

Chapitre XV

CONTRAINTES . DIMENSIONNEMENT ELASTIQUE

Tout ce que nous avons fait jusqu'à présent concernait la théorie générale des milieux curvilignes et était donc valable indépendamment du comportement du matériau. Pour aller plus loin, il faut maintenant caractériser le comportement d'un milieu curviligne en fonction de ses caractéristiques mécaniques (nature et comportement du matériau) et géométriques (forme et dimension de la section droite).

Nous nous limiterons désormais au cas d'un matériau élastique. Le calcul élastique des structures recouvre en effet l'essentiel des applications, encore que le calcul plastique des structures que nous évoquerons à propos des treillis (Chapitre XVII) prenne aujourd'hui de plus en plus d'importance.

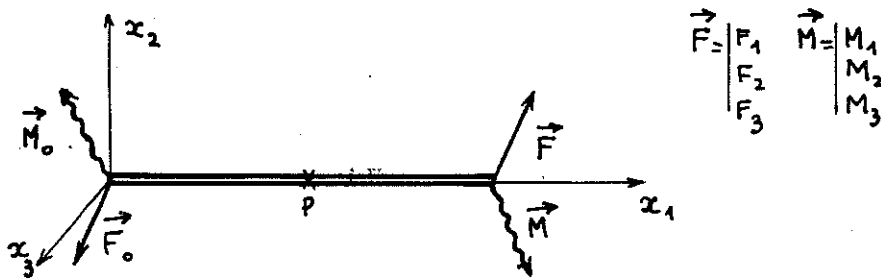
Pour caractériser le comportement d'un milieu curviligne élastique, nous devons, comme pour un milieu continu, Chapitre V, écrire une loi de comportement - c'est à dire une relation entre efforts intérieurs et déformations - et un critère de limite d'élasticité. La loi de comportement fera l'objet du Chapitre XVI, tandis que le présent chapitre est consacré au critère de limite d'élasticité, c'est à dire à la détermination des efforts maximaux supportables par une section droite et un matériau donnés. Ce critère permettra ensuite le dimensionnement élastique des structures.

1. REPARTITION DES CONTRAINTES

1.1 PROBLEME DE SAINT-VENANT

Pour pouvoir appliquer un critère d'élasticité comme ceux que nous avons introduits au § V.3, il faut pouvoir caractériser, en fonction des efforts intérieurs, la répartition des contraintes dans une section droite. Avant d'aborder le cas général, nous allons envisager le cas du problème de Saint-Venant (Chapitre VII) pour lequel nous disposons d'une solution élastique exacte.

Nous revenons donc au problème d'une poutre cylindrique chargée à ses deux extrémités par deux torseurs $[T_0]$ et $[T_1]$ donnés. On a vu au Cha-



pitre VII que l'équilibre global de la poutre permettait de calculer $\vec{F}_0$ et $\vec{M}_0$ en fonction de $\vec{F}$ et $\vec{M}$ (équations (VII.2)). Le calcul du torseur des efforts intérieurs en un point P d'abscisse x_1 donne directement, par application de la méthode A du § XIII.1.3,

$$(1) \quad \begin{aligned} \vec{Q} &= \left. \begin{aligned} -F_1 &= N \\ -F_2 &= T_2 \\ -F_3 &= T_3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{effort normal} \\ &\text{effort tranchant} \end{aligned} \\ \vec{M} &= \left. \begin{aligned} -M_1 &= m_t \\ -M_2 + (l-x_1)F_3 &= m_{f2} \\ -M_3 - (l-x_1)F_2 &= m_{f3} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{moment de torsion} \\ &\text{moment de flexion} \end{aligned} \end{aligned}$$

Au Chapitre VII, ce problème a été résolu par superposition de 6 problèmes élémentaires relatifs à chacune des trois composantes de $\vec{F}$ et de $\vec{M}$. Le tenseur des contraintes a été obtenu sous la forme suivante

$$(2) \quad Q = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec les contraintes σ_{11} , σ_{12} et σ_{13} données par

$$(3) \quad \sigma_{11} = \underbrace{\frac{F_1}{S}}_{\text{Pb 1}} - \underbrace{\frac{M_3}{J_2} x_2}_{\text{Pb 6}} + \underbrace{\frac{M_2}{J_3} x_3}_{\text{Pb 5}} - \underbrace{\frac{(l-x_1)x_2 F_3}{J_2}}_{\text{Pb 2}} - \underbrace{\frac{(l-x_1)x_3 F_2}{J_3}}_{\text{Pb 3}}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \sigma_{12} = \frac{M_1}{I} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{F_2}{J_2} \alpha(x_2, x_3) + \frac{F_3}{J_3} \gamma(x_2, x_3) \\ \sigma_{13} = -\frac{M_1}{I} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{F_2}{J_2} \beta(x_2, x_3) + \frac{F_3}{J_3} \delta(x_2, x_3) \end{cases}$$

Pb 4
Pb 2
Pb 3

où la fonction $\varphi(x_2, x_3)$ est la solution du problème de Dirichlet (VII.60), où les fonctions $\alpha(x_2, x_3)$ et $\beta(x_2, x_3)$ peuvent se calculer comme on l'a vu au § VII.3, et où les fonctions γ et δ se calculeraient de même à partir du problème 3 du Chapitre VII.

Dans (3), (4) la constante S est l'aire de la section droite, les

constantes J_2 et J_3 sont les moments d'inertie de la section droite, et la constante I est le module de rigidité à la torsion

$$(5) \quad J_2 = \iint_{\Sigma} x_2^2 dS, \quad J_3 = \iint_{\Sigma} x_3^2 dS, \quad I = 2 \iint_{\Sigma} \varphi dS$$

D'autre part, le système d'axes Ox_2, x_3 dans la section droite a été choisi pour que l'origine soit au centre de gravité de la section droite Σ et pour que les axes Ox_2 et Ox_3 soient principaux d'inertie (voir § VII.1.2).

Compte-tenu de (1), nous pouvons réécrire (3) et (4) sous la forme suivante

$$(6) \quad \sigma_{44} = -\frac{N}{S} + \frac{M_{f3}}{J_2} x_2 - \frac{M_{f2}}{J_3} x_3$$

De même, en introduisant $\vec{\tau}$, vecteur contrainte tangentielle associé à une facette de la section droite, $\vec{\tau} = (0, \sigma_{42}, \sigma_{43})$, nous pouvons réécrire (4) sous la forme

$$(7) \quad \vec{\tau} = \frac{M_t}{I} \vec{\omega}^{(4)}(x_2, x_3) + \frac{T_2}{S} \vec{\omega}^{(2)}(x_2, x_3) + \frac{T_3}{S} \vec{\omega}^{(3)}(x_2, x_3)$$

où les fonctions vectorielles $\vec{\omega}^{(2)}$, $\vec{\omega}^{(3)}$, $\vec{\omega}^{(4)}$ sont données par

$$(8) \quad \vec{\omega}^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{S}{J_2} \alpha \\ -\frac{S}{J_1} \beta \end{vmatrix} \quad \vec{\omega}^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{S}{J_3} \gamma \\ -\frac{S}{J_3} \delta \end{vmatrix} \quad \vec{\omega}^{(4)} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

càd données par la solution des problèmes 2, 3 et 4 du Chapitre VII. Les fonctions $\vec{\omega}^{(2)}$ et $\vec{\omega}^{(3)}$ sont sans dimension, tandis que $\vec{\omega}^{(4)}$ est homogène à une longueur. Ces fonctions ne dépendent que de la section droite.

