

Chapitre XIV

TRAVAUX VIRTUELS - DEFORMATIONS

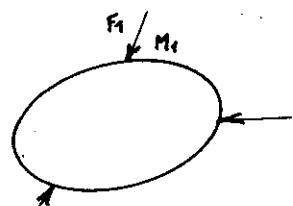
1. TRAVAUX VIRTUELS EN RDM

Après avoir caractérisé les efforts intérieurs, il nous reste à décrire les déformations d'un milieu curviligne. En MMC, nous avons construit le tenseur des déformations ε_{ij} (Chapitre III) à partir de considérations intuitives. Nous avions ensuite, en démontrant le théorème des travaux virtuels, vérifié que le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations étaient en dualité par le travail des efforts intérieurs. En RDM, la construction intuitive d'une mesure convenable des déformations est beaucoup moins évidente, et nous adopterons une démarche inverse: c'est le théorème des travaux virtuels qui nous permettra de construire une bonne mesure des déformations, et nous vérifierons ensuite que cette description est physiquement satisfaisante.

1.1 TORSEURS ET DISTRIBUTEURS

Avant d'envisager la cinématique des milieux curvilignes, il convient de revenir sur la notion de torseur. Cette notion s'introduit en mécanique du solide rigide lorsque l'on démontre que le champ de vitesse d'un solide rigide est équiprojectif, et donc que

$$(1) \quad \vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{\Omega} \wedge \vec{AM}$$



Il résulte alors que la puissance d'un système de forces (formé par exemple d'un nombre fini de forces F_1, \dots, F_m appliquées aux points M_1, \dots, M_m) est

$$(2) \quad \mathcal{P} = \sum_{i=1}^m \vec{F}^i \cdot \vec{V}_{M_i} = \sum_{i=1}^m \vec{F}^i \cdot (\vec{V}_A + \vec{\Omega} \wedge \vec{AM}^i)$$
$$\mathcal{P} = \vec{V}_A \left(\sum_{i=1}^m \vec{F}^i \right) + \vec{\Omega} \cdot \left(\sum_{i=1}^m \vec{AM}^i \wedge \vec{F}^i \right)$$

ce qui conduit à caractériser le système des efforts appliqués par son torseur $[F]$ dont les éléments de réduction en A sont sa résultante \vec{F} et son moment en A \vec{M}_A^F

$$(3) \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^m \vec{F}^i, \quad \vec{M}_A^F = \sum_{i=1}^m \vec{AM}^i \wedge \vec{F}^i$$

Les éléments de réduction de \vec{F} en un autre point B seront \vec{V}_A et $\vec{M}_B \vec{F}$ avec la formule de transport des moments

$$(4) \quad \vec{M}_B \vec{F} = \vec{M}_A \vec{F} + \vec{BA} \wedge \vec{F}$$

En comparant (1) à (4), on voit que $\vec{\Omega}$ et \vec{V}_A peuvent être considérés comme étant les éléments de réduction en A du torseur distributeur $[\mathcal{C}]$

$$(5) \quad \vec{v} = \vec{\Omega}, \quad \vec{M}_A \vec{v} = \vec{V}_A$$

[Définition. Le produit scalaire de deux torseurs $[\mathcal{F}]$ et $[\mathcal{C}]$ est défini par]

$$(6) \quad [\mathcal{F}] \cdot [\mathcal{C}] = \vec{F} \cdot \vec{M}_A \vec{C} + \vec{C} \cdot \vec{M}_A \vec{F}$$

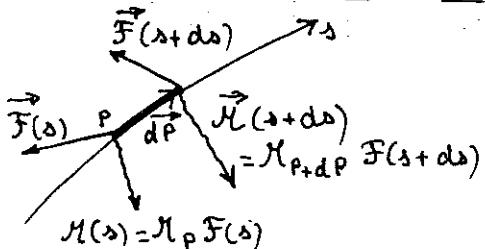
Un calcul direct montre que cette expression est indépendante du point A choisi.

Compte-tenu de (5) et (6), on voit, d'après (2), que la puissance du système d'efforts considéré dans le mouvement défini par le distributeur $[\mathcal{C}]$ est

$$(7) \quad \varphi = \vec{V}_A \cdot \vec{F} + \vec{\Omega} \cdot \vec{M}_A \vec{F} = [\mathcal{F}] \cdot [\mathcal{C}]$$

L'espace des torseurs est un espace vectoriel de dimension 6, et comme nous l'avons vu plus haut, c'est l'espace qui convient pour la description des efforts agissant sur un solide rigide. En effet, deux systèmes d'efforts ayant même torseur sont, du point de vue du solide rigide, équivalents, car ils développent la même puissance dans tout mouvement virtuel compatible avec la rigidité.

Soit maintenant un champ de torseurs défini sur un milieu curviligne,



c'est à dire un torseur $[\mathcal{F}(s)]$ défini en tout point du milieu curviligne comme par exemple le torseur des efforts intérieurs $[\mathcal{C}(s)]$ ou le torseur des efforts extérieurs répartis $[\varphi(s)]$.

