les efforts intérieurs et les déformations, cād en RDM par une relation linéaire entre le torseur des efforts intérieurs et le torseur des déformations

$$(1) \quad [\mathcal{D}(\delta)] = - \mathcal{L} [\mathcal{T}(\delta)] \quad , \quad [\mathcal{T}(\delta)] = - \mathcal{L}^{-1} [\mathcal{D}(\delta)]$$

où $\mathcal{L}$ est une application linéaire de l'espace des torseurs dans lui-même et sera donc, dans un repère donné, représenté par une matrice 6x6. Nous ferons sur cette application les mêmes hypothèses qu'en MMC (voir § V.1.1)

[Hypothèse thermodynamique. L'application $\mathcal{L}$ est symétrique

$$(2) \quad [\mathcal{T}_1] \cdot \mathcal{L} [\mathcal{T}_2] = [\mathcal{T}_2] \cdot \mathcal{L} [\mathcal{T}_1]$$

[Hypothèse de stabilité. L'application $\mathcal{L}$ est définie positive

$$(3) \quad [\mathcal{T}] \cdot \mathcal{L} [\mathcal{T}] > 0$$

pour tout torseur $[\mathcal{T}]$ non nul.

Bien entendu, la loi de comportement (1) est une loi de comportement locale et l'application $\mathcal{L}$ peut éventuellement dépendre du point considéré δ . Si nous représentons les torseurs $[\mathcal{D}]$ et $[\mathcal{T}]$ par leurs éléments de réduction au point P considéré, l'application $\mathcal{L}$ sera caractérisée par 4 applications linéaires de l'espace vectoriel euclidien E dans lui-même, cād par 4 tenseurs du second ordre.

$$(4) \quad \begin{cases} -\vec{\epsilon} = A \vec{\mathcal{R}} + B \vec{\mathcal{M}} \\ -\vec{\chi} = D \vec{\mathcal{R}} + C \vec{\mathcal{M}} \end{cases} \quad \begin{cases} -\epsilon_i = A_{ij} \mathcal{R}_j + B_{ij} \mathcal{M}_j \\ -\chi_i = D_{ij} \mathcal{R}_j + C_{ij} \mathcal{M}_j \end{cases}$$

et la condition de symétrie (2) donnera

$$(5) \quad A_{ij} = A_{ji} \quad , \quad B_{ij} = D_{ji} \quad , \quad C_{ij} = C_{ji}$$

Si nous introduisons l'énergie de déformation

$$(6) \quad \begin{aligned} \bar{w}([\epsilon]) &= \frac{1}{2} [\epsilon] \cdot \mathcal{L}[\epsilon] = \frac{1}{2} (\vec{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}} + \vec{\chi} \cdot \vec{\mathcal{M}}) \\ &= \frac{1}{2} (A_{ij} \mathcal{R}_i \mathcal{R}_j + 2 B_{ij} \mathcal{R}_i \mathcal{M}_j + C_{ij} \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j) \end{aligned}$$

alors, on peut réécrire (4) sous la forme

$$(7) \quad \mathcal{E}_i = - \frac{\partial \bar{w}}{\partial \mathcal{R}_i} \quad \chi_i = - \frac{\partial \bar{w}}{\partial \mathcal{M}_i}$$

On peut également exprimer l'énergie de déformation en fonction des déformations

$$(8) \quad w([\vartheta]) = \frac{1}{2} [\vartheta] \cdot \mathcal{L}^{-1}[\vartheta] = w(\vec{\epsilon}, \vec{\chi})$$

ce qui permet d'écrire, au lieu de (7),

$$(9) \quad \mathcal{R}_i = - \frac{\partial w}{\partial \mathcal{E}_i} \quad \mathcal{M}_i = - \frac{\partial w}{\partial \chi_i}$$

On peut écrire (7) et (9) sous une forme plus condensée

$$(10) \quad [\epsilon] = - \frac{\partial w}{\partial [\vartheta]} \quad [\vartheta] = - \frac{\partial \bar{w}}{\partial [\epsilon]}$$

Ainsi, comme en MMC, l'hypothèse de symétrie (2) permet d'écrire la loi de comportement à partir de l'énergie de déformation, cette énergie de déformation étant positive, d'après l'hypothèse de stabilité (3).

Comme en MMC, on déduit de ce qui précède une interprétation énergétique du théorème des travaux virtuels. Si $[\dot{u}] = \delta[u]$ est un déplacement virtuel, alors

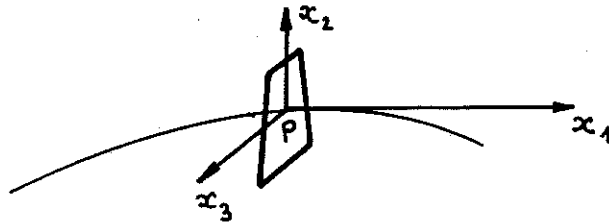
$$(11) \quad \begin{aligned} - [\mathcal{E}(s)] \cdot [\dot{\vartheta}(s)] &= \{ \mathcal{L}^{-1}[\vartheta(s)] \} \cdot \delta[\vartheta(s)] \\ &= \delta \left\{ \frac{1}{2} [\vartheta(s)] \cdot \mathcal{L}^{-1}[\vartheta(s)] \right\} = \delta w \end{aligned}$$

De sorte que le théorème des travaux virtuels (XIV.32) montre que le travail virtuel des efforts dans $\delta[u]$ est égal à l'accroissement d'énergie de déformation

$$(12) \quad \delta W = \delta W_{ext.} \quad , \quad W = \int_{A_0}^{A_1} w \, ds$$

Comme dans toute théorie élastique, le travail fourni au milieu curviligne est entièrement stocké sous forme d'énergie de déformation.

1.2 IDENTIFICATION DIRECTE DE LA LOI ELASTIQUE



Comme précédemment, nous choisissons le système d'axes local $Px_1x_2x_3$ tel que l'axe x_1 soit dirigé selon la tangente à la fibre moyenne et les axes x_2, x_3 soient dirigés dans les directions principales d'inertie de la section droite. Les composantes ϵ_1 et χ_1 sont donc les composantes normales ϵ_n et χ_n , tandis que les composantes $\epsilon_2, \epsilon_3, \chi_2$ et χ_3 sont les composantes des vecteurs $\vec{\epsilon}_T$ et $\vec{\chi}_T$. L'application $\mathcal{L}$ est alors définie par une matrice 6×6 que nous écrirons sous la forme

$$(13) \quad \begin{bmatrix} \epsilon_n \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_n \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & A_{12} & A_{13} \\ B_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & B_{23} & B_{33} \\ B_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & B_{12} & B_{13} \\ A_{12} & B_{22} & B_{32} & B_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ m_2 \\ m_3 \\ m_t \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

Les coefficients A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} dépendront du matériau constituant le milieu curviligne et de la géométrie de la section droite. En particulier, un milieu curviligne "homogène", c-à-d ayant une loi élastique $\mathcal{L}$ constante, est une poutre à section constante constituée d'un matériau homogène.

Pour déterminer les coefficients de la matrice (13), on peut envisager, comme en MMC, des expériences simples correspondant à des états d'efforts intérieurs et de déformations homogènes. En particulier, on peut envisager les expériences simples suivantes

a) Traction simple



$$(14) \quad N = P, \quad \vec{T} = 0, \quad \vec{m} = 0$$

b) Flexion simple (flexion 4 points)

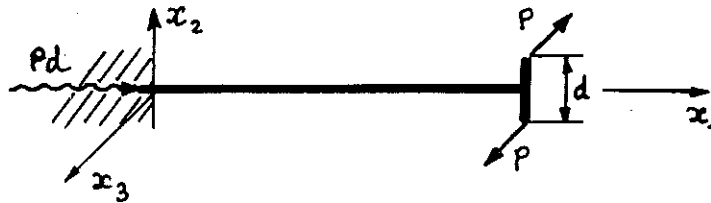


d'où entre A et B

$$(15) \quad \vec{R} = 0, \quad m_{f3} = P\alpha, \quad m_{f2} = m_t = 0$$

et un problème similaire dans la direction x_2 .

c). Torsion simple



$$(16) \quad \vec{\mathcal{E}} = 0, \quad \vec{m}_f = 0, \quad m_t = Pd$$

Ces essais pourraient nous fournir les valeurs de certains coefficients, mais les mesures de déformations seraient pratiquement très difficiles. D'autre part, pour pouvoir déterminer toute la matrice (13), il nous manque l'essai "d'effort tranchant simple"

$$N = 0, \quad \vec{T} = 0, \quad \vec{m} = 0$$

inconcevable car, d'après (XIII.18), tout effort tranchant doit s'accompagner d'un moment de flexion. De plus, il faudrait réaliser ces expériences pour toutes les formes de section droite utilisées. Cette approche expérimentale est donc pratiquement inutilisable.