1.2 L'APPROXIMATION RDM

Dans le cas général, on ne dispose pas d'une solution exacte, et dans la ligne de l'hypothèse de Saint-Venant (§ XII.1.3), nous ferons l'hypothèse suivante

[Hypothèse fondamentale. La répartition des contraintes dans une section droite ne dépend que du torseur des efforts intérieurs au point considéré (et bien sûr de la section droite).

Il reste à préciser cette dépendance en envisageant un cas particulier: le problème de Saint-Venant, pour lequel les relations (6) et (7)

nous donnent justement la répartition des contraintes en fonction du torseur de efforts intérieurs.

En d'autres termes, l'hypothèse fondamentale nous permet d'étendre les résultats du paragraphe précédent, obtenus rappelons-le pour une poutre droite de section constante chargée seulement à ses extrémités, au cas général. Cela revient donc à supposer que ces résultats restent valables, en première approximation du moins, pour une poutre droite ou courbe, de section constante ou variable, et chargée de manière quelconque.

Il s'agit là bien sûr d'une approximation, et il est facile de vérifier que le champ des contraintes ainsi construit à partir du torseur des efforts intérieurs $[\mathcal{T}(\lambda)]$ ne sera pas en général solution du problème d'élasticité tridimensionnelle. Néanmoins, cette approximation donne des résultats globalement valables et qui suffisent pour la plupart des applications, même si parfois on obtient localement d'importantes divergences. L'étude précise de la qualité de cette approximation constitue encore aujourd'hui un sujet de recherche.

Nous supposerons donc désormais que pour une poutre quelconque - droite ou courbe, plane ou gauche, à section constante ou variable - soumise à un chargement quelconque, la répartition des contraintes dans une section droite est toujours donnée par (2), (6) et (7)

$$(9) \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(10) \quad \sigma_{11} = - \frac{N}{S} + \frac{m_{p3}}{J_2} x_2 - \frac{m_{p2}}{J_3} x_3$$

$$(11) \quad \vec{e} = \frac{m_t}{I} \vec{\odot}^{(a)}(x_2, x_3) + \frac{T_2}{S} \vec{\odot}^{(a)}(x_2, x_3) + \frac{T_3}{S} \vec{\odot}^{(a)}(x_2, x_3)$$

dans le système d'axes local $Px_1x_2x_3$ introduit au § XIII.1.2, les axes x_2 , x_3 étant choisis principaux d'inertie pour la section droite considérée, et où S , I , J_2 , J_3 désignent la section et les moments d'inertie de la section droite au point considéré et peuvent donc varier le long de la poutre.

Pour un matériau élastique, les formules (9), (10), (11) nous permettent donc de remonter des efforts intérieurs $[\mathcal{T}(\lambda)]$ aux contraintes σ_{ij} dans tout le matériau. Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, le champ de contraintes ainsi obtenu n'est qu'une approximation de la solution du problème élastique réel, dont il ne vérifiera en général ni les équations

d'équilibre, ni les conditions aux limites. Néanmoins, cette approximation conduit à une évaluation convenable des contraintes maximales, et permet donc un dimensionnement correct. Ces résultats ne sont bien entendu valables que pour un matériau élastique. Un matériau élastoplastique par exemple conduit, comme on l'a vu au § X.2.1, à des répartitions de contraintes tout-à-fait différentes.

1.3 DIMENSIONNEMENT ELASTIQUE

Le principe du dimensionnement élastique découle immédiatement de ce qui précède: connaissant la répartition du torseur des efforts intérieurs le long de la poutre (c'est le résultat du problème de RDM), on en tire par (9), (10) et (11) les contraintes, et il suffit d'appliquer le critère de limite d'élasticité du § V.3.2. De manière générale, partant d'un critère de limite d'élasticité tridimensionnel (V.58), on obtiendra, pour une section droite donnée, un critère de résistance qui, de manière générale, s'écrira

$$(12) \quad f([\sigma]) = f(N, m_{f_2}, m_{f_3}, T_2, T_3, m_t) < 0$$

et délimitera dans l'espace (à 6 dimensions) des efforts intérieurs un domaine élastique admissible.

On obtiendrait ainsi la forme générale du critère de limite d'élasticité en RDM pour une section donnée. L'étude complète serait très compliquée et ne présente pas grand intérêt, et nous nous limiterons à quelques cas particuliers significatifs. D'un point de vue pratique, il faut localiser les points les plus sollicités de la section droite pour y écrire le critère de limite d'élasticité. Le cas des sollicitations simples a été envisagé au Chapitre VII.

• Traction - compression ($N \neq 0$, $\vec{M} = \vec{T} = 0$): c'est le problème 1 du Chapitre VII. On obtient

$$(13) \quad |N| < S \sigma_e$$

condition de résistance en traction - compression.

• Flexion simple ($m_{f_2} \neq 0$, $m_{f_3} = m_t = 0$, $\vec{R} = 0$): c'est le problème 6 du Chapitre VII. On obtient alors la condition (VII.36)

$$(14) \quad |m_{f_2}| < \frac{J_2}{\eta_2} \sigma_e$$

le point le plus sollicité étant le point le plus éloigné de l'axe Px_3 .

• Torsion ($m_t \neq 0$, $\vec{R} = 0$, $\vec{M}_f = 0$): c'est le problème 4 du Chapitre VII.

On obtient alors (VII.68)

$$(15) \quad |m_t| < \frac{I}{\rho} \tau_e$$

le point le plus sollicité étant celui où $|\text{grad } \varphi|$ est maximum.