On peut définir le torseur dérivée de $[\mathcal{F}]$

$$(8) \quad \left[\frac{d\mathcal{F}}{ds} \right] = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{[\mathcal{F}(s+ds)] - [\mathcal{F}(s)]}{ds}$$

Nous caractériserons maintenant le torseur $[\mathcal{F}(s)]$ par ses éléments de réduction au point P d'abscisse curviligne s

$$(9) \quad \vec{F}(s), \quad \vec{M}_P(s) = \vec{M}_P \vec{F}(s)$$

Pour calculer la dérivée, il faut considérer les éléments de réduction en un point 0 fixe

$$(10) \quad \vec{f}(s), \quad \vec{\mathcal{M}}_0 \vec{f}(s) = \vec{\mathcal{M}}(s) + \vec{OP} \wedge \vec{f}(s)$$

Les éléments de réduction en 0 du torseur dérivée seront donc, compte-tenu de (XII.7)

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{f}}{ds} = \frac{d\vec{f}}{ds} \\ \vec{\mathcal{M}}_0 \frac{d\vec{f}}{ds} = \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{ds} + \vec{OP} \wedge \frac{d\vec{f}}{ds} + \vec{\tau} \wedge \vec{f} \end{array} \right.$$

soit, en revenant au point P

$$(12) \quad \frac{d\vec{f}}{ds} = \frac{d\vec{f}}{ds}, \quad \vec{\mathcal{M}}_P \frac{d\vec{f}}{ds} = \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{ds} + \vec{\tau} \wedge \vec{f}$$

Ces formules définissent les éléments de réduction en P du torseur $[d\vec{f}/ds]$.

En particulier, on voit en comparant (12) à (XIII.17) et (XIII.18) que les équations d'équilibre du § XIII.1.4 peuvent s'écrire

$$(13) \quad \left[\frac{d\vec{\tau}}{ds} \right] = [\varphi(s)]$$

$$(14) \quad [\vec{\tau}(s_k^+)] = [\vec{\tau}(s_k^-)] + [\vec{\Phi}^k], \quad [\vec{\tau}(s_K^+)] = [\vec{\tau}(s_K^-)] + [\vec{\Psi}^K]$$

$$(15) \quad [\vec{\tau}(s_o^-)] = [\vec{\tau}(s_o^+)] = [0]$$

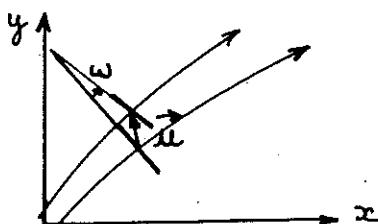
formules qui découlent d'ailleurs directement de (XIII.14).

1.2 LE TORSEUR DEPLACEMENT

Une poutre est un milieu curvilinear dans lequel chaque particule, c'dàd chaque point P de la courbe moyenne, représente en fait une section droite. Pour caractériser le déplacement de cette particule, il faudra donc se donner, non seulement le vecteur déplacement \vec{u} de P, mais aussi la rotation $\vec{\omega}$ de la section droite. Le déplacement de la particule P sera donc défini par une translation \vec{u} et une rotation $\vec{\omega}$, c'dàd par un torseur distributeur de déplacement ou torseur déplacement $[\vec{u}(s)]$, dont les éléments de réduction en P seront

$$(16) \quad \vec{u}(s) = \vec{\omega}(s); \quad \vec{\mathcal{M}}_P \vec{u}(s) = \vec{u}(s)$$

Dans le cas plan, la translation sera contenue dans le plan (x, y) tandis que la rotation ω sera perpendiculaire à ce plan. Le torseur déplacement fera donc intervenir 3 composantes u , v et ω



$$\vec{u}(s) = \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{\omega}(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega(s) \end{bmatrix}$$

Les conditions cinématiques de liaison introduites au § XII.2.2 s'expriment naturellement à partir de $[\mathcal{U}]$: dans le cas général, on aura
Encastrement (XII.11)

$$(17) \quad \vec{\mu} = 0, \quad \vec{\omega} = 0$$

Rotule sphérique (XII.13)

$$(18) \quad \vec{\mu} = 0$$

Et de même dans le cas plan

Encastrement (XII.16)

$$(19) \quad \mu = \nu = 0, \quad \omega = 0$$

Articulation (XII.17)

$$(20) \quad \mu = \nu = 0$$

Appui simple (XII.18)

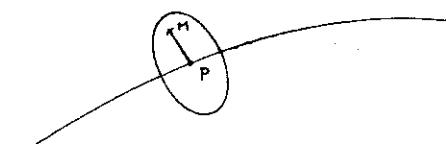
$$(21) \quad \nu = 0$$

Si au point P est appliqué un effort de torseur $[\mathfrak{F}]$, alors le travail de cet effort dans le déplacement $[\mathcal{U}]$ sera, en vertu du § I.1,

$$(22) \quad [\mathfrak{F}] \cdot [\mathcal{U}] = \vec{\mathfrak{F}} \cdot \vec{\mu}(\omega) + \vec{\mathcal{K}}_{\mathfrak{F}} \cdot \vec{\omega}(\omega)$$

ce qui est tout à fait en accord avec (XII.10), compte-tenu de l'analogie déplacement - vitesse que nous avons introduite au § III.2.3 et que nous pourrions reprendre ici.