Une seconde approche consiste, pour les expériences (14), (15), (16), à revenir au modèle tridimensionnel de la MMC, càd pour un milieu élastique isotrope à utiliser les résultats du problème de Saint-Venant (Chapitre VII). Ainsi, en identifiant (VII.23) et (XIV.43) on obtient pour le problème (14)

$$(17) \quad \epsilon_m = -\frac{N}{ES}, \quad \vec{\epsilon}_T = 0, \quad \vec{\chi} = 0$$

ce qui donne la première colonne de la matrice (13). De même, en identifiant (VII.31) et (XIV.45), on trouve

$$(18) \quad \vec{\epsilon} = 0, \quad \chi_3 = -\frac{m_3}{EJ_2}, \quad \chi_1 = \chi_2 = 0$$

d'où la seconde colonne de (13) et de même pour la troisième. On a donc obtenu directement

$$(19) \quad \begin{bmatrix} \epsilon_m \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_m \\ \vec{\epsilon}_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1/ES & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/EJ_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/EJ_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11} & B_{12} & B_{13} \\ 0 & 0 & 0 & B_{12} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & 0 & B_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ m_2 \\ m_3 \\ m_t \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

L'identification de (VII.76) à (XIV.46) nous donne pour le problème (16)

$$(20) \quad \chi_m = -\frac{m_t}{GI} = \alpha, \quad C_{11} = \frac{1}{GI}$$

mais, du fait du gauchissement des sections, on ne peut pas calculer ϵ_2 et ϵ_3 à partir de (VII.76), on ne peut donc pas calculer B_{12} et B_{13} . De même, on ne peut pas interpréter directement les résultats du § VII.3 et les 3 coefficients A_{22}, A_{23}, A_{33} ne sont pas calculables par cette méthode.

1.3 IDENTIFICATION ENERGETIQUE

Plutôt qu'une interprétation directe des résultats du Chapitre VII, qui pose quelques problèmes, nous préférons donc une interprétation énergétique. Partant des résultats du Chapitre VII, nous allons en effet caractériser la densité d'énergie de déformation par unité de longueur (6) à partir de la solution tridimensionnelle. En identifiant l'énergie de déformation en MMC, calculée à partir des résultats du Chapitre VII, et l'énergie de déformation en RDM, issue de (12), on va obtenir

$$(21) \quad W = \int_0^l \bar{w}([\epsilon(x_i)]) dx_i = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{\Sigma} \Lambda_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} dx_2 dx_3$$

c'est-à-dire d'après (6)

$$(22) \quad \bar{w}([\epsilon]) = \frac{1}{2} [\epsilon] \cdot \mathcal{L}[\epsilon] = \int_{\Sigma} \bar{w}(\sigma_{ij}) dx_2 dx_3$$

Or, le chapitre précédent nous a montré comment on pouvait calculer les contraintes σ_{ij} à partir du torseur des efforts intérieurs. Il suffit donc de reporter (XV.9), (XV.10) et (XV.11) dans (22) pour obtenir la matrice 6x6 représentant $\mathcal{L}$ dans la base choisie. Nous prenons l'énergie élastique sous la forme (IX.36) et on obtient

$$(23) \quad \begin{aligned} \bar{w}([\epsilon]) &= \int_{\Sigma} \left[\frac{1}{2E} \sigma_{11}^2 + \frac{1}{2G} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) \right] dx_2 dx_3 \\ &= \frac{1}{2E} \int_{\Sigma} \left(-\frac{N}{S} + \frac{M_{f3}}{J_2} x_2 - \frac{M_{f2}}{J_3} x_3 \right)^2 dx_2 dx_3 + \frac{1}{2G} \int_{\Sigma} |\vec{\tau}|^2 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

Compte-tenu des hypothèses faites sur le système d'axes $Px_1x_2x_3$, la première intégrale donne simplement

$$(24) \quad \frac{N^2}{2ES} + \frac{(M_{f3})^2}{2EJ_2} + \frac{(M_{f2})^2}{2EJ_3}$$

tandis qu'avec (11) la seconde donne

$$(25) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{2G} \int_{\Sigma} \left(\frac{M_t}{I} \vec{\Theta}^{(4)} + \frac{T_2}{S} \vec{\Theta}^{(2)} + \frac{T_3}{S} \vec{\Theta}^{(3)} \right) \cdot \left(\frac{M_t}{I} \vec{\Theta}^{(4)} + \frac{T_2}{S} \vec{\Theta}^{(2)} + \frac{T_3}{S} \vec{\Theta}^{(3)} \right) dx_2 dx_3 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ C_{11} M_t^2 + A_{22} T_2^2 + A_{33} T_3^2 + 2 A_{23} T_2 T_3 + 2 B_{12} M_t T_2 + 2 B_{13} M_t T_3 \right\} \end{aligned}$$

avec

$$(26) \quad C_{11} = \frac{1}{GI^2} \iint_{\Sigma} |\vec{\Theta}^{(1)}|^2 dx_2 dx_3$$

$$(27) \quad \begin{cases} A_{\alpha\beta} = \frac{1}{S^2} \iint_{\Sigma} \vec{\Theta}^{(\alpha)} \cdot \vec{\Theta}^{(\beta)} dx_2 dx_3 \\ B_{1\alpha} = \frac{1}{S^2} \iint_{\Sigma} \vec{\Theta}^{(1)} \cdot \vec{\Theta}^{(\alpha)} dx_2 dx_3 \end{cases}$$

Compte-tenu de (XV.8), l'expression de C_{11} peut se réécrire sous la forme

$$(28) \quad C_{11} = \frac{1}{GI^2} \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right)^2 \right] dx_2 dx_3$$

soit, en utilisant la formule de Stokes (VII.61),

$$(29) \quad \begin{aligned} C_{11} &= \frac{1}{GI^2} \left\{ \oint \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_3 - \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_2 \right) - \iint_{\Sigma} \varphi \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} \right) dx_2 dx_3 \right\} \\ &= \frac{1}{GI^2} \iint_{\Sigma} 2 \varphi dx_2 dx_3 = \frac{1}{GI} \end{aligned}$$

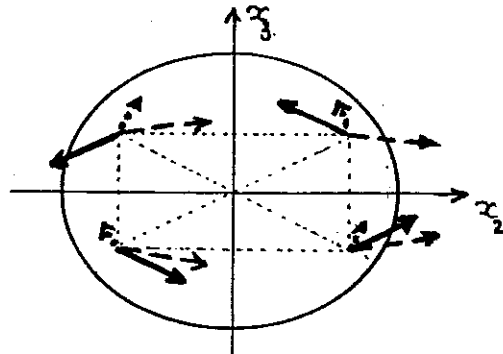
d'après (VII.64). On obtient donc

$$(30) \quad C_{11} = \frac{1}{GI}$$

Dans le cas d'un profil avec deux plans de symétrie, il résulte de la symétrie des fonctions $\vec{\Theta}^{(1)}$, $\vec{\Theta}^{(2)}$, $\vec{\Theta}^{(3)}$ (voir schéma) que

$$(31) \quad A_{23} = B_{12} = B_{13} = 0$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow & \vec{\Theta}^{(1)} \\ \dashrightarrow & \vec{\Theta}^{(2)} \\ \cdots \cdots \rightarrow & \vec{\Theta}^{(3)} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \longrightarrow \\ \dashrightarrow \\ \cdots \cdots \rightarrow \end{aligned}} \right\} \vec{T} \begin{cases} T_2 \\ T_3 \end{cases}$$



et seuls subsistent les termes A_{22} et A_{33} . Nous poserons

$$(32) \quad \begin{aligned} A_{22} &= \frac{1}{GS^2} \iint_{\Sigma} |\vec{\Theta}^{(2)}|^2 dx_2 dx_3 = \frac{1}{GS_2} \\ A_{33} &= \frac{1}{GS^2} \iint_{\Sigma} |\vec{\Theta}^{(3)}|^2 dx_2 dx_3 = \frac{1}{GS_3} \end{aligned}$$

où S_2 , S_3 , quantités homogènes à une surface, sont appelées sections réduites d'effort tranchant. Leur calcul exact exige la connaissance des fonctions $\vec{\Theta}^{(2)}$ et $\vec{\Theta}^{(3)}$, mais comme on l'a vu au chapitre précédent, on peut les remplacer par leurs approximations obtenues au § XV.3.2 ou XV.3.3. Par exemple, pour une section massive (§ XV.3.2), il vient directement à partir de (XV.53)

$$(33) \quad \frac{1}{S_2} = \frac{1}{J_2^2} \int_{-\eta_1}^{\eta_1} \frac{\mu_2^2(x_2)}{b(x_2)} dx_2$$

Un calcul direct donne alors

Section rectangulaire (XV.56)

$$(34) \quad S_2 = \frac{5}{6} S$$

Section circulaire (XV.59)

$$(35) \quad S_2 = \frac{9}{10} S$$

La section réduite d'effort tranchant est voisine de la section S .