Nous allons maintenant envisager quelques sollicitations composées simples et courantes.

a) Traction - torsion ($N \neq 0$, $m_t \neq 0$, $\vec{m}_f = 0$, $\vec{T} = 0$)

L'état de contraintes est donné par

$$(16) \quad \sigma_{11} = \frac{N}{S} \quad \sigma_{12} = - \frac{m_t}{I} \varphi_{,3} \quad \sigma_{13} = \frac{m_t}{I} \varphi_{,2}$$

Le critère de limite d'élasticité de von Mises écrit sous la forme (V.72) s'écrira

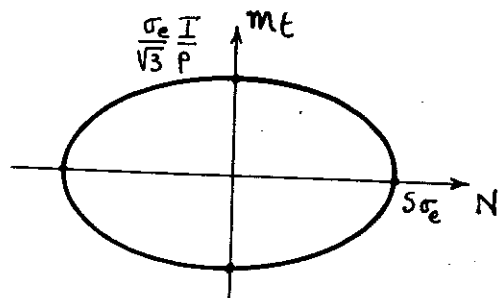
$$(17) \quad \left(\frac{N}{S}\right)^2 + 3 \left(\frac{m_t}{I}\right)^2 |\text{grad } \varphi|^2 < \sigma_e^2$$

et le point le plus sollicité sera le point où $|\text{grad } \varphi|$ est maximum, c'est le point le plus sollicité en torsion. Finalement, compte-tenu de (VII.68), le critère de limite d'élasticité s'écrira

$$(18) \quad \left(\frac{N}{S}\right)^2 + 3 \left(\frac{m_t}{I/\rho}\right)^2 < \sigma_e^2$$

forme de (12) dans ce cas particulier.

Dans le plan (N , m_t), la frontière d'élasticité est une ellipse.



b) Flexion composée ($\vec{m}_f \neq 0$, $\vec{T} \neq 0$, $N = 0$, $m_t = 0$)

Considérons par exemple le problème 2 du Chapitre VII. L'état de contraintes est donné par

$$(19) \quad \sigma_{11} = - \frac{F(l-x_1)x_2}{J} \quad \vec{\tau} = - \frac{F}{S} \vec{\Theta}^{(2)}(x_2, x_3)$$

où $\vec{\Theta}^{(2)}(x_2, x_3)$ est la fonction adimensionnelle introduite en (7) et que nous avons par exemple calculée au § VII.3.3 pour la section circulaire. Le critère de limite d'élasticité s'écrira

$$(20) \quad \left(\frac{F(l-x_1)x_2}{J}\right)^2 + 3 \left(\frac{F}{S} |\vec{\Theta}^{(2)}(x_2, x_3)|\right)^2 \leq \sigma_e^2$$

So on regarde les ordres de grandeur des deux termes, on voit que le premier terme (contribution du moment fléchissant) est d'ordre $O(F^2 l^3 / d^6)$ si d est la dimension transversale de la poutre. Le second terme (contribution de l'effort tranchant) est d'ordre $O(F^2 / d^4)$. On peut donc écrire

(20) sous la forme

- 57 -

$$(21) \quad \sigma_{11}^2 \left(1 + O\left(\frac{d^2}{l^2}\right) \right) \leq \sigma_e^2$$

et la contribution d'effort tranchant est un infinitement petit du second ordre par rapport à la contribution du moment fléchissant (puisque pour une poutre on a, par définition de l'approximation RDM, $d \ll l$). D'autre part, on voit sur le cas du cercle - et on verra en général au § 3.2 - que la contrainte de cisaillement $\vec{\sigma}^{(1)}$ s'annule là où la contrainte normale σ_{11} (prépondérante) est maximale. Il est donc tout-à-fait légitime de négliger l'effet de l'effort tranchant dans la condition de résistance, et d'écrire simplement le critère de résistance sous la forme (14). Nous verrons toutefois au § 3 que certains cas exigent quelques précautions.

2. REPARTITION DES CONTRAINTES NORMALES

2.1 TRACTION . FLEXION

Il résulte de (10) et (11) que la contrainte normale σ_{11} est engendrée par l'effort normal et le moment fléchissant, tandis que les contraintes tangentielles σ_{12} , σ_{13} proviennent de l'effort tranchant et du moment de torsion. Une sollicitation composée de traction - flexion ($N \neq 0$, $\vec{m}_f \neq 0$, $m_t = 0$, $\vec{T} = 0$) provoquera donc une contrainte purement normale donnée par

$$(22) \quad \sigma_{11} = -\frac{N}{S} + \frac{m_{f3}}{J_2} x_2 - \frac{m_{f2}}{J_3} x_3$$

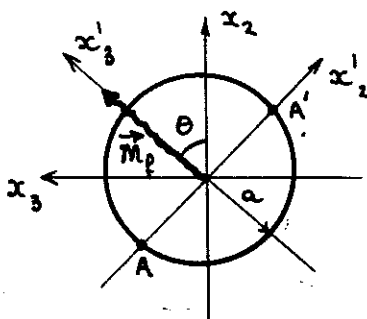
Le critère de limite d'élasticité s'écrira alors simplement

$$(23) \quad \left| -\frac{N}{S} + \frac{m_{f3}}{J_2} x_2 - \frac{m_{f2}}{J_3} x_3 \right| \leq \sigma_e$$

cette condition devant être vraie pour tout point de la section droite.

Le critère de limite d'élasticité de la RDM, cād dans l'espace N, m_{f2}, m_{f3} dépendra alors de la forme de la section droite.

a) Section circulaire



$$J_2 = J_3 = \frac{\pi a^4}{4} = J$$

Toute direction du plan de la section droite est principale d'inertie. On choisit alors un nouveau système d'axes $Ox'_2x'_3$ en choisissant l'axe Ox'_3 dans

la direction du moment fléchissant. Le critère (23) s'écrit alors

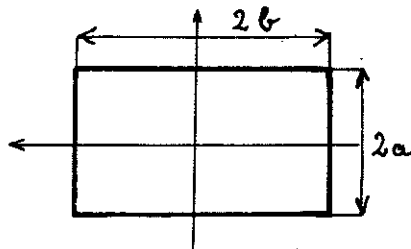
$$(24) \quad \left| -\frac{N}{S} + \frac{m_f}{J} \alpha'_2 \right| \leq \sigma_e \quad m_f = \sqrt{m_{f2}^2 + m_{f3}^2}$$

et la contrainte normale maximale sera atteinte au point A ($x'_2 = -a$) ou au point A' ($x'_2 = +a$) selon que N est positif ou négatif. Le critère de limite d'élasticité en RDM s'écrit donc

$$(25) \quad \frac{|N|}{S} + \frac{m_f}{J/a} = \frac{1}{\pi a^2} \left\{ |N| + \frac{4}{a} \sqrt{m_{f2}^2 + m_{f3}^2} \right\} \leq \sigma_e$$

Dans l'espace N, m_{f2}, m_{f3} la surface admissible (25) est limitée par deux cônes de révolution.

b) Section rectangulaire



$$J_2 = \frac{4 a^3 b}{3}$$

$$J_3 = \frac{4 a b^3}{3}$$

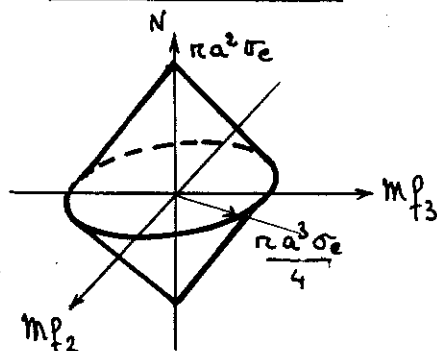
Selon le signe de N, m_{f2} et m_{f3} , la contrainte normale maximale sera

atteinte en $x_2 = \pm a$ et $x_3 = \pm b$, c'ad en l'un des 4 points A, B, C, D. Par exemple si N, m_{f2} et m_{f3} sont tous trois positifs, ce maximum sera atteint pour $x_2 = -a$ et $x_3 = b$, c'ad au point B. Le critère de limite d'élasticité s'écrit alors