La terminologie torseur distributeur sous-entend que le mouvement d'une section droite est un mouvement de solide rigide, et que le déplacement d'un point M de la section droite est donné par



$$(23) \quad \vec{\mu}_M = \vec{\mu}_P + \vec{\omega}_N \vec{PM} = \vec{\mu} + \vec{\omega}_N \vec{PM}$$

En fait, ce n'est pas exact: pour une poutre, nous avons vu au Chapitre VII que le déplacement d'un point de la section droite est donné par des relations beaucoup plus compliquées - voir par exemple (VII.31) ou (VII.76) -. On a même vu que si la section droite restait plane en traction ou flexion simple, elle pouvait gauchir en torsion ou flexion composée. Notre description du déplacement d'une section droite est donc grossière et ne donnera que des informations moyennes sur le déplacement réel d'une section droite. Comme nous l'avons déjà souligné, la RDM est une théorie approchée, et l'approximation que nous faisons sur les déplacements est

duale de celle que nous avons faite sur les efforts en supposant qu'ils n'intervenaient que par leur torseur. En fait, sitôt que l'on a choisi la schématisation des efforts extérieurs par leur torseur, la schématisation des déplacements était pratiquement imposée par la dualité efforts extérieurs - déplacements qui, ici, s'exprime par (22).

1.3 LE THEOREME DES TRAVAUX VIRTUELS

Pour démontrer le théorème des travaux virtuels, nous considérons une partie de poutre BC, et nous allons écrire le travail virtuel des efforts extérieurs dans un déplacement virtuel $\dot{U}(s)$ quelconque. Les efforts extérieurs appliqués à cette partie de poutre ont été décrits au § XIII.1.4. Leur travail dans le déplacement virtuel $\dot{U}(s)$ sera donc, d'après (22),

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{W}_{ext} &= [\tau(s_B)] \cdot [\dot{U}(s_B)] - [\tau(s_c)] \cdot [\dot{U}(s_c)] + \sum_k [\Phi^k] \cdot [\dot{U}(s_k)] \\ &\quad + \sum_K [\Psi^K] \cdot [\dot{U}(s_K)] + \int_{s_B}^{s_c} [\varphi(s)] \cdot [\dot{U}(s)] ds \end{aligned} \right.$$

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} &= \vec{\tau}(s_B) \cdot \vec{\dot{U}}(s_B) + \vec{\Psi}(s_B) \cdot \vec{\dot{U}}(s_B) - \vec{\tau}(s_c) \cdot \vec{\dot{U}}(s_c) \\ &\quad - \vec{\Psi}(s_c) \cdot \vec{\dot{U}}(s_c) + \sum_k (\vec{F}^k \cdot \vec{\dot{U}}(s_k) + \vec{G}^k \cdot \vec{\dot{U}}(s_k)) \\ &\quad + \sum_K (\vec{R}^K \cdot \vec{\dot{U}}(s_K) + \vec{M}^K \cdot \vec{\dot{U}}(s_K)) \\ &\quad + \int_{s_B}^{s_c} [\vec{f}(s) \cdot \vec{\dot{U}}(s) + \vec{g}(s) \cdot \vec{\dot{U}}(s)] ds \end{aligned} \right.$$

ces deux expressions étant tout à fait équivalentes. Nous travaillerons dans la suite sur la première écriture, en termes de torseurs donc, qui est plus concise, mais il serait tout aussi facile de travailler sur la seconde écriture, vectorielle.

Nous allons maintenant transformer les deux premiers termes de (24) en écrivant

$$\left\{ \begin{aligned} &[\tau(s_c)] \cdot [\dot{U}(s_c)] - [\tau(s_B)] \cdot [\dot{U}(s_B)] \\ &= \int_{s_B}^{s_c} d \{ [\tau(s)] \cdot [\dot{U}(s)] \} \\ &= \int_{s_B}^{s_c} [\dot{U}(s)] \cdot d [\tau(s)] + \int_{s_B}^{s_c} [\tau(s)] \cdot d [\dot{U}(s)] \end{aligned} \right.$$

où les intégrales sont des intégrales de Stieltjes. Nous supposons le champ de déplacements virtuels dérivable (ceci sera justifié ultérieurement) ce qui permet d'écrire

$$(27) \quad \int_{s_B}^{s_c} [\tau(s)] \cdot d [\dot{U}(s)] = \int_{s_B}^{s_c} [\tau(s)] \cdot \left[\frac{d \dot{U}}{ds} \right] ds$$

D'autre part, d'après (13) et (14), on peut écrire

$$(28) \quad \begin{aligned} d[\mathcal{T}(s)] = & \begin{cases} [\varphi(s)] ds & \text{en général} \\ [\Phi^k] & \text{au passage de } s_k \\ [\Psi^k] & \text{au passage de } s'_k \end{cases} \end{aligned}$$

de sorte que

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{s_0}^{s_c} [\mathcal{U}(s)]. d[\mathcal{T}(s)] &= \int_{s_0}^{s_c} [\varphi(s)]. [\mathcal{U}(s)] ds \\ &+ \sum_k [\Phi^k]. [\mathcal{U}(s_k)] + \sum_k [\Psi^k]. [\mathcal{U}(s'_k)] \end{aligned} \right.$$

de sorte que, en reportant (27) et (29) dans (26), puis (26) dans (24), on obtient

$$(30) \quad \mathcal{W}_{ext} = - \int_{s_0}^{s_c} [\mathcal{T}(s)]. \left[\frac{d[\mathcal{U}]}{ds} \right] ds$$

expression du théorème des travaux virtuels en RDM. Pour retrouver l'énoncé du théorème des travaux virtuels sous une forme analogue à celle que nous avons développée en MMC (§ I.2.1 et III.2.3), il faudrait