1.4 EXPRESSION DE LA LOI ELASTIQUE

En regroupant (24) et (25), compte-tenu de (30), (31) et (32), on obtient finalement pour une section doublement symétrique

$$(36) \quad \bar{w}([\epsilon]) = \frac{1}{2} \left[\frac{N^2}{ES} + \frac{m_{f2}^2}{EJ_2} + \frac{m_{f3}^2}{EJ_3} + \frac{m_t^2}{GI} + \frac{T_2^2}{GS_2} + \frac{T_3^2}{GS_3} \right]$$

et compte-tenu de (6), on voit que la matrice 6x6 représentative de $\mathcal{L}$ est diagonale dans le système d'axes $Px_1x_2x_3$. Les résultats obtenus sont en accord avec (19), mais l'identification énergétique que nous avons utilisée nous a permis de préciser la valeur des coefficients C_{11} , $B_{1\alpha}$ et $A_{\alpha\beta}$.

Si la section n'est pas doublement symétrique, alors en général les coefficients A_{13} , B_{12} et B_{13} calculés à partir de (27) ne seront pas nuls. Néanmoins, on ne s'en préoccupe habituellement pas et on écrit encore (31) et (32), et donc finalement (36). Cette hypothèse est à nouveau justifiée par la petitesse des effets d'effort tranchant. Une exception notable est celle des profils minces pour lesquels l'analyse ébauchée au § XV.3.3 permet de prendre en compte les couplages entre torsion et effort tranchant.

Nous supposons donc, de manière générale, que la loi élastique est la suivante

$$(37) \quad \begin{bmatrix} \epsilon_m \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_m \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1/ES & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/EJ_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/EJ_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/GI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/GS_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/GS_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ m_{f2} \\ m_{f3} \\ m_t \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

Les coefficients font intervenir les caractéristiques élastiques du matériau (module d'Young E et module de Coulomb G) et les caractéristiques géométriques de la section (section S , moments d'inertie J_1 et J_3 , module de rigidité à la torsion I , sections réduites S_2, S_3).

Dans la plupart des applications, on peut négliger l'effet de l'effort tranchant, ce qui autorise à remplacer (37) par

$$(38) \quad \begin{bmatrix} \epsilon_m \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_m \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1/ES & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/EJ_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/EJ_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/GI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ m_{f2} \\ m_{f3} \\ m_t \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

Cette approximation revient donc à écrire

$$(39) \quad \vec{\epsilon}_T = 0$$

càd, d'après le Théorème 2 du § XIV.2.2, à faire l'hypothèse de Navier-Bernoulli. Cette hypothèse conduit donc à la théorie simplifiée donnée par (38) et qui sera suffisante pour la plupart des applications.

Le cas particulier de la statique des fils (§ XIV.3) correspond au cas où l'on peut négliger les coefficients EJ_3 , EJ_1 , GI , GS_2 et GS_3 pour écrire

$$(40) \quad \vec{m}_f = m_t = 0, \quad \vec{T} = 0$$

tandis que ϵ_m est proportionnel à N

$$(41) \quad N = - ES \epsilon_m$$

version de la loi de comportement (reliant la tension à l'allongement) en petites perturbations. Le cas des fils inextensibles correspond au cas où N/ES est très petit et où l'on remplace donc (41) par

$$(42) \quad \epsilon_m = 0$$

Les lois de comportement (37) ou (38) permettent donc, à partir des efforts intérieurs, de calculer les déformations puis, par intégration, de remonter aux déplacements.

- Pour un système isostatique, nous savons donc calculer les déplacements.
- Pour un système hyperstatique de degré h, on ne saura calculer les déplacements qu'en fonction des h inconnues hyperstatiques. Cependant, on verra que l'on a également h conditions cinématiques de liaison en trop, et en écrivant la compatibilité de ces conditions, on obtiendra un système permettant le calcul des inconnues hyperstatiques. C'est la première méthode permettant de lever l'hyperstaticité d'un système. Nous en verrons des exemples dans les chapitres d'application.

1.5 FORMULES DE NAVIER-BRESSE

Dans le cas plan, les relations (37) et (38) donnent naturellement

$$(43) \quad \epsilon_m = - \frac{N}{ES} \quad \chi = - \frac{\mathfrak{M}}{EJ} \quad \epsilon_T = - \frac{T}{GS_z} \text{ ou } 0$$

suivant que l'on prend en compte ou que l'on néglige les effets de l'effort tranchant. Les efforts N , T et $\mathfrak{M}$ étant connus, il suffit d'intégrer (43) pour obtenir les déplacements. Pour cela, nous partons des relations (XIV.43) qui nous donnent

$$(44) \quad \begin{cases} \epsilon_m = u' \cos \theta + v' \sin \theta = - \frac{N}{ES} \\ \epsilon_T = v' \cos \theta - u' \sin \theta - \omega = - \frac{T}{GS_z} \end{cases}$$

$$(45) \quad \chi = \omega' = - \frac{\mathfrak{M}}{EJ}$$

La relation (45) s'intègre pour donner

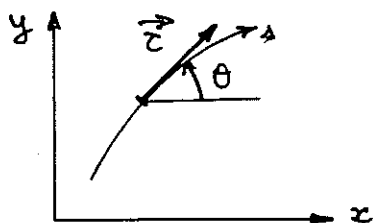
$$(46) \quad \omega = \omega_0 - \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\mathfrak{M}(\sigma)}{EJ} d\sigma$$

où $\omega_0 = \omega(\lambda_0)$ est une constante d'intégration. Nous pouvons ensuite résoudre le système linéaire (44) en u' et v' pour obtenir

$$(47) \quad \begin{cases} u' = - \frac{N}{ES} \cos \theta + \frac{T}{GS_z} \sin \theta - \omega \sin \theta \\ v' = - \frac{N}{ES} \sin \theta - \frac{T}{GS_z} \cos \theta + \omega \cos \theta \end{cases}$$

et par intégration il vient

$$(48) \quad \begin{cases} u = u_0 - \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{N}{ES} dx + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{T}{GS_z} dy - \int_{\lambda_0}^{\lambda} \omega dy \\ v = v_0 - \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{N}{ES} dy - \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{T}{GS_z} dx + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \omega dx \end{cases}$$



en remarquant que

$$\begin{cases} dx = ds \cos \theta \\ dy = ds \sin \theta \end{cases}$$

L'intégration par partie de la dernière intégrale intervenant dans u par exemple donne, en utilisant (45) et (46)

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \omega dy &= [\omega y]_{\lambda_0}^{\lambda} - \int_{\lambda_0}^{\lambda} y d\omega \\ &= \omega(\lambda) y(\lambda) - \omega_0 y_0 + \int_{\lambda_0}^{\lambda} y(\sigma) \frac{\mathfrak{M}(\sigma)}{EJ} d\sigma \end{aligned}$$

$$= \omega_0 (y - y_0) - \int_{x_0}^x \frac{m}{EJ}(\sigma) [y - y(\sigma)] d\sigma$$

On transforme de même le terme apparaissant dans v et on obtient

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = u_0 - \omega_0 (y - y_0) - \int_{x_0}^x \frac{N}{ES} dx + \int_{x_0}^x \frac{T}{GS_2} dy \\ \quad + \int_{x_0}^x \frac{m}{EJ}(\sigma) [y - y(\sigma)] d\sigma \\ v = v_0 + \omega_0 (x - x_0) - \int_{x_0}^x \frac{N}{ES} dy - \int_{x_0}^x \frac{T}{GS_2} dx \\ \quad - \int_{x_0}^x \frac{m}{EJ}(\sigma) [x - x(\sigma)] d\sigma \end{array} \right.$$

Les équations (46) et (49) sont les équations de Navier-Bresse qui permettent le calcul des déplacements d'un milieu curviligne. Ces équations sont en fait la forme intégrée de (45), (47). Dans le cas tridimensionnel, on peut également écrire des relations analogues mais plus compliquées. Si l'on néglige l'effet de l'effort tranchant, alors le terme en T disparaît de (49).

Dans le cas d'une poutre droite on a $N=0$ et $\theta=0$, le système (44), (45) donne

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} u' = 0 \quad \rightarrow \quad u = 0 \\ v' = \omega - \frac{T}{GS_2}, \quad \omega' = - \frac{m}{EJ} \end{array} \right.$$

Quant aux équations de Navier-Bresse, (46) reste inchangée tandis que (49) donne pour v

$$(51) \quad v = v_0 + \omega_0 (x - x_0) - \int_{x_0}^x \frac{T}{GS_2} d\xi - \int_{x_0}^x \frac{m}{EJ}(\xi) [x - \xi] d\xi$$

Si on néglige les effets de l'effort tranchant, (50) donne

$$v' = \omega, \quad \omega' = - \frac{m}{EJ}$$

c'est-à-dire

$$(52) \quad EJ v'' = - m$$

équation différentielle de la déformée $v(x)$.