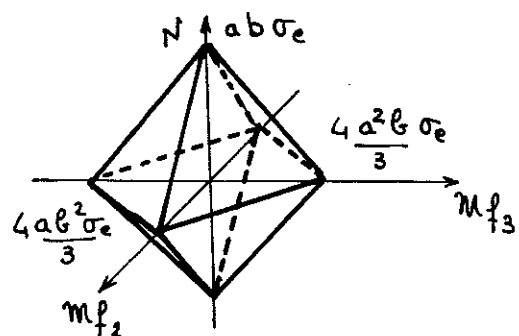
$$(26) \quad \frac{|N|}{S} + \frac{|m_{f3}|}{J_2/a} + \frac{|m_{f2}|}{J_3/b} = \frac{1}{ab} \left\{ |N| + \frac{3|m_{f3}|}{4a} + \frac{3|m_{f2}|}{4b} \right\} \leq \sigma_e$$

Dans l'espace N, m_{f2}, m_{f3} la surface admissible (26) est limitée par deux pyramides.

Section circulaire



Section rectangulaire



La surface seuil dépend donc essentiellement de la forme de la section droite. On remarque qu'elle délimite toujours un domaine élastique convexe dans l'espace des efforts intérieurs.

2.2 CAS DES STRUCTURES PLANES

Nous considérons le cas des structures planes chargées dans leur plan (§ XII.3.2 et XIII.2.2). Les efforts intérieurs ne font plus alors intervenir que 3 composantes N , T et M , et les exemples du § XIII.2.2 donnent les ordres de grandeur suivants

$$(27) \quad M = O(Fl) \quad , \quad T = O(F) \quad , \quad N = O(F)$$

en notant F l'ordre de grandeur des forces appliquées, d celui des dimensions transversales de la poutre; on a donc $d/l \ll 1$ (voir § 1.3). La répartition des contraintes est alors donnée par

$$(28) \quad \sigma_{11} = -\frac{N}{S} + \frac{M}{J} x_2 \quad \quad \quad \vec{\tau} = \frac{T}{S} \vec{\Theta}^{(2)}(x_2, x_3)$$

Le critère de limite d'élasticité de von Mises s'écrit alors

$$(29) \quad \left(\frac{M}{J} x_2 - \frac{N}{S} \right)^2 + 3 \left(\frac{T}{S} \Theta^{(2)}(x_2, x_3) \right)^2 < \sigma_e^2$$

$$\left[O\left(\frac{Fl}{d^3}\right) + O\left(\frac{F}{d^2}\right) \right]^2 + \left[O\left(\frac{F}{d^2}\right) \right]^2$$

Comme au § 1.3, le terme prépondérant provient du moment fléchissant, l'effort normal et l'effort tranchant apportant des corrections en $O(d/l)$ et $O((d/l)^2)$ respectivement. En première approximation on peut donc dimensionner en flexion pure (14), mais en seconde approximation il faut tenir compte de l'effort normal et écrire

$$(30) \quad \left| \frac{M}{J} x_2 - \frac{N}{S} \right| < \sigma_e$$

l'effort tranchant n'intervenant qu'au troisième ordre. Tout ceci n'est cependant valable que pour des sections massives: on verra au § 3.3 que pour des profils minces le dimensionnement à l'effort tranchant joue un rôle important.

Dans le cas d'une section symétrique par rapport à l'axe des x_3 la condition de résistance (30) donne simplement

$$(31) \quad \frac{|M|}{J/\eta} + \frac{|N|}{S} \leq \sigma_e$$

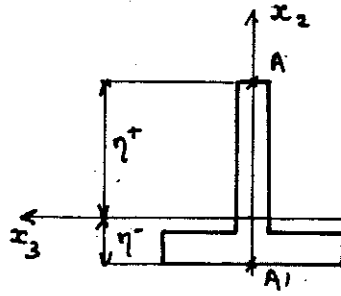
et le domaine élastique dans le plan N, M est limité par un losange.

Dans le cas d'une section non symétrique (section droite en $\perp$ par exemple), nous noterons η_+ et $-\eta_-$ les valeurs extrêmes de x_2

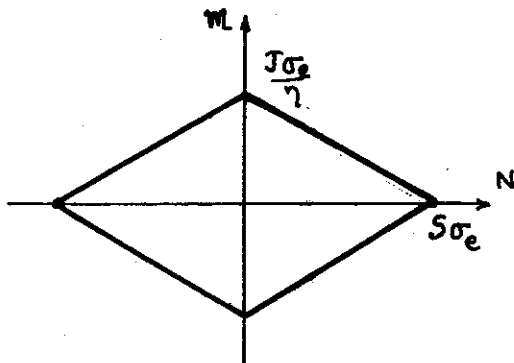
$$(32) \quad -\eta_- \leq x_2 \leq \eta_+ \quad , \quad \eta_+ > \eta_-$$

alors le domaine élastique est défini par 4 inégalités

$$(33) \quad \begin{cases} -\sigma_e \leq \frac{\eta}{J} \eta_+ - \frac{N}{S} \leq \sigma_e \\ -\sigma_e \leq \frac{\eta}{J} \eta_- - \frac{N}{S} \leq \sigma_e \end{cases}$$

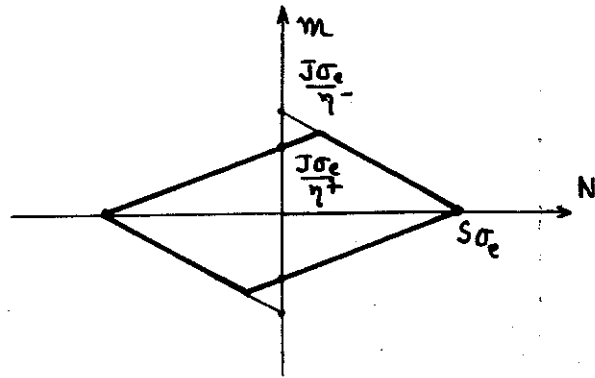


ce qui, dans le plan, correspond à un parallélogramme



Section symétrique

$$\eta_+ = \eta_-$$



Section dissymétrique

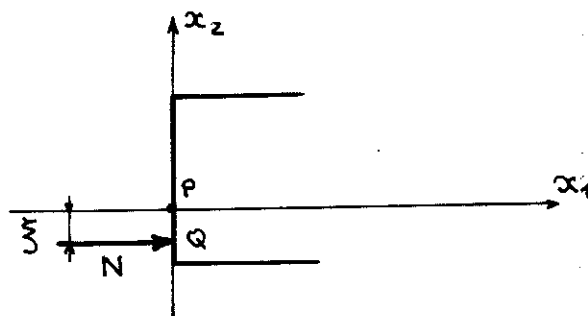
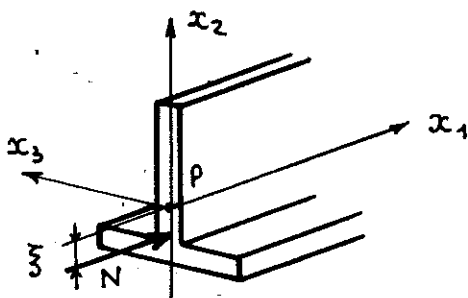
$$\eta_+ > \eta_-$$