- rajouter les termes d'accélération, ce qui pose quelques problèmes que nous n'évoquerons pas dans ce cours de calcul statique des structures;
- considérer comme partie de poutre BC la poutre entière $[s_0, s_1]$. Il convient alors de prendre

$$(31) \quad s_B = s_0^-, \quad s_C = s_1^+$$

de sorte que, d'après (15), il ne subsistera plus dans (24) que les efforts extérieurs (charges et liaisons) appliqués à la poutre, et nous avons donc

Théorème des travaux virtuels. Pour tout champ de déplacements virtuels $[\mathcal{U}]$

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} & - \int_{s_0}^{s_1} [\mathcal{T}(s)]. \left[\frac{d[\mathcal{U}]}{ds} \right] ds \\ & = \int_{s_0}^{s_1} [\varphi(s)]. [\mathcal{U}(s)] ds + \sum_k [\Phi^k]. [\mathcal{U}(s_k)] + \sum_k [\Psi^k]. [\mathcal{U}(s'_k)] \end{aligned} \right.$$

On peut donc interpréter le premier membre comme étant le travail des efforts intérieurs dans le déplacement virtuel $[\mathcal{U}(s)]$, et comme en MMC (§ I.2.2 et I.2.3) on pourrait construire toute la statique des milieux curvilignes à partir de (32) pris comme "principe des travaux virtuels".

On retrouve sur (32) la structure algébrique des § III.2.2 et IX.I.1: en introduisant 4 espaces

- espace des déplacements \mathcal{U} : $\mathcal{U} = [\mathcal{U}]$
- espace des chargements \mathcal{C} : $\varphi = [\varphi], [\Phi^k], [\Psi^k]$
- espace des efforts intérieurs \mathcal{S} : $\sigma = [\mathcal{T}]$
- espace des déformations \mathcal{D} : $\varepsilon = [\mathcal{D}]$

le travail des efforts extérieurs met en dualité U et C par

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle u, \varphi \rangle = \int_{A_0}^{A_1} [\varphi(s)]. [U(s)] ds \\ \quad + \sum_k [\Phi^k]. [U(s_k)] + \sum_k [\Psi^k]. [U(s_k)] \end{array} \right.$$

et le travail des efforts intérieurs met en dualité S et D par

$$(34) \quad \langle \varepsilon, \sigma \rangle = - \int_{A_0}^{A_1} [D(s)]. [S(s)] ds, \quad [D(s)] = \left[\frac{dU}{ds} \right]$$

Le théorème des travaux virtuels (32) s'écrit alors sous la forme (III.50)

$$(35) \quad \langle \dot{\varepsilon}, \sigma \rangle = \langle \dot{u}, \varphi \rangle$$

2. DEFORMATIONS D'UN MILIEU CURVILINE

2.1 LE TORSEUR DES DEFORMATIONS

L'analyse précédente nous amène donc tout naturellement à décrire les déformations d'un milieu curviligne par le torseur des déformations

$$(36) \quad [D(s)] = \left[\frac{dU}{ds} \right]$$

ou, d'après (12), si l'on définit les éléments de réduction $\vec{\chi}$ et $\vec{\varepsilon}$ de $[D(s)]$ en P

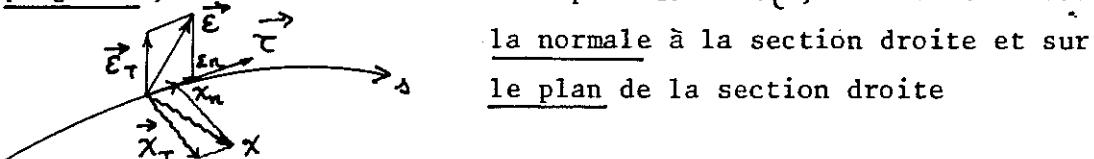
$$(37) \quad \vec{\chi} = \frac{d\vec{\omega}}{ds}, \quad \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{u}}{ds} + \vec{\tau} \wedge \vec{\omega}$$

Le travail des efforts intérieurs par unité de longueur est donné d'après (34) par

$$(38) \quad \dot{w}_{int} = - [\mathcal{T}] \cdot [D] = - \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\varepsilon} - \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{\chi}$$

de sorte que les vecteurs $\vec{\varepsilon}$ et $\vec{\chi}$ sont respectivement duals de $\vec{\mathcal{R}}$ et $\vec{\mathcal{M}}$.

Nous projetons, comme nous l'avons fait pour $\vec{\mathcal{R}}$ et $\vec{\mathcal{M}}$, ces vecteurs sur

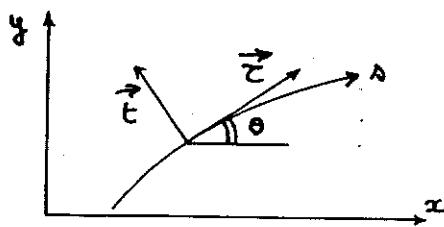


$$(39) \quad \vec{\varepsilon} = \varepsilon_m \vec{\tau} + \vec{\varepsilon}_T, \quad \vec{\chi} = \chi_m \vec{\tau} + \vec{\chi}_T$$

de sorte que

$$(40) \quad \dot{w}_{int} = - (N \varepsilon_m + \vec{\tau} \cdot \vec{\varepsilon}_T + M_t \chi_m + \vec{\mathcal{M}}_f \cdot \vec{\chi}_T)$$