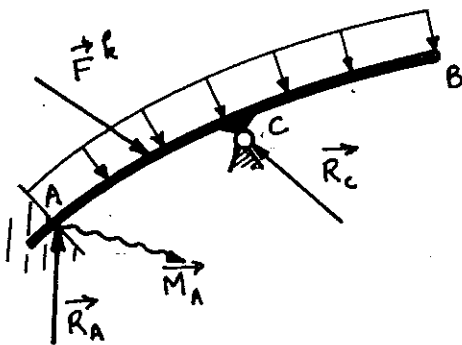
2. METHODES ENERGETIQUES

Nous envisagerons un milieu curviligne soumis à des liaisons parfaites du type de celles envisagées aux § XII.1.2 et XIV.2.2. Dans le cas des liaisons non parfaites (appuis élastiques par exemple), on peut souvent

obtenir des résultats similaires, mais il faut reprendre l'analyse au départ. Les résultats que nous allons présenter ont exactement la même structure que ceux que nous avons obtenus en élasticité tridimensionnelle au Chapitre IX. Les démonstrations sont exactement les mêmes - aux difficultés de notation près - et nous ne ferons que les esquisser. Nous insistons par contre sur les aspects spécifiques aux milieux curvilignes.

2.1 PROBLEMES DE RDM

Un problème de RDM consiste en la donnée d'un milieu curviligne, astreint à certaines liaisons aux points A_K et soumis à un chargement connu.



Par exemple, on considère la poutre AB

- encastrée en A
- appuyée en C
- libre en B

soumise à des efforts répartis et concentrés.

Pour résoudre ce problème de RDM, il faut trouver, en fonction de l'abscisse curviligne s sur la poutre

- le torseur déplacement $[\mathcal{U}(s)]$
- le torseur des efforts intérieurs $[\mathcal{T}(s)]$

ces deux champs devant vérifier

- 1) les équations d'équilibre

$$(53) \quad d[\mathcal{T}] = \begin{vmatrix} [\varphi(s)] ds \\ [\Phi^k] \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{en général} \\ \text{à travers } \Delta_k \end{array}$$

- 2) les conditions statiques de liaison; dans notre exemple

$$(54) \quad \begin{cases} \mathcal{M} \text{ continu en C} & (M_C = 0) \\ [\mathcal{T}] = 0 & \text{en B} \quad ([\psi^B] = 0) \end{cases}$$

- 3) les conditions cinématiques de liaison; dans notre exemple

$$(55) \quad \vec{u}_A = \vec{\omega}_A = 0, \quad \vec{u}_C = 0$$

- 4) la loi de comportement (37) ou (38).

Comme en élasticité tridimensionnelle, nous introduisons

Définition 1. Un champ cinématiquement admissible est un champ de torseurs déplacements $[\tilde{\mathcal{U}}(s)]$ vérifiant les conditions cinématiques de liaison 3).

Définition 2. Un champ statiquement admissible est un champ de torseurs des efforts intérieurs $[\hat{\mathcal{T}}(\Delta)]$ vérifiant les équations d'équilibre 1) et les conditions statiques de liaison 2).

Un champ statiquement admissible est donc un champ d'efforts intérieurs compatible avec les liaisons et en équilibre avec le chargement appliqué. En particulier, il faut remarquer que la donnée d'un champ statiquement admissible $[\hat{\mathcal{T}}(\Delta)]$ permet de déterminer les inconnues de liaison. Dans notre exemple en effet, les inconnues de liaison $\vec{R}_A$, $\vec{M}_A$ et $\vec{R}_C$ se calculent à partir de $[\hat{\mathcal{T}}]$ par

$$(56) \quad \begin{aligned} \hat{\vec{R}}_A &= \hat{\mathcal{R}}(\Delta_A^+) & \hat{\vec{M}}_A &= \hat{\mathcal{M}}(\Delta_A^+) \\ \hat{\vec{R}}_C &= \hat{\mathcal{R}}(\Delta_C^+) - \hat{\mathcal{R}}(\Delta_C^-) \end{aligned}$$

Comme en élasticité tridimensionnelle, toutes les démonstrations seront basées sur le résultat suivant

Lemme fondamental. Soit $[\hat{\mathcal{U}}(\Delta)]$ un champ de déplacements virtuels quelconque (non nécessairement cinématiquement admissible) et $[\hat{\mathcal{T}}(\Delta)]$ un champ statiquement admissible, alors

$$(57) \quad - \int [\hat{\mathcal{T}}(\Delta)] \cdot [\hat{\mathcal{D}}(\Delta)] d\Delta = \int [\hat{\varphi}(\Delta)] \cdot [\hat{\mathcal{U}}(\Delta)] d\Delta + \sum [\hat{\Phi}^k] \cdot [\hat{\mathcal{U}}_k] + \sum [\hat{\Psi}^k] \cdot [\hat{\mathcal{U}}_k]$$

La démonstration est strictement identique à celle donnée au § XIV.1.3 pour le théorème des travaux virtuels (XIV.30), qui s'obtient directement en prenant $[\hat{\mathcal{T}}] = [\mathcal{T}]$ dans (57).

Si nous prenons maintenant comme champ de déplacements virtuels $[\hat{\mathcal{U}}]$ un champ cinématiquement admissible $[\hat{\mathcal{U}}]$, alors, les liaisons étant parfaites, elles ne travaillent pas dans $[\hat{\mathcal{U}}]$ et (57) devient

$$(58) \quad - \int [\hat{\mathcal{T}}(\Delta)] \cdot [\hat{\mathcal{D}}(\Delta)] d\Delta = \int [\hat{\varphi}(\Delta)] \cdot [\hat{\mathcal{U}}(\Delta)] d\Delta + \sum [\hat{\Phi}^k] \cdot [\hat{\mathcal{U}}_k]$$

Remarquons aussi que nous avons toujours la même structure algébrique qu'au § IX.1.1 et que le Lemme fondamental peut encore s'écrire.

$$(59) \quad \ll \hat{\mathcal{E}}, \hat{\sigma} \gg = \langle \hat{\mathcal{U}}, \hat{\varphi} \rangle$$

qui généralise (XIV.35).

2.2 LE THEOREME DE MENABREA

Comme nous l'avons déjà annoncé, tous les théorèmes du Chapitre IX

restent valables. En particulier, nous allons nous intéresser au théorème de l'énergie complémentaire (§ IX.1.3) qui joue en RDM un rôle tout à fait central. Nous partons donc d'un CSA $[\hat{\tau}]$ et conformément à (IX.24) nous définissons son énergie complémentaire par

$$(60) \quad H(\hat{\tau}) = T_{\mu}^d(\hat{\tau}) - W(\hat{\tau})$$

où $W(\hat{\tau})$ est l'énergie de déformation

$$(61) \quad W(\hat{\tau}) = \int_{\Lambda_A}^{\Lambda_B} \hat{w}^*(\hat{\tau}) d\lambda = \frac{1}{2} \int_{\Lambda_A}^{\Lambda_B} [\hat{\tau}] \cdot \mathcal{L}[\hat{\tau}] d\lambda$$

et où $T_{\mu}^d(\hat{\tau})$ est le travail du CSA $\hat{\tau}$ dans les déplacements donnés. Mais, d'après le type de liaison envisagé, les déplacements imposés sont nuls - voir par exemple (55) ou (XIV.17-21) -. Il en résulte donc que T_{μ}^d est nul

$$(62) \quad T_{\mu}^d(\hat{\tau}) = 0$$

$$(63) \quad H(\hat{\tau}) = -W(\hat{\tau})$$

Bien entendu, on peut envisager des liaisons imposant des déplacements non nuls (dénivellation d'appuis par exemple), mais on sort alors du cadre que nous nous sommes fixés, et il faut reprandre les problèmes au départ. En général, on arrive cependant à se ramener au cadre que nous décrivons ici. Nous en donnerons quelques exemples au § XVIII.2.5 .