2.3 NOTION DE NOYAU CENTRAL

Dans une poutre travaillant en sollicitation composée de traction-compression et de flexion, la contrainte normale est une fonction linéaire des coordonnées, (22). Or certain matériaux, comme la pierre ou le béton non armé, ne peuvent supporter aucune contrainte de traction, alors que leur résistance à la compression est très élevée. La condition de résistance d'une poutre s'obtient alors en écrivant que la contrainte normale σ_{11} reste partout négative

$$(34) \quad \sigma_{11} = -\frac{N}{S} + \frac{\eta_{13}}{J_1} x_3 - \frac{\eta_{12}}{J_3} x_2 \leq 0$$

Revenons par exemple au cas de la poutre plane discuté au § 2.2



Les éléments de réduction en P du torseur des efforts intérieurs sont $N\vec{e}_1$ et $\eta\vec{e}_3$. Ce torseur est donc équivalent à une force N appliquée au point Q de coordonnées $x_2 = \xi$, $x_3 = 0$ avec

$$(35) \quad \xi = - \frac{\eta}{N}$$

La condition (34) s'écrit alors, en supposant que la poutre travaille en compression, $N > 0$ (sinon il est bien clair que la condition (34) ne saurait être vérifiée)

$$(36) \quad 1 + \frac{S}{J} x_3 \xi \geq 0 \quad \forall x_3 \in [-\eta_-, \eta_+]$$

c'est-à-dire

$$(37) \quad 1 - \frac{S \eta_- \xi}{J} \geq 0, \quad 1 + \frac{S \eta_+ \xi}{J} \geq 0$$

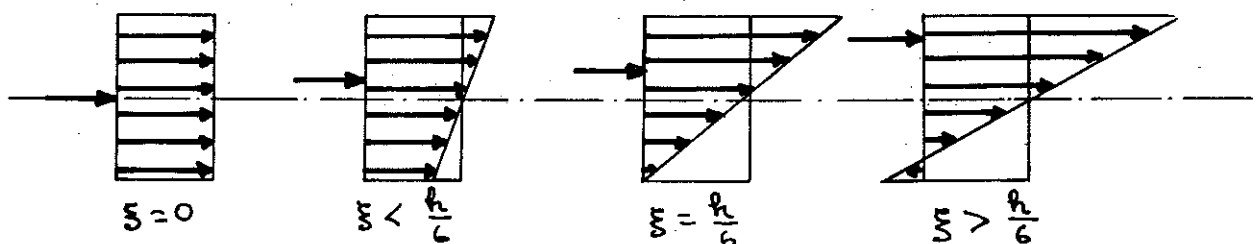
c'est-à-dire

$$(38) \quad - \frac{J}{S \eta_+} \leq \xi \leq \frac{J}{S \eta_-}$$

cette condition exprime que la force appliquée N n'est pas trop excentrée. Par exemple, pour une section rectangulaire, la condition (38) donne

$$(39) \quad - \frac{h}{6} \leq \xi \leq \frac{h}{6}$$

La force doit être appliquée dans le tiers central de la poutre

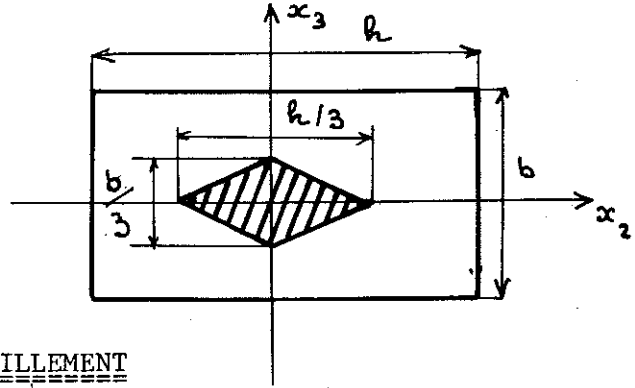


Dans le cas général (34), le torseur caractérisé par N, η_{f2}, η_{f3} est équivalent à une force N appliquée au point de coordonnées (ξ_2, ξ_3)

$$(40) \quad \xi_2 = - \frac{\eta_{f3}}{N}, \quad \xi_3 = \frac{\eta_{f2}}{N}$$

et l'inégalité (34) devant être vérifiée pour tout (x_2, x_3) , il en résulte une condition sur le point d'application de la force Q. On appelle "noyau central" de la section droite le lieu des points Q tels que la condition (34) soit vérifiée en tout point de la section, c'est-à-dire le lieu des points d'application d'une force de compression ne causant aucune contrainte de traction.

Le principe de calcul des piliers en pierre consiste à tracer la "ligne de poussée", enveloppe des forces de compression exercées sur toutes les sections droites, et à s'assurer que pour toute section droite elle est à l'intérieur du noyau central. On trouvera dans les manuels de Résistance des Matériaux des méthodes de détermination de noyau central. Par exemple, pour une section rectangulaire, le noyau central est un losange (voir par exemple [32], [33]).