Dans le cas plan, le torseur des déformations, comme le torseur des déplacements, ne fait intervenir que 3 composantes, et comme pour les



efforts intérieurs on convient de mesurer algébriquement ϵ_T en introduisant le vecteur \vec{x} à $+\frac{\pi}{2}$ de \vec{t}

$$(41) \quad \vec{\epsilon} = \epsilon_m \vec{t} + \epsilon_T \vec{x}, \quad \vec{\chi} = \chi \vec{e}_y$$

En notant d'un prime la dérivée par rapport à s, la formule (37) donne directement dans le repère x,y,z

$$(42) \quad \vec{\epsilon} = \begin{bmatrix} u' + \omega \sin \theta \\ v' - \omega \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\chi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega' \end{bmatrix}$$

et avec (41) on obtient

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_m = u' \cos \theta + v' \sin \theta \\ \epsilon_T = v' \cos \theta - u' \sin \theta - \omega \\ \chi = \omega' \end{array} \right.$$

Il reste à dégager la signification physique de ces composantes et, par la même occasion, à vérifier que ce torseur des déformations, qui a été construit de manière relativement abstraite, définit bien la déformation d'un milieu curviligne, au sens naïf du terme.

[Théorème 1. Une CNS pour que le torseur de déformation soit identiquement nul est que le déplacement soit un déplacement de corps rigide

$$(44) \quad \vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{\omega}_0 \wedge \vec{x}, \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_0$$

Dém. CS : On reporte (41) dans (37), et compte-tenu de (I.7), on trouve $\vec{\epsilon} = \vec{\chi} = 0$.

CN : Supposons $\vec{\epsilon} = \vec{\chi} = 0$; on intègre alors (37) pour obtenir

$$\frac{d\vec{\omega}}{ds} = \vec{\chi} = 0 \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}_0$$

$$\frac{d\vec{u}}{ds} = \vec{\epsilon} - \vec{t} \wedge \vec{\omega} = - \frac{d\vec{x}}{ds} \wedge \vec{\omega}_0 = \frac{d}{ds} (\vec{\omega}_0 \wedge \vec{x})$$

d'où (44) par intégration.

cqfd

Ce théorème est analogue au théorème 2 du § III.3.1. C'est la moindre des choses à imposer à une mesure des déformations. Remarquons ici que le problème de compatibilité des déformations ne se pose pas en RDM: quel que soit le champ de déformations ($\vec{\epsilon}(s)$, $\vec{\chi}(s)$), on peut toujours intégrer (37) pour en déduire un champ de déplacements.

2.2 INTERPRETATION PHYSIQUE

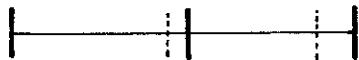
Pour dégager la signification physique des composantes ϵ_m , $\vec{\epsilon}_T$, χ_m , $\vec{\chi}_T$, nous allons considérer une poutre droite orientée dans la direction x_1 ($\vec{\tau} = \vec{e}_1$, $s = x_1$) et décrire les déformations correspondant à chacune de ces composantes supposées constantes.

a) Composante ϵ_m

$$(45) \quad \vec{\epsilon} = (\epsilon_0, 0, 0), \quad \vec{\chi} = 0$$

On trouve alors, par intégration de (37), et à un déplacement de solide (44) près

$$(46) \quad \vec{u} = (\epsilon_0 x_1, 0, 0), \quad \vec{\omega} = 0$$



On retrouve la déformation obtenue au Chapitre VII pour le problème de traction (VII.23) avec $\epsilon_0 = F/ES$. Bien entendu, on ne décrit ainsi que le déplacement d'ensemble de la section droite, et on perd la contraction transversale; c'est l'approximation RDM.

b) Composante $\vec{\chi}_T$

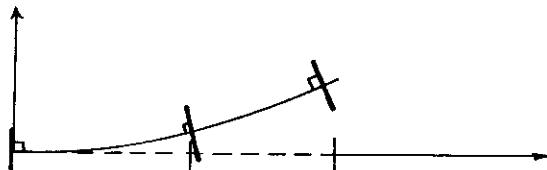
$$(47) \quad \vec{\epsilon} = 0, \quad \vec{\chi} = (0, 0, \chi_0)$$

L'intégration de (37) donne alors directement

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \chi_0 x_1 \end{bmatrix}, \quad \frac{d\vec{u}}{dx_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \chi_0 x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \chi_0 x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

soit finalement

$$(48) \quad \vec{u} = (0, \frac{1}{2} \chi_0 x_1^2, 0), \quad \vec{\omega} = (0, 0, \chi_0 x_1)$$



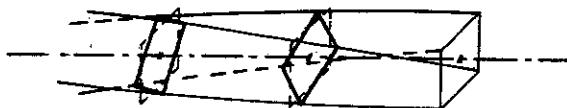
On retrouve la déformation obtenue en flexion simple (VII.31) avec $\chi_0 = M/EJ$, toujours en se limitant au mouvement d'ensemble de la section droite. En particulier, on vérifie que la section droite reste normale à la fibre moyenne; l'hypothèse de Navier-Bernoulli (§ XII.1.3) est vérifiée.