Le théorème de l'énergie complémentaire s'écrit alors

$$\left[\begin{array}{l} \text{Théorème de l'énergie complémentaire. Parmi tous les CSA, la solution } [\tau] \\ \text{maximise l'énergie complémentaire} \end{array} \right. \quad (64) \quad H(\tau) \geq H(\hat{\tau}) \quad \forall \hat{\tau} \text{ CSA}$$

La démonstration est identique à celle du §IX.1.3: on pose

$$(65) \quad [\hat{\tau}] = [\tau] + [\hat{\tau}^0]$$

où $[\hat{\tau}^0]$ est un champ auto-équilibré, c'ad un CSA pour le problème homogène associé. Compte-tenu de (63), il vient alors

$$(66) \quad -W(\hat{\tau}) = -W(\tau) - W(\hat{\tau}^0) - \int_{\Lambda_A}^{\Lambda_B} [\hat{\tau}^0] \cdot \mathcal{L}[\tau] d\lambda$$

mais puisque $[\tau]$ est la solution, on aura

$$(67) \quad [\mathcal{D}] = -\mathcal{L}[\tau]$$

et par application du lemme fondamental (58) au CCA $[u]$ et au CSA $[\hat{\tau}^0]$ pour le problème homogène, il vient à partir de (59)

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_A}^{\Delta_B} [\hat{\tau}^0] \cdot \mathcal{L}[\tau] \, d\Delta &= - \int_{\Delta_A}^{\Delta_B} [\hat{\tau}^0] \cdot [\mathcal{D}] \, d\Delta \\ &= \int_{\Delta_A}^{\Delta_B} [\varphi^{(0)}] \cdot [u] \, d\Delta + \sum [\Phi^{(k)}] \cdot [u_k] = 0 \end{aligned}$$

puisque le chargement associé à $\hat{\tau}^0$ est nul. L'équation (66) devient donc finalement

$$(68) \quad H(\hat{\tau}) = H(\tau) - W(\hat{\tau}^0)$$

d'où la conclusion puisque W est définie positive.

On peut exprimer ce théorème d'une façon beaucoup plus naturelle.

En effet,

a) si le système est isostatique, alors on peut calculer les efforts intérieurs à partir des seules équations de la statique. En d'autres termes, il existe un seul champ statiquement admissible qui est donc la solution; le théorème de l'énergie complémentaire est inutile.

b) si le système est hyperstatique de degré h, on peut calculer les efforts intérieurs à partir de h inconnues hyperstatiques. En d'autres termes, l'espace des CSA est un espace affine de dimension h, et les inconnues hyperstatiques définissent un paramétrage de cet espace. Compte-tenu de (63) on peut alors reformuler le théorème de l'énergie complémentaire sous sa forme traditionnelle

Théorème de Menabrea. Pour un système hyperstatique, les inconnues hyperstatiques prennent la valeur qui minimise l'énergie de déformation du système.

C'est le théorème de base de la RDM, qui permet de lever l'hyperstaticité d'un système: après avoir écrit les équations de la statique, on calcule l'énergie de déformation, et par minimisation de celle-ci on obtient la valeur des inconnues hyperstatiques.

2.3 AUTRES THEOREMES VARIATIONNELS

Tous les autres théorèmes variationnels présentés au Chapitre IX restent également valables en RDM, mais ils perdent beaucoup de leur intérêt compte-tenu de l'extrême commodité du Théorème de Menabrea. Nous allons simplement les énoncer et donner la ligne générale de leur démonstration.

Théorème d'existence et d'unicité. Pourvu qu'il existe un champ statiquement admissible, alors le problème de RDM admet une solution unique.

En effet, le théorème de Menabrea conduit au champ d'efforts intérieurs, on obtient alors les déformations par la loi de comportement, et les déplacements par intégration. L'unicité résulte de (68) et du caractère défini positif de W pour la loi de comportement (37). Pour des lois de comportement singulières (comme (38) par exemple), certaines pertes d'unicité sans conséquence peuvent se produire.

Pour un champ cinématiquement admissible $[\tilde{u}(\lambda)]$, on définit l'énergie potentielle

$$(69) \quad K(\tilde{u}) = W(\tilde{\mathcal{D}}) - T_f^d(\tilde{u})$$

où $W(\tilde{\mathcal{D}})$ est l'énergie de déformation

$$(70) \quad W(\tilde{\mathcal{D}}) = \int_{\Delta_A}^{\Delta_B} w([\tilde{\mathcal{D}}]) d\lambda = \frac{1}{2} \int_{\Delta_A}^{\Delta_B} [\tilde{\mathcal{D}}] \cdot \mathcal{L}^{-1}[\tilde{\mathcal{D}}] d\lambda$$

et où $T_f^d(\tilde{u})$ est le travail du chargement appliqué dans $[\tilde{u}]$.

$$(71) \quad T_f^d(\tilde{u}) = \int_{\Delta_A}^{\Delta_B} [\varphi] \cdot [\tilde{u}] d\lambda + \sum [\Phi^k] \cdot [\tilde{u}_k]$$

et, comme dans le cas tridimensionnel, on démontre

Théorème de l'énergie potentielle. Parmi tous les CCA, la solution $[u]$ minimise l'énergie potentielle

$$(72) \quad K(u) \leq K(\tilde{u}) \quad \forall \tilde{u} \text{ CCA}$$

Théorème de comparaison

$$(73) \quad H(\hat{\mathcal{C}}) \leq H(\mathcal{C}) = K(u) \leq K(\tilde{u})$$

Comme dans le cas tridimensionnel, l'espace des CCA est un espace de dimension infinie et, moyennant une discrétisation convenable - par exemple par éléments finis - le théorème de l'énergie potentielle permet d'obtenir numériquement des solutions approchées. Enfin, en appliquant le théorème des travaux virtuels au déplacement solution, on obtient

Théorème du travail. L'énergie de déformation est égale à la moitié du travail du chargement appliqué dans le déplacement solution

$$(74) \quad W(\mathcal{C}) = \frac{1}{2} \int_{\Delta_A}^{\Delta_B} [\mathcal{C}] \cdot [\mathcal{C}] d\lambda = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Delta_A}^{\Delta_B} [\varphi] \cdot [u] d\lambda + \sum [\Phi^k] \cdot [u_k] \right\}$$

2.4 LE THEOREME DE RECIPROCITE

Les théorèmes de l'énergie que nous avons présentés rapidement dans le cas tridimensionnel jouent un rôle très important en RDM. On verra plus loin, sur de nombreux exemples, que leur utilisation judicieuse permet d'éviter beaucoup de calculs. Pour ces deux théorèmes - théorème de réciprocité ou de Maxwell-Betti et théorème de Castigliano - on envisage une même structure soumise à deux chargements différents

chargement 1	$[\varphi^1(s)]$	$[\Phi^{k1}]$
chargement 2	$[\varphi^2(s)]$	$[\Phi^{k2}]$

Théorème de réciprocité. Le travail du chargement 1 dans le déplacement $[u^2]$, solution du problème 2 est égal au travail du chargement 2 dans le déplacement $[u^1]$ solution du problème 1

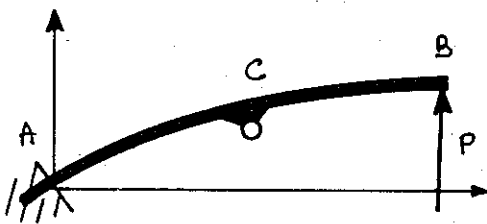
$$(75) \quad \int [\varphi^1] \cdot [u^2] ds + \sum [\Phi^{k1}] \cdot [u_k^2] = \int [\varphi^2] \cdot [u^1] ds + \sum [\Phi^{k2}] \cdot [u_k^1]$$

Dém. On applique successivement le théorème des travaux virtuels au déplacement $[u^2]$, CCA pour le problème 1, puis au déplacement $[u^1]$, CCA pour le problème 2

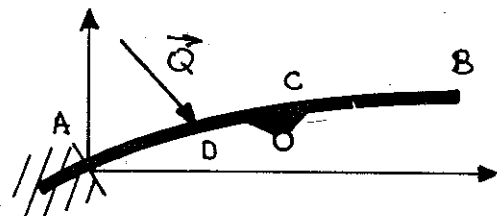
$$\begin{aligned} - \int [\tau^1] \cdot [\vartheta^2] ds &= \int [\varphi^1] \cdot [u^2] ds + \sum [\Phi^{k1}] \cdot [u_k^2] \\ - \int [\tau^2] \cdot [\vartheta^1] ds &= \int [\varphi^2] \cdot [u^1] ds + \sum [\Phi^{k2}] \cdot [u_k^1] \end{aligned}$$

et on remarque que, en vertu de la symétrie (2) de $\mathcal{L}$, on a

$$- [\tau^1] \cdot [\vartheta^2] = [\tau^1] \cdot \mathcal{L}[\tau^2] = - [\tau^2] \cdot [\vartheta^1]$$



Problème 1



Problème 2

Considérons par exemple les deux problèmes ci-dessus, et soit $[u^1]$ et $[u^2]$ les torseurs déplacements solutions de ces deux problèmes

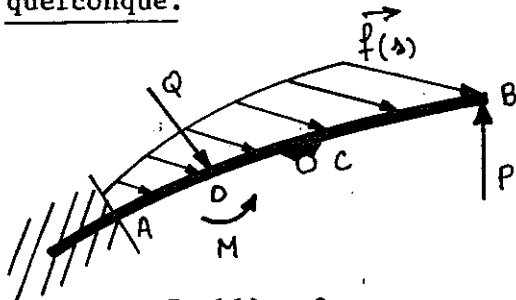
<u>Travail</u> du chargement 1 dans $[u^2]$	$P v_B^2$
---	-----------