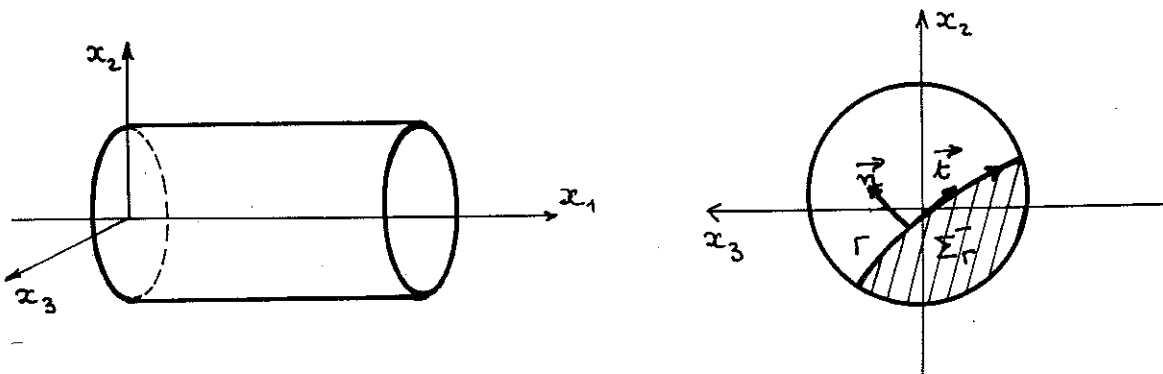


3. REPARTITION DES CONTRAINTES DE CISAILLEMENT

3.1 LE THEOREME DE LA COUPURE

La répartition des contraintes de cisaillement est donnée par (11), mais elle fait intervenir les fonctions $\bar{\omega}^{(1)}$, $\bar{\omega}^{(2)}$, $\bar{\omega}^{(3)}$ dont la détermination exige la résolution de divers problèmes de Dirichlet ce qui, sans poser de problème de principe, est souvent trop compliqué pour les applications courantes. On a donc développé, dans le cadre de l'approximation RDM, diverses théories approchées que nous allons présenter rapidement. Toutes ces théories sont basées sur une propriété remarquable de la répartition des contraintes de cisaillement: le théorème de la coupure, qui permet de relier la répartition des contraintes de cisaillement à celle des contraintes normales.

Nous revenons donc au problème de Saint-Venant en considérant une poutre cylindrique uniquement chargée à ses extrémités



Nous considérons une section droite quelconque, et nous traçons dans le plan x_2, x_3 une courbe Γ qui introduit une "coupure" de la section droite Σ . Nous notons Σ_r la partie de la section droite située en dessous de Γ .

Théorème de la coupure. On a

$$(41) \quad \int_{\Gamma} (\sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3) ds = - \iint_{\Sigma_r^-} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_2 dx_3$$

Dém. On peut donner deux démonstrations de ce théorème. La première est purement algébrique: on part de la première équation d'équilibre, qui donne en l'absence de forces de volume

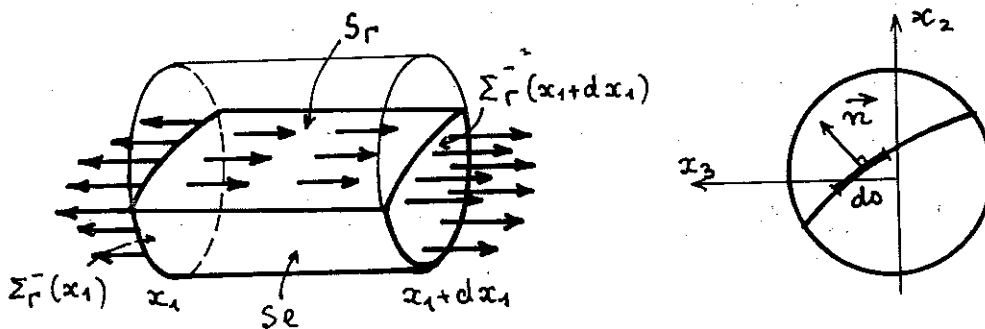
$$(42) \quad - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}$$

on intègre sur Σ_r^- et on utilise le théorème de la divergence pour écrire

$$(43) \quad - \iint_{\Sigma_r^-} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_2 dx_3 = \oint_{\partial \Sigma_r^-} (\sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3) ds$$

Mais, comme il n'y a pas de forces exercées sur la surface latérale $\partial \Sigma$, la condition (VII.55) montre que l'intégrale sur $\partial \Sigma_r^-$ ne fait intervenir que l'intégrale le long de Γ .

La seconde démonstration, plus mécanique, consiste à écrire l'équilibre d'une tranche d'épaisseur dx_1 et de section droite Σ_r^- .



Sur les deux bases $\Sigma_r^-(x_1)$ et $\Sigma_r^-(x_1+dx_1)$ s'exercent les vecteurs contraintes

$$(44) \quad \begin{array}{c} \left| \begin{array}{l} -\sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) \\ -\sigma_{12}(x_1, x_2, x_3) \\ -\sigma_{13}(x_1, x_2, x_3) \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \sigma_{11}(x_1+dx_1, x_2, x_3) \\ \sigma_{12}(x_1+dx_1, x_2, x_3) \\ \sigma_{13}(x_1+dx_1, x_2, x_3) \end{array} \right. \end{array}$$

Sur la surface latérale S_ℓ de la poutre, aucune force n'est exercée, tandis que sur la coupure S_r s'exerce le vecteur contrainte

$$(45) \quad \left| \begin{array}{l} \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

L'équation d'équilibre horizontal donne alors

$$(46) \quad 0 = \iint_{\Sigma_r^-(x_1+dx_1)} \sigma_{11} dx_2 dx_3 - \iint_{\Sigma_r^-(x_1)} \sigma_{11} dx_2 dx_3 + \iint_{S_r} (\sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3) dx_1 ds$$

c'est-à-dire

$$(47) \quad \iint_{\Sigma_r^-} [\sigma_{11}(x_1+dx_1, x_2, x_3) - \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3)] dx_2 dx_3 + dx_1 \int_r (\sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3) ds = 0$$

soit finalement (41).

cqfd

Dans le cas élastique, la contrainte normale σ_{11} est donnée, en fonction de N et M_f par (10). On a donc

$$(48) \quad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = -\frac{1}{S} \frac{dN}{dx_1} + \frac{1}{J_2} \frac{dM_{f3}}{dx_1} x_2 - \frac{1}{J_3} \frac{dM_{f2}}{dx_1} x_3$$

en utilisant le fait que la poutre est à section constante. On utilise ensuite les équations d'équilibre (XIII.17) et (XIII.18) qui donnent, avec $\vec{r} = \vec{e}_1$ et $\vec{p} = \vec{y} = 0$ (problème de Saint-Venant),

$$(49) \quad \frac{dN}{dx_1} = 0, \quad \frac{dM_{f3}}{dx_1} = -T_2, \quad \frac{dM_{f2}}{dx_1} = T_3$$

Le théorème de la coupure donne alors

$$(50) \quad \int_r (\sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3) ds = \frac{T_2}{J_2} \mu_2(r) + \frac{T_3}{J_3} \mu_3(r)$$

où $\mu_2(r)$ et $\mu_3(r)$ sont les moments statiques par rapport à x_2 et x_3 respectivement de la partie de section droite située en dessous de r

$$(51) \quad \mu_2(r) = \iint_{\Sigma_r^-} x_2 dx_2 dx_3, \quad \mu_3(r) = \iint_{\Sigma_r^-} x_3 dx_2 dx_3$$

Il faut toutefois noter que (50) n'est valable que dans le cas élastique, alors que le théorème de la coupure sous sa forme (41) est valable de manière générale.