c) Composante χ_m

$$(49) \quad \vec{\epsilon} = 0, \quad \vec{\chi} = (\chi_0, 0, 0)$$

L'intégration de (37) donne directement

$$(50) \quad \vec{u} = 0, \quad \vec{\omega} = (\chi_0 x_1, 0, 0)$$



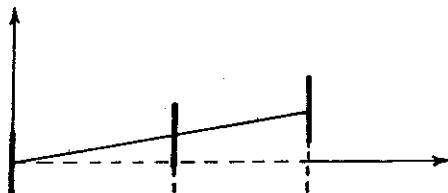
On retrouve, au gauchissement $\psi(x_2, x_3)$ près, la déformation obtenue en torsion (VII.76) avec $\chi_0 = \alpha = M/GI$. On constate cependant que l'approximation RDM ignore le gauchissement de la section. A ceci près, on peut encore vérifier l'hypothèse de Navier-Bernoulli: la section droite reste normale à la fibre moyenne.

d) Composante $\vec{\epsilon}_T$

$$(51) \quad \vec{\epsilon} = (0, \epsilon_0, 0), \quad \vec{\chi} = 0$$

On obtient alors par intégration de (37)

$$(52) \quad \vec{u} = (0, \epsilon_0 x_1, 0), \quad \vec{\omega} = 0$$

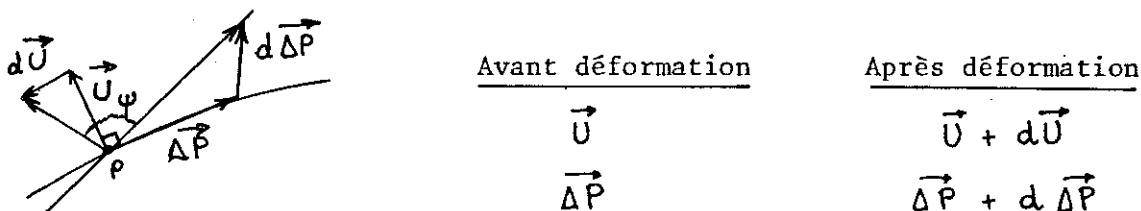


Ce cas ne correspond à aucun problème élastique. Néanmoins, cette déformation ressemble à un glissement simple (III.44). L'hypothèse de Navier-Bernoulli n'est plus vérifiée. On peut même démontrer, de manière générale, que

Théorème 2. L'hypothèse de Navier-Bernoulli ("les sections droites restent normales à la fibre moyenne") est équivalente à la condition

$$(53) \quad \vec{\epsilon}_T = 0$$

Dém. Soit \vec{U} un vecteur de la section droite



Le vecteur $\vec{\Delta P} + d\vec{\Delta P}$ représente la tangente à la fibre moyenne après déformation et l'on a

$$(54) \quad \vec{\Delta P} = \vec{\tau} \Delta s, \quad d\vec{\Delta P} = \frac{d\vec{u}}{ds} \Delta s$$

D'autre part, puisque $\vec{\omega}$ est la rotation de la section droite

$$(55) \quad d\vec{U} = \vec{\omega} \wedge \vec{U}$$

L'hypothèse de Navier-Bernoulli affirme que, après déformation, la section droite reste normale à la fibre moyenne, c'ād que le vecteur ($\vec{U} + d\vec{U}$) est perpendiculaire à la direction ($\vec{\Delta P} + d\vec{\Delta P}$) de la fibre moyenne

$$(\vec{\Delta P} + d\vec{\Delta P}) \cdot (\vec{U} + d\vec{U}) = 0$$

c'ād d'après la linéarisation et (54)

$$(56) \quad \frac{d\vec{u}}{ds} \cdot \vec{U} + \vec{\tau} \cdot d\vec{U} = 0$$

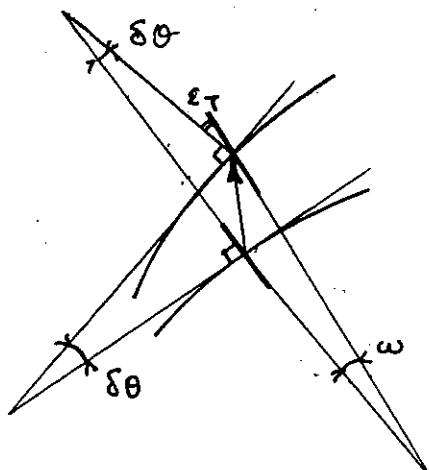
Mais, d'après (55),

$$\vec{\tau} \cdot d\vec{U} = \vec{\tau} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{U}) = (\vec{\tau} \wedge \vec{\omega}) \cdot \vec{U}$$

de sorte que (56) s'écrit

$$(57) \quad \left(\frac{d\vec{u}}{ds} + \vec{\tau} \wedge \vec{\omega} \right) \cdot \vec{U} = \vec{\epsilon} \cdot \vec{U} = 0$$

et une CNS pour que (52) soit vérifié pour tout vecteur \vec{U} de la section droite est que $\vec{\epsilon}$ soit normale à la section droite c'ād que $\vec{\epsilon}_T = 0$ cqfd



Dans le cas plan, on peut même montrer que $\vec{\epsilon}_T$ est l'angle entre la normale à la fibre moyenne déformée et la section droite déformée.