<u>Travail</u> du chargement 2 dans $[u^1]$	$\vec{Q} \cdot \vec{u}_D^1$
---	-----------------------------

Le théorème de réciprocité donne alors

$$(76) \quad v_B^2 = \frac{1}{P} \vec{Q} \cdot \vec{u}_D^1$$

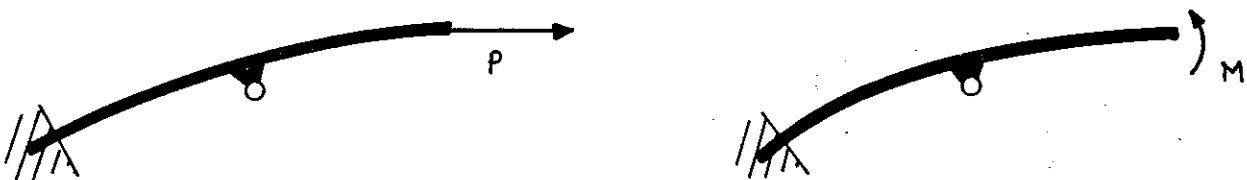
Ainsi, une fois résolu le problème 1 et connu le déplacement $[u^1]$ le long de AB, on obtient directement sans calcul supplémentaire le déplacement vertical du point B lorsque la poutre est soumise à une force concentrée quelconque, puis par superposition lorsqu'elle est soumise à un chargement quelconque.



Par exemple, pour le problème 3 ci-contre il vient

$$(77) \quad v_B^3 = \frac{1}{P} \left\{ \vec{Q} \cdot \vec{u}_D^1 + M \omega_D^1 + \int_{A_1}^{A_2} \vec{f}(s) \cdot \vec{u}^1(s) ds \right\} + v_B^1$$

De même, la résolution des deux problèmes suivants permet de déterminer le



déplacement horizontal et la rotation du point B pour un chargement quelconque.

Ce type de calcul est très commode, notamment pour la détermination des lignes d'influence, c'est-à-dire lorsqu'on recherche l'effet en un point fixe donné d'une charge mobile.

2.5 LE THEOREME DE CASTIGLIANO

Théorème de Castigliano. Soit $[\hat{\tau}^2]$ un CSA pour le problème 2. Le travail du chargement 2 dans le déplacement 1 est égal à la dérivée à l'origine de la fonction donnant l'énergie de déformation du champ $[\tau^1 + \lambda \hat{\tau}^2]$ en fonction de λ

$$(78) \quad \int [\varphi^2] \cdot [u^1] ds + \sum [\Phi^{k2}] \cdot [u_k^1] = \frac{d}{d\lambda} W(\tau^1 + \lambda \hat{\tau}^2) \Big|_{\lambda=0}$$

Dém. On développe comme dans (66)

$$(79) \quad W(\tau^1 + \lambda \hat{\tau}^2) = W(\tau^1) + \lambda \int [\tau^2] \cdot \mathcal{L}[\tau^1] ds + \lambda^2 W(\hat{\tau}^2)$$

de sorte que

$$(80) \quad \left. \frac{d}{d\lambda} W(\bar{\epsilon}^1 + \lambda \hat{\bar{\epsilon}}^2) \right|_{\lambda=0} = \int [\hat{\bar{\epsilon}}^2] \cdot \mathcal{L}[\bar{\epsilon}^1] ds$$

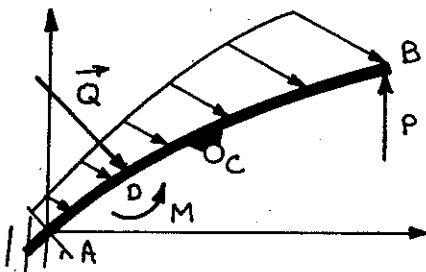
et par application du lemme fondamental à $[\hat{\bar{\epsilon}}^2]$, CSA, et $[\bar{u}^1]$ CCA pour le problème 2, il vient

$$\int [\bar{\epsilon}^1] \cdot \mathcal{L}[\bar{\epsilon}^1] ds = - \int [\bar{\epsilon}^2] \cdot [\mathcal{D}^1] ds = \int [\varphi^2] \cdot [\bar{u}^1] ds + \sum [\Phi^k] [\bar{u}_k^1]$$

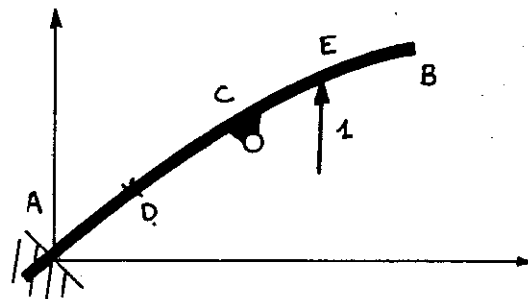
ce qui achève la démonstration.

cqfd

En prenant comme chargement 2 une force (ou un moment) concentré, ce théorème permet de calculer le déplacement (ou la rotation) en un point donné sans avoir à intégrer le champ de déplacements, intégration qui, comme on le verra dans la suite, est en général assez laborieuse.



Problème 1



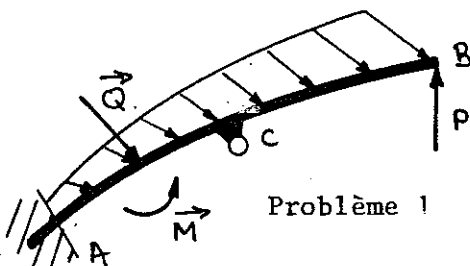
Problème 2

Par exemple, pour connaître le déplacement vertical du point E, on applique en ce point une force verticale unité fictive. Le travail du chargement 2 dans $[\bar{u}^1]$ est alors $1 \times v_E^1$ et le théorème de Castigliano donne directement

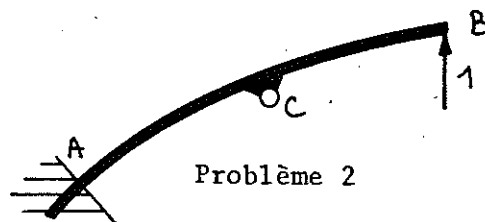
$$(81) \quad v_E^1 = \left. \frac{d}{d\lambda} W(\bar{\epsilon}^1 + \lambda \hat{\bar{\epsilon}}^2) \right|_{\lambda=0}$$

D'un point de vue pratique, on a levé l'hyperstaticité à l'aide du théorème de Menabrea, on connaît donc $[\bar{\epsilon}^1(\lambda)]$. On construit alors un champ statiquement admissible $[\hat{\bar{\epsilon}}^2]$ pour le problème 2 en écrivant les équations de la statique et, par exemple, en supposant nulles les inconnues hyperstatiques - ce qui revient à rendre le problème 2 isostatique en supprimant des liaisons.

S'il y a déjà dans le problème 1 une force appliquée au point E, alors la situation est encore plus simple. Cherchons par exemple à déterminer le déplacement vertical du point B. Il faut alors appliquer une charge unité fictive au point B

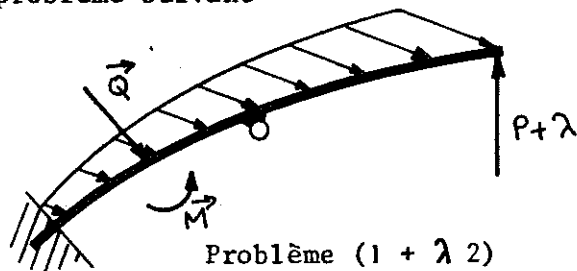


Problème 1



Problème 2

Mais, par superposition, $[\mathcal{T}^1 + \lambda \mathcal{T}^2]$ est le champ d'efforts intérieurs associé au problème suivant



Son énergie de déformation est donc

$$(82) \quad W(\mathcal{T}^1 + \lambda \mathcal{T}^2) = W(\sim, Q, M, P + \lambda)$$

si l'on note $W(\sim, Q, M, P)$ l'énergie de déformation pour le problème 1 (qui dépend bien évidemment des forces appliquées Q, M, P). L'application du théorème de Castigliano donne alors en prenant comme CSA $[\hat{\mathcal{T}}^2]$ le champ solution $[\mathcal{T}^2]$

$$(83) \quad v_B^1 = \frac{d}{d\lambda} W(\sim, Q, M, P + \lambda) \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial W}{\partial P}(\sim, Q, M, P)$$

De manière générale, on a le résultat suivant

Théorème de Castigliano. Cas particulier. Si une structure est soumise à une force (resp. un couple) concentré, alors la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à cette force (resp. ce couple) donne le déplacement (resp. la rotation) de son point d'application dans sa direction.