3.2 THEORIE APPROCHEE DE L'EFFORT TRANCHANT

Comme on l'a vu aux § 1.3 et 2.1, la contrainte due à l'effort tranchant est en général petite devant celle due au moment fléchissant qui l'accompagne toujours. De manière plus générale, on verra lors des applications que l'effet de l'effort tranchant est, dans le cadre de l'approximation Résistance des Matériaux, toujours petit. Par ailleurs, sa prise en compte exige la détermination des fonctions $\vec{\Theta}^{(2)}$ et $\vec{\Theta}^{(3)}$, ce qui, comme on l'a vu au Chapitre VII, n'est pas simple. On a donc développé une théorie approchée de l'effort tranchant qui permet un calcul simple et direct de fonctions $\vec{\Theta}^{(2)}$ et $\vec{\Theta}^{(3)}$ approchées.

Considérons par exemple l'effet de l'effort tranchant dans la direction x_2 ($T_3 = 0$), c'est-à-dire la fonction $\vec{\Theta}^{(2)}$. En nous inspirant de (XIII.6) nous postulons

[Hypothèse. La contrainte de cisaillement $\vec{\Theta}^{(2)}$ due à T_2 est parallèle à l'axe x_2 et ne dépend que de x_2

$$(52) \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}(x_2), \quad \sigma_{13} = 0$$

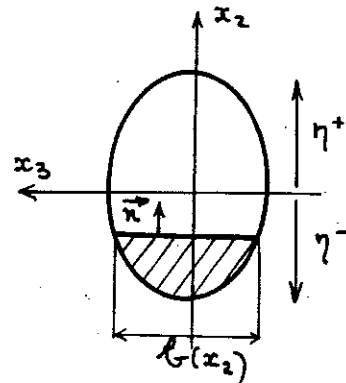
L'application du théorème de la coupure sous sa forme (50) donne alors en prenant pour Γ une droite $x_2 = Cte$

$$\int_{\Gamma} \sigma_{12} dx_1 = \frac{T_2}{J_2} \mu_2(x_2)$$

c'est-à-dire d'après (52) et en notant $b(x_2)$ la largeur de la section droite à la cote x_2 ,

$$(53) \quad \sigma_{12}(x_2) = \frac{T_2}{J_2} \frac{\mu_2(x_2)}{b(x_2)}$$

$$(54) \quad \mu_2(x_2) = \iint_{\Sigma} x_2 dx_2 dx_3 = \int_{-\eta_-}^{x_2} b(x_2) x_2 dx_2 = - \int_{x_2}^{\eta_+} b(x_2) x_2 dx_2$$



Il est clair que la répartition des contraintes de cisaillement donnée par (52), (53) n'est qu'une approximation. En particulier, le vecteur contrainte tangentielle $\vec{T} = (0, \sigma_{12}, \sigma_{13})$ étant toujours parallèle à x_2 , les conditions aux limites sur la surface latérale, qui demandent à $\vec{T}$ d'être tangent à $\partial \Sigma$ (voir (VII.66) par exemple), ne sauraient être vérifiées. Néanmoins, cette approximation est tout à fait légitime, car étant donné la petitesse des effets de l'effort tranchant, il est inutile de trop raffiner leur description. Pour la torsion par contre, cela n'est plus vrai, et il faut utiliser les résultats du Chapitre VII.

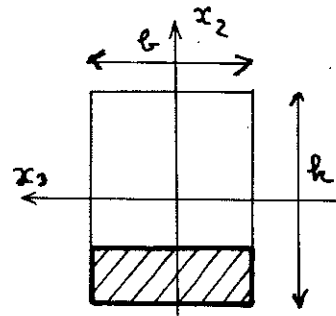
Exemple 1. Section rectangulaire

$$(55) \quad b(x_2) = b = Cte, \quad J_2 = b h$$

$$\mu_2(x_2) = -b \int_{x_2}^{h/2} y dy = -b \left(\frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2} \right)$$

On obtient donc

$$(56) \quad \sigma_{12} = \frac{T_2}{S} \Theta_2^{(2)} = -\frac{3}{2} \frac{T_2}{S} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right), \quad \sigma_{13} = \frac{T_2}{S} \Theta_3^{(2)} = 0$$



On retrouve la répartition parabolique obtenue en élasticité plane au § VIII.

2.1 - équations (VIII.45) - c'est-à-dire dans

les deux cas limites d'une section rectangulaire très large (déformations planes) ou très étroite (contraintes planes).

Exemple 2. Section circulaire

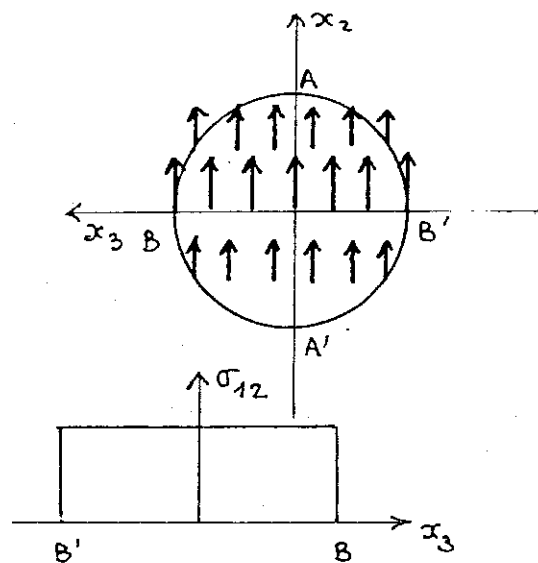
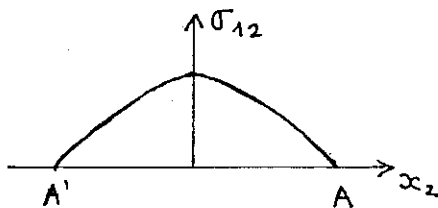
$$(57) \quad b(x_2) = 2 \sqrt{a^2 - x_2^2} = 2a \cos \theta$$

Un calcul direct donne alors

$$(58) \quad \mu(x_2) = \frac{2 a^3}{3} \cos^3 \theta$$

$$(59) \quad \sigma_{12} = \frac{4}{3} \frac{T_2}{S} \cos^2 \theta = \frac{4}{3} \frac{T_2}{S} \left(1 - \frac{x_2^2}{a^2}\right), \quad \sigma_{13} = 0$$

avec σ_{13} identiquement nul. La répartition des contraintes σ_{12} sur les diamètres AA' et BB' est représentée sur les diagrammes suivants



sur BB'
$$\sigma_{12} = \frac{4}{3} \frac{T_2}{S} = 1,33 \frac{T_2}{S}$$

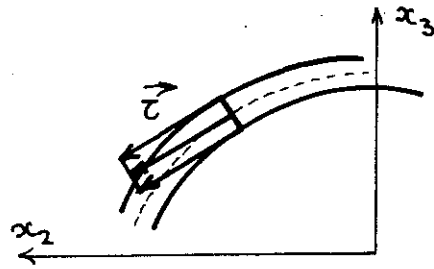
La comparaison de ces résultats avec les résultats exacts du § VII.3.3 montre la qualité de cette approximation.