3. STATIQUE DES FILS

3.1 FILS PARFAITEMENT FLEXIBLES

Un fil parfaitement flexible est un milieu curviligne ne pouvant supporter aucun moment. Les efforts extérieurs appliqués se réquiront donc à des forces

- force répartie $\vec{f}(s)$
- force concentrée \vec{F}^R
- forces de liaison \vec{R}^K

et le torseur des efforts intérieurs se réduit à une résultante \vec{R}

$$(58) \quad \vec{m} = 0$$

Par rapport aux milieux curvilignes que nous avons introduits plus haut, les fils se caractérisent donc par une schématisation différente (plus grossière). Il conviendra donc de schématiser différemment la cinématique.

Compte-tenu de (58), l'équation d'équilibre (XIII.18) donne
 $\vec{\tau}_A \vec{R} = 0$ et montre donc que \vec{R} est colinéaire à $\vec{\tau}$

$$(59) \quad \vec{R} = N \vec{\tau} = - T \vec{\tau} \quad T = - N \geq 0$$

en introduisant la tension du fil T (ne pas confondre avec l'effort trans-
chant \vec{T} qui est nul pour un fil). L'équation d'équilibre (XIII.17) donne
alors

$$(60) \quad \frac{d\vec{R}}{ds} = - \left(\frac{dT}{ds} \vec{\tau} + T \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right) = \vec{f}$$

Si on décompose \vec{f} en ses composantes sur $\vec{\tau}$ et dans le plan perpendicu-
laire

$$(61) \quad \vec{f} = f_m \vec{\tau} + \vec{f}_T$$

alors il résulte de (60)

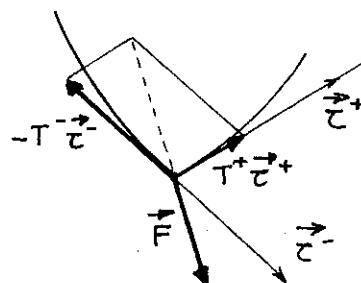
$$(62) \quad f_m + \frac{dT}{ds} = 0, \quad T \frac{d\vec{\tau}}{ds} + \vec{f}_T = 0$$

La composante f_m conditionne la variation de la tension, tandis que la
composante \vec{f}_T conditionne la géométrie du fil après déformation.

De la même manière, si une force concentrée \vec{F} est appliquée au
point P, on aura d'après (19)

$$(63) \quad T^+ \vec{\tau}^+ = T^- \vec{\tau}^- - \vec{F}$$

en notant T^+ , $\vec{\tau}^+$ et T^- , $\vec{\tau}^-$ la tension et le vecteur unitaire tangent au
fil juste à droite et juste à gauche
du point P. La relation (63) exprime
simplement l'équilibre du point P.
En particulier, l'action d'une force
concentrée se manifeste par la pré-
sence d'un point anguleux.



Puisque les efforts ne font intervenir que des forces (et pas
de moment), la description cinématique ne fera intervenir que la transla-
tion. Dans une théorie des fils, il faut envisager de grandes déformations;
nous parlerons donc de puissances virtuelles (la formulation en termes de
travaux virtuels est spécifique aux théories de petites perturbations, voir
§ III.2.3). Un mouvement virtuel est donc un champ de vitesse \vec{V} défini
sur la courbe. La puissance des efforts extérieurs sera donc, pour un élé-
ment BC de fil

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{ext} = T(s_c) \vec{V}(s_c) \cdot \vec{\tau}(s_c) - T(s_b) \vec{V}(s_b) \cdot \vec{\tau}(s_b) \\ \quad + \sum_k \vec{F}^k \cdot \vec{V}(s_k) + \sum_k \vec{R}^k \cdot \vec{V}(s_k) + \int_{s_b}^{s_c} \vec{f}(s) \cdot \vec{V}(s) ds \end{array} \right.$$

dont on tirera comme au § 1.3 le

Théorème des puissances virtuelles. Pour tout champ de vitesses virtuelles

$$(65) \quad \overset{*}{\Phi}_{ext} = \int_{s_0}^{s_1} T(s) \left(\frac{d\vec{V}}{ds} \cdot \vec{\tau} \right) ds$$

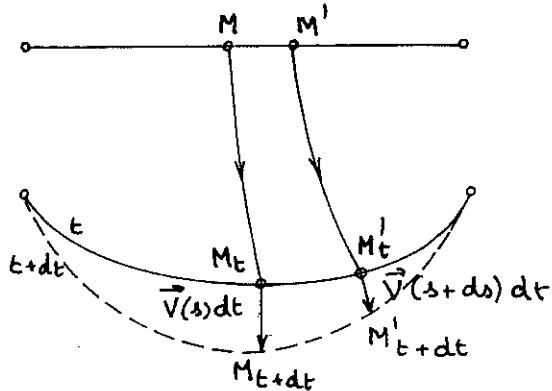
et la variable cinématique conjuguée de $T(s)$ est la vitesse d'allongement du fil.

Configuration de référence

Configuration actuelle

— à t

— — à $t + dt$



En effet, on vérifie facilement que

$$(66) \quad \frac{1}{M_t M'_t} \frac{d(M_t M'_t)}{dt} = \frac{d\vec{V}}{ds} \cdot \vec{\tau}$$

La loi de comportement reliera donc la tension du fil à son allongement.

3.2 FIL INEXTENSIBLE

Un fil est inextensible si son allongement est identiquement nul.