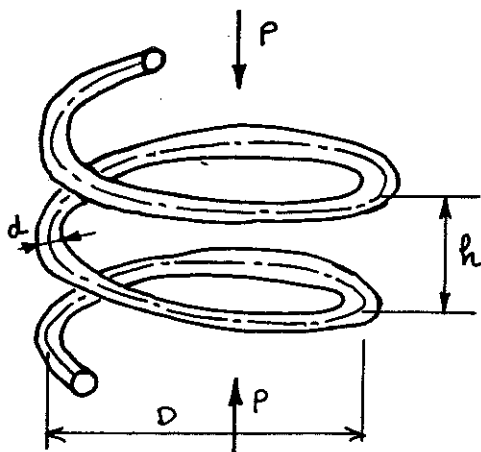
Cette variante est extrêmement commode, car à partir de l'énergie de déformation, qui a déjà été calculée pour lever l'hyperstaticité, elle permet de calculer très simplement les déplacements les plus intéressants.

3. RESSORTS HÉLICOÏDAUX

La théorie des milieux curvilignes, telle que nous venons de la présenter est tout-à-fait générale. Avant d'aborder les applications traditionnelles qui en sont des cas particuliers, nous allons traiter un exemple très simple mais complet: le calcul des ressorts hélicoïdaux.

3.1 EFFORTS INTÉRIEURS . CONTRAINTES

On considère un ressort hélicoïdal formé de n spires. On note



D : diamètre d'enroulement

h : pas de l'hélice

α : angle d'enroulement

$$\tan \alpha = \frac{h}{\pi D} \ll 1$$

d : diamètre du fil

$$d/D \ll 1$$

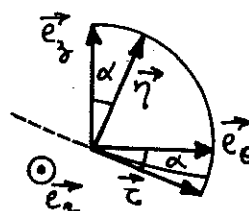
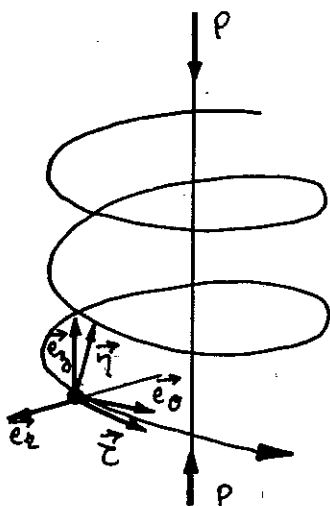
Ce ressort est soumis à une force de compression axiale P .

L'équation de la fibre moyenne est, en coordonnées cylindriques,

$$(84) \quad r = \frac{D}{2} \quad z = -\frac{D}{2} \tan \alpha \theta$$

et l'abscisse curviligne est donnée par

$$(85) \quad ds = \frac{D}{2 \cos \alpha} d\theta$$



Nous introduisons en tout point le repère $\vec{e}_x, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ des coordonnées cylindriques et le repère $\vec{\tau}, \vec{\eta}, \vec{e}_x$ lié à la section droite

$$(86) \quad \begin{bmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z \end{bmatrix}$$

Le torseur des efforts intérieurs au point M est égal au torseur des efforts appliqués sur la partie gauche, c'est-à-dire à la force P. Ses éléments de réduction au centre M de la section droite sont

$$(87) \quad \vec{Q} = -P \vec{e}_z \quad \vec{M} = -\frac{PD}{2} \vec{e}_\theta$$

soit, par projection sur le repère $\vec{\tau}, \vec{\eta}, \vec{e}_x$

$$(88) \quad \begin{aligned} \vec{Q} &= P \sin \alpha \vec{\tau} - P \cos \alpha \vec{\eta} \\ \vec{M} &= -\frac{PD}{2} \cos \alpha \vec{\tau} - \frac{PD}{2} \sin \alpha \vec{\eta} \end{aligned}$$

On en déduit les efforts intérieurs

$$(89) \quad \left\{ \begin{array}{ll} N = P \sin \alpha & \text{compression} \\ m_t = - \frac{PD}{2} \cos \alpha & \text{torsion} \\ \vec{T} = - P \cos \alpha \vec{\eta} & \text{effort tranchant} \\ \vec{m}_f = - \frac{PD}{2} \sin \alpha \vec{\eta} & \text{flexion} \end{array} \right.$$

Dans le système d'axes local $Mx_1x_2x_3$ dont les vecteurs de base sont $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, la répartition des contraintes est alors donnée par (XV.10), (XV.59) et (VII.39)

$$(90) \quad \sigma_{11} = - \frac{P \sin \alpha}{S} + \frac{PD \sin \alpha}{2J} x_3$$

$$(91) \quad \sigma_{12} = - \frac{PD \cos \alpha}{2I} x_3 + \frac{4 PD \cos \alpha}{3S} \left(1 - \frac{4 x_2^2}{d^2} \right)$$

$$\sigma_{13} = \frac{PD \cos \alpha}{2I} x_2$$

La contrainte normale maximale est atteinte au point $x_3 = -d/2$ et vaut

$$(92) \quad \sigma_{11 \max.} = \frac{16 PD \sin \alpha}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4D} \right)$$

La contrainte de cisaillement maximale est atteinte au point $x_3 = -d/2, x_2 = 0$ et vaut

$$(93) \quad \tau_{\max} = \frac{8 PD \cos \alpha}{\pi d^3} \left(1 + \frac{2d}{3D} \right)$$

ce qui permet le dimensionnement. On voit, compte-tenu des ordres de grandeur, que

$$(94) \quad \tan \alpha = \frac{h}{\pi D} \ll 1 \quad \frac{d}{D} \ll 1$$

le terme prépondérant est le terme de torsion, mais il est facile de prendre en compte les autres.

3.2 CALCUL DE LA FLECHE . RIGIDITE

Pour calculer l'enfoncement du ressort, nous allons appliquer le théorème de Castigliano. On voit sur (89) que les efforts intérieurs sont constants le long du ressort. Par application de la formule (36), on voit que la densité d'énergie de déformation $\bar{w}$ est également constante et donnée par

$$(95) \quad \bar{w} = \frac{P^2}{2} \left\{ \frac{\sin^2 \alpha}{ES} + \frac{D^2 \sin^2 \alpha}{4 EJ} + \frac{D^2 \cos^2 \alpha}{4 GI} + \frac{\cos^2 \alpha}{GS_2} \right\}$$

Pour obtenir l'énergie de déformation du ressort, il faut multiplier par sa longueur qui, pour un ressort de n spires, est donnée par $n \pi D / \cos \alpha$

$$(96) \quad W = \frac{n \pi D P^2}{2 \cos \alpha} \left[\frac{\cos^2 \alpha}{G} \left(\frac{1}{S_2} + \frac{D^2}{4I} \right) + \frac{\sin^2 \alpha}{E} \left(\frac{1}{S} + \frac{D^2}{4J} \right) \right]$$

D'après le cas particulier du théorème de Castigliano donné à la fin du § 2.5, l'enfoncement vertical du ressort f est donné par la dérivée de W par rapport à P

$$(97) \quad f = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{n \pi D P}{\cos \alpha} \left[\frac{\cos^2 \alpha}{G} \left(\frac{1}{S_2} + \frac{D^2}{4I} \right) + \frac{\sin^2 \alpha}{E} \left(\frac{1}{S} + \frac{D^2}{4J} \right) \right]$$

Compte-tenu des ordres de grandeur (94), on voit que le terme prépondérant est le terme de torsion, et la rigidité k du ressort ($P = k f$) est donnée par

$$(98) \quad \frac{1}{k} = \frac{n \pi D^3 \cos \alpha}{4 G I} \left\{ 1 + \frac{4 I}{D^2 S_2} + \frac{G \tan^2 \alpha}{E} \left(\frac{I}{J} + \frac{4 I}{D^2 S} \right) \right\}$$

Pour une section circulaire on a

$$(99) \quad I = \frac{\pi d^4}{32} \quad J = \frac{\pi d^4}{64} \quad S = \frac{\pi d^2}{4} \quad S_2 = \frac{9}{10} S = \frac{9 \pi d^2}{40}$$

On obtient alors

$$(100) \quad \frac{1}{k} = \frac{8 n D^3 \cos \alpha}{G d^4} \left[1 + \frac{5}{36} \left(\frac{d}{D} \right)^2 + \frac{2}{\pi^2} \frac{G}{E} \left(\frac{k}{D} \right)^2 + \frac{1}{2 \pi^2} \frac{G}{E} \left(\frac{k}{D} \right)^2 \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right]$$

$\uparrow$ torsion $\uparrow$ effort tranchant $\uparrow$ flexion $\uparrow$ effort normal

expression complète pour la rigidité d'un ressort hélicoïdal. Le terme prépondérant est celui dû à la torsion, mais on voit clairement sur (100) les contributions des autres efforts. En première approximation, on obtient la formule classique

$$(101) \quad k = \frac{G d^4}{8 n D^3}$$

utilisée pour le calcul des ressorts.