3.3 SECTIONS EN PROFIL MINCE

La théorie approchée que nous venons de présenter convient pour les sections massives. Pour des sections en profil mince, la situation est tout à fait différente. Or ce type de section se rencontre très souvent dans la pratique (section en I, en L, en T, en U, tubes, etc...). La théorie du cisaillement dans les profils minces est très développée et assez lourde. On la trouvera exposée en détail dans les traités de Résistance des Matériaux, notamment [33], [38]. Nous ne ferons ici que l'esquisser.

Le point de départ consiste à remarquer que, d'après la condition

aux limites sur la surface latérale, le vecteur contrainte tangentielle $\vec{\tau}$ doit être tangent à la frontière $\partial\Sigma$ de la section droite. Pour une section en profil mince, c'est-à-dire pour une section droite d'épaisseur faible autour d'une courbe squelette, il est donc naturel de postuler

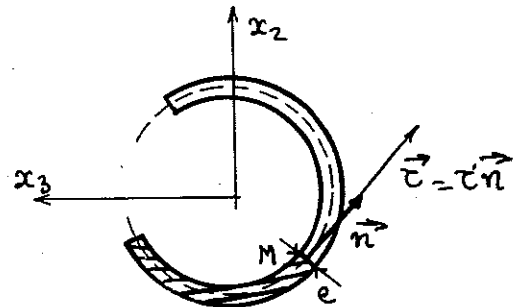


Hypothèse. Pour une section en profil mince, la contrainte de cisaillement $\vec{\tau}$ est constante dans l'épaisseur et tangent à la courbe squelette.

On utilise alors une coupure perpendiculaire au squelette, et le théorème de la coupure permet de déterminer la contrainte de cisaillement. Il faut distinguer deux cas

1. Profil ouvert

L'application du théorème de la coupure (50) donne alors directement la valeur de la contrainte de cisaillement



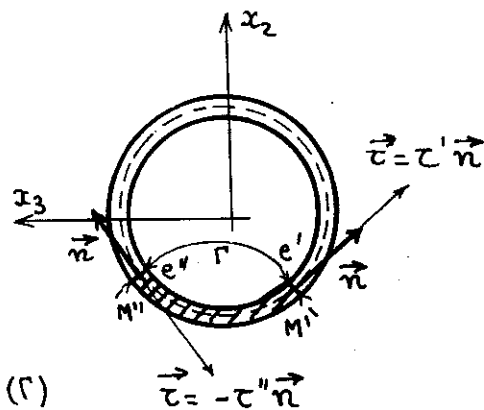
$$\int_{\Gamma} (\sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3) ds = \tau e = \frac{T_2}{J_2} \mu_2(\Gamma) + \frac{T_3}{J_3} \mu_3(\Gamma)$$

$$(60) \quad \tau = \frac{T_2}{e J_2} \mu_2(\Gamma) + \frac{T_3}{e J_3} \mu_3(\Gamma)$$

ce qui permet de calculer directement les fonctions $\vec{\Theta}^{(2)}$ et $\vec{\Theta}^{(3)}$. L'hypothèse faite plus haut permet donc de caractériser facilement l'effet de l'effort tranchant pour un profil mince ouvert. Par contre, elle exclut la torsion, qui entraîne une variation rapide de la contrainte dans l'épaisseur. La torsion des profils minces ouverts est un problème difficile.

2. Profil fermé

La coupure Γ doit maintenant couper la courbe squelette en deux points M_1 et M_2 . Le théorème de la coupure donne maintenant



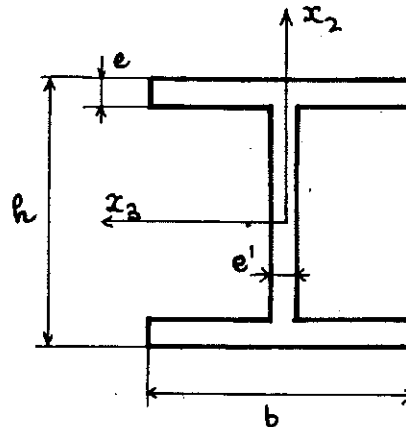
$$(61) \quad \tau' e' - \tau'' e'' = \frac{T_2}{J_2} \mu_2(\Gamma) + \frac{T_3}{J_3} \mu_3(\Gamma)$$

qui ne permet de déterminer la contrainte de cisaillement τ qu'à une constante près (en effet, si l'on connaît τ en un point quelconque, la formule (61) permet de le calculer en tout point). Cette constante sera alors dé-

terminée à partir du moment de torsion. Ainsi, pour un profil mince fermé, on peut avec l'hypothèse faite plus haut calculer à partir de l'effort tranchant et du moment de torsion la répartition des contraintes tangentielles.

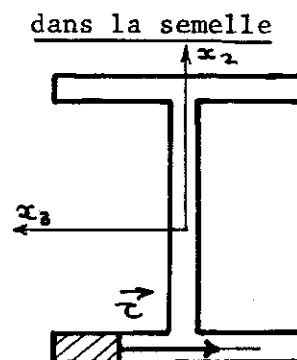
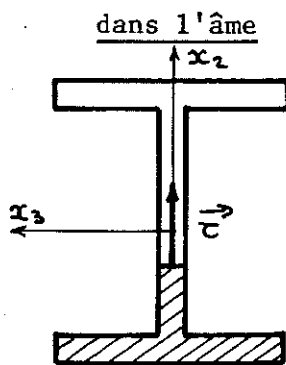
Exemple. Section en I

A titre d'application, nous allons calculer la répartition des contraintes tangentielles engendrées dans une poutre en I par un effort tranchant dirigé dans la direction x_2 ($T_3 = 0$) (cas d'une poutre droite, § XIII.2.1, ou d'une structure plane, § XIII.2.2). Nous nous limiterons à un calcul très grossier supposant e et e' très petits devant h et b . On a alors



$$(62) \quad J = J_2 \simeq \frac{b e h^3}{2}, \quad S \simeq 2 b e + h e'$$

On obtient alors directement par application de (60)



$$\begin{cases} \sigma_{12} = -\frac{T}{e'h} \left[1 + \frac{e'(h-x_2)(h+x_2)}{e b h} \right] \\ \sigma_{13} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{13} = \frac{T}{e h} \left(\frac{1}{2} - \frac{x_3}{b} \right) \end{cases}$$

Ainsi, dans la semelle, la contrainte de cisaillement est négligeable devant la contrainte de traction

$$\sigma_{11} = \frac{m_{f2}}{b e h}$$

(les ordres de grandeur sont les mêmes qu'au § 1.3). Par contre, dans l'âme, si e' est petit devant e , les contraintes de cisaillement peuvent devenir importantes. Pratiquement, c'est un calcul au cisaillement qui s'impose pour le choix de e' , c'est-à-dire pour le dimensionnement de l'âme. L'effort tran-

chant est pratiquement supporté par l'âme seule.