Il en résulte que

$$(67) \quad \frac{d\vec{V}}{ds} \cdot \vec{\tau} = 0$$

et la tension du fil doit être déterminée par intégration des équations d'équilibre. Il faut donc utiliser l'équation (56) pour trouver la figure d'équilibre du fil ainsi que la tension T .

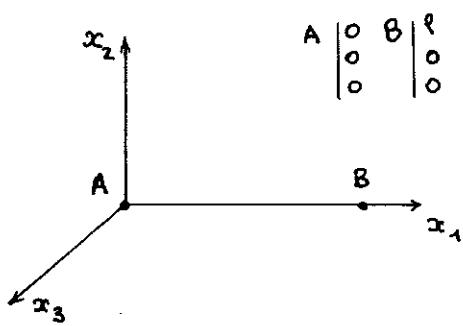
A titre d'exemple, nous allons considérer l'équilibre d'un fil de longueur L entre deux points A et B distants de $\ell < L$ dans différents cas.

a) Fil pesant homogène.

La force appliquée par unité de longueur est

$$(68) \quad \vec{f} = - \rho g \vec{e}_z$$

Soit $\vec{x}(s) = x_i(s) \vec{e}_i$ l'équation de la figure d'équilibre du fil. L'équa-



$$(69) \quad \frac{d}{ds} \left(T \frac{d\vec{x}}{ds} \right) = \vec{f}$$

soit en composantes

$$(70) \quad \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx_1}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx_3}{ds} \right) = 0$$

$$(71) \quad \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx_2}{ds} \right) = - \rho g$$

L'intégration de (71) donne

$$T \frac{dx_1}{ds} = C_1, \quad T \frac{dx_3}{ds} = C_3, \quad \frac{dx_3}{dx_1} = \frac{C_3}{C_1} = \text{cte}$$

et la figure d'équilibre doit être dans un plan vertical: le plan $x_3 = 0$, compte-tenu des conditions aux limites. Il reste donc

$$(72) \quad T \frac{dx_1}{ds} = C_1, \quad x_3 = 0$$

Nous remplaçons maintenant l'équation (71) par la première équation (58) qui donne

$$(73) \quad \frac{dT}{ds} = - \vec{f}_m = - \vec{f} \cdot \vec{\tau} = + \rho g \frac{dx_2}{ds}$$

d'où par intégration

$$(74) \quad T = \rho g (x_2 - b)$$

On obtient donc par combinaison avec (72)

$$(75) \quad \frac{ds}{dx_1} = \frac{\rho g}{C_1} (x_2 - b) = \operatorname{sh} \varphi$$

en introduisant une variable auxiliaire φ par

$$(76) \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{sh} \varphi, \quad \frac{ds}{dx_1} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx_2}{dx_1} \right)^2} = \operatorname{ch} \varphi$$

En différentiant (75) on trouve

$$(77) \quad \operatorname{sh} \varphi \, d\varphi = \frac{\rho g}{C_1} dx_2 = \frac{\rho g}{C_1} \operatorname{sh} \varphi \, dx_1$$

qui par intégration donne

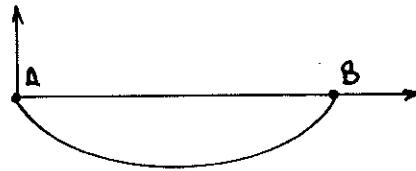
$$(78) \quad (x_1 - a) = \frac{C_1}{\rho g} \varphi$$

soit finalement

$$(79) \quad x_2 - b = \frac{C_1}{\rho g} \operatorname{sh} \left[\frac{\rho g}{C_1} (x_1 - a) \right]$$

et la figure d'équilibre est une chaînette. Les trois constantes d'intégration a , b et C_1 s'obtiennent en écrivant

- $x_2(0) = 0$
- $x_2(l) = 0$
- longueur du fil égale à L .



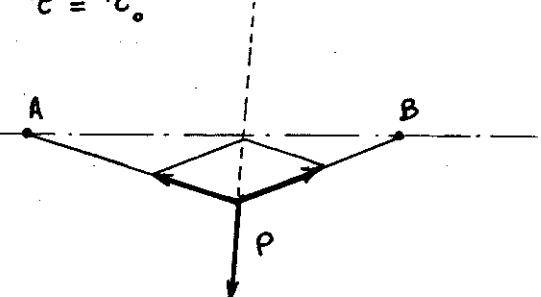
b) Fil non pesant soumis à une force concentrée.

Le fil étant supposé non pesant, il n'y a pas de force répartie, $\vec{f} = 0$.

L'équation d'équilibre (56) donne alors

$$(80) \quad \vec{R} = \vec{C}_t = \vec{R}_o \Rightarrow T = T_o, \quad \vec{\tau} = \vec{\tau}_o.$$

Le fil est donc rectiligne avec tension constante, sauf au passage de la force concentrée. On en déduit la configuration d'équilibre (en fonction du point où est exercée la force). La tension du fil dans les deux branches s'obtient ensuite en écrivant l'équilibre



c) Fil pesant soumis à une force concentrée.

On obtient alors une figure d'équilibre formée de deux arcs de chaînette avec un point anguleux, là où est appliquée la force concentrée. Pour une force nulle, on a le cas a), et lorsque P est grand devant le poids du fil, on retrouve le cas b).