3.3 CALCUL DU DEPLACEMENT

Pour calculer le torseur déplacement $[U]$, il faut calculer les vecteurs $\vec{e}$ et $\vec{\chi}$, les projeter sur la base $(\vec{e}, \vec{\eta}, \vec{e}_n)$ et écrire, à partir de (89), la loi de comportement (37)

$$(102) \quad \epsilon_n = - \frac{N}{ES} = - \frac{P \sin \alpha}{ES}, \quad \vec{\epsilon}_T = - \frac{\vec{T}}{G S_2} = \frac{P \cos \alpha}{G S_2} \vec{\eta}$$

$$(103) \quad \chi_z = -\frac{m_t}{GI} = \frac{PD \cos \alpha}{2GI}, \quad \vec{\chi}_T = -\frac{\vec{m}_T}{EJ} = \frac{PD \sin \alpha}{2EJ} \vec{\eta}$$

Pour calculer $\vec{E}$ et $\vec{\chi}$, nous introduisons les composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$ en coordonnées cylindriques

$$(104) \quad \vec{u} = \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_\theta, \vec{e}_y} \quad \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \varphi \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_\theta, \vec{e}_y}$$

En coordonnées cylindriques, on a, d'après (85),

$$(105) \quad \frac{d\vec{e}_x}{ds} = \frac{2 \cos \alpha}{D} \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = \frac{2 \cos \alpha}{D} \vec{e}_\theta, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{ds} = -\frac{2 \cos \alpha}{D} \vec{e}_x$$

Ceci permet de calculer $d\vec{u}/ds$ dans le repère $\vec{e}_x, \vec{e}_\theta, \vec{e}_y$ puis, avec

(86) dans le repère $\vec{e}, \vec{\eta}, \vec{e}_x$

$$(106) \quad \frac{d\vec{u}}{ds} = \begin{vmatrix} u' - \frac{2 \cos \alpha}{D} v \\ v' + \frac{2 \cos \alpha}{D} u \\ w' \end{vmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_\theta, \vec{e}_y} = \begin{vmatrix} \left(v' + \frac{2 \cos \alpha}{D} u\right) \cos \alpha - w' \sin \alpha \\ \left(v' + \frac{2 \cos \alpha}{D} u\right) \sin \alpha + w' \cos \alpha \\ u' - \frac{2 \cos \alpha}{D} v \end{vmatrix}_{\vec{e}, \vec{\eta}, \vec{e}_x}$$

D'autre part, on a dans le repère $\vec{e}, \vec{\eta}, \vec{e}_x$

$$(107) \quad \vec{e} \wedge \vec{\omega} = \begin{vmatrix} 1 & \beta \cos \alpha - \gamma \sin \alpha \\ 0 & \beta \sin \alpha + \gamma \cos \alpha \\ 0 & \varphi \end{vmatrix}_{\vec{e}, \vec{\eta}, \vec{e}_x} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\varphi \\ \beta \sin \alpha + \gamma \cos \alpha \end{vmatrix}_{\vec{e}, \vec{\eta}, \vec{e}_x}$$

On obtient donc, d'après (XIV.37),

$$(108) \quad \vec{E} = \begin{vmatrix} \left(v' + \frac{2 \cos \alpha}{D} u\right) \cos \alpha - w' \sin \alpha \\ \left(v' + \frac{2 \cos \alpha}{D} u\right) \sin \alpha + w' \cos \alpha - \varphi \\ u' - \frac{2 \cos \alpha}{D} v + \beta \sin \alpha + \gamma \cos \alpha \end{vmatrix}_{\vec{e}, \vec{\eta}, \vec{e}_x}$$

De même, on obtient par (XIV.37)

$$(109) \quad \vec{\chi} = \frac{d\vec{\omega}}{ds} = \begin{vmatrix} \left(\beta' + \frac{2 \cos \alpha}{D} \varphi\right) \cos \alpha - \gamma' \sin \alpha \\ \left(\beta' + \frac{2 \cos \alpha}{D} \varphi\right) \sin \alpha + \gamma' \cos \alpha \\ \varphi' - \frac{2 \cos \alpha}{D} \beta \end{vmatrix}_{\vec{e}, \vec{\eta}, \vec{e}_x}$$

En écrivant les lois de comportement (102) et (103) on obtient alors

$$(110) \quad \begin{cases} \left(w' + \frac{2 \cos \alpha}{D} u \right) \cos \alpha - w' \sin \alpha = - \frac{P \sin \alpha}{ES} \\ \left(w' + \frac{2 \cos \alpha}{D} u \right) \sin \alpha + w' \cos \alpha - \varphi = \frac{P \cos \alpha}{GS_2} \\ u' - \frac{2 \cos \alpha}{D} w + \beta \sin \alpha + \gamma \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

$$(111) \quad \begin{cases} \left(\beta' + \frac{2 \cos \alpha}{D} \varphi \right) \cos \alpha - \gamma' \sin \alpha = \frac{PD \cos \alpha}{2GI} \\ \left(\beta' + \frac{2 \cos \alpha}{D} \varphi \right) \sin \alpha + \gamma' \cos \alpha = \frac{PD \sin \alpha}{2EJ} \\ \varphi' - \frac{2 \cos \alpha}{D} \beta = 0 \end{cases}$$

Les équations (111) donnent alors

$$(112) \quad \begin{cases} \varphi' - \frac{2 \cos \alpha}{D} \beta = 0 \\ \beta' + \frac{2 \cos \alpha}{D} \varphi = \frac{PD}{2} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{GI} + \frac{\sin^2 \alpha}{EJ} \right) \\ \gamma' = \frac{PD \sin \alpha \cos \alpha}{2} \left(\frac{1}{EJ} - \frac{1}{GI} \right) \end{cases}$$

Une solution particulière de ce système sera

$$(113) \quad \begin{cases} \varphi = \frac{PD^2}{4 \cos \alpha} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{GI} + \frac{\sin^2 \alpha}{EJ} \right) \\ \beta = 0 \\ \gamma = \frac{PD \sin \alpha \cos \alpha}{2} \left(\frac{1}{EJ} - \frac{1}{GI} \right) \Delta \end{cases}$$

On reporte alors dans (110) et on obtient

$$(114) \quad \begin{cases} u' - \frac{2 \cos \alpha}{D} w = - \frac{PD \sin \alpha \cos^2 \alpha}{2} \left(\frac{1}{EJ} - \frac{1}{GI} \right) \Delta \\ w' + \frac{2 \cos \alpha}{D} u = P \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{GS_2} - \frac{1}{ES} \right) \\ w' = P \left(\frac{\sin^2 \alpha}{ES} + \frac{\cos^2 \alpha}{GS_2} \right) + \frac{PD^2}{4} \left(\frac{\sin^2 \alpha}{EJ} + \frac{\cos^2 \alpha}{GI} \right) \Delta \end{cases}$$

Une solution particulière est

$$(115) \quad \begin{cases} u = P \sin \alpha \cos \alpha \left[\frac{1}{GS_2} - \frac{1}{ES} + \frac{D^2}{4} \left(\frac{1}{GI} - \frac{1}{EJ} \right) \right] \\ w = \frac{PD^2 \sin \alpha \cos \alpha}{4} \left(\frac{1}{EJ} - \frac{1}{GI} \right) \Delta \end{cases}$$

$$(116) \quad w = P \left(\frac{\sin^2 \alpha}{ES} + \frac{\cos^2 \alpha}{GS_2} + \frac{D^2 \cos^2 \alpha}{4GI} + \frac{D^2 \sin^2 \alpha}{4EJ} \right) \Delta$$

On a donc ainsi obtenu une solution particulière de (110), (111). Pour obtenir la solution générale, il suffit, d'après le Théorème 1 du § XIV.2.1, de rajouter un mouvement de solide rigide. En prenant pour Δ la longueur totale du fil, le déplacement vertical (116) redonne bien l'expression (97) de la flèche. On voit sur cet exemple la simplicité d'application du théorème de Castigliano par rapport à un calcul de déplacements. D'autre part, on voit sur (115) que l'enfoncement du ressort s'accompagne d'une dilatation transversale du ressort (composante u) et d'une rotation autour de l'axe (composante v). Néanmoins, ce sont là des petites corrections par rapport à la solution

$$(117) \quad \vec{u} = \frac{P D^2}{4 G I} \Delta \vec{e}_y, \quad \vec{\omega} = \frac{P D^2}{4 G I} \vec{e}_z$$

obtenue en prenant $\alpha = 0$ et en ne tenant compte que de la torsion.

