

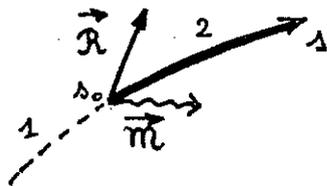
Chapitre XIII

EFFORTS INTERIEURS EN RDM

1. LE TORSEUR DES EFFORTS INTERIEURS

1.1 DEFINITION DES EFFORTS INTERIEURS

Comme nous l'avons fait en MMC, nous allons définir les efforts intérieurs en considérant les efforts exercés sur une partie du solide par la partie complémentaire. Nous introduisons donc une coupure en un point P,



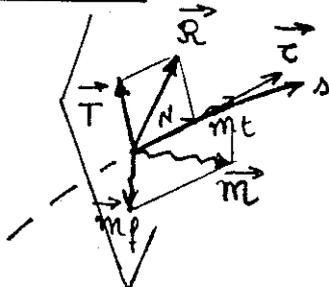
càd le long de la section droite en P, et nous caractériserons les efforts intérieurs par les efforts exercés sur la partie 2 par la partie 1.

Conformément à l'hypothèse de Saint-Venant (§ XII.1.3.), nous caractériserons ces efforts par leur torseur. C'est le torseur  $[T_{1 \rightarrow 2}]$  des efforts intérieurs exercés par 1 sur 2. D'après le principe de l'action et de la réaction, il est clair que les efforts exercés par 1 sur 2 sont opposés aux efforts exercés par 2 sur 1.

$$(1) \quad [T_{1 \rightarrow 2}] = - [T_{2 \rightarrow 1}]$$

Par convention, on prendra comme parties 1 et 2 les parties orientées vers les s décroissants et croissants respectivement, et on appellera "torseur des efforts intérieurs" au point P d'abscisse curviligne  $s_0$ , le torseur  $[T(s_0)]$  des efforts exercés par la partie "gauche" ( $s < s_0$ ) sur la partie "droite" ( $s > s_0$ ).

Nous caractériserons le torseur des efforts intérieurs par ses éléments de réduction au point P : résultante  $\vec{R}(s)$  et moment  $\vec{M}(s)$ , et nous projeterons ces deux vecteurs



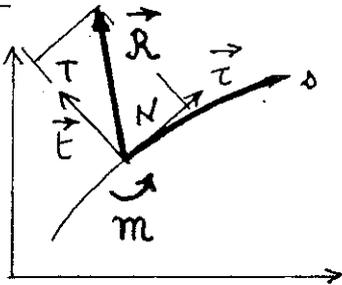
sur la normale à la section droite et sur le plan de la section droite, càd sur la tangente  $\vec{t}$  et le plan normal à la courbe représentative

$$(2) \quad \vec{R} = N \vec{t} + \vec{T} \quad , \quad \vec{M} = m_t \vec{t} + \vec{m}_f$$

- $N$  est l'effort normal
- $\vec{T}$  est l'effort tranchant
- $\vec{m}_t$  est le moment de torsion
- $\vec{m}_f$  est le moment fléchissant

En particulier, il résulte de nos définitions que  $N$  est positif en compression et négalif en traction. Cette convention de signe, comme celle que nous avons introduite plus haut, n'est pas universelle, et ces conventions peuvent changer d'un ouvrage à l'autre. Cela n'a aucune importance, mais il convient de choisir une convention et ensuite de s'y tenir.

Dans le cas des structures planes chargées dans leur plan, alors le torseur des efforts intérieurs ne fait plus intervenir que 3 composantes:



2 composantes pour la résultante  $\vec{R}$

1 composante pour le moment  $m$   
(moment de flexion)

En particulier, l'effort tranchant  $\vec{T}$  devient une quantité algébrique, en choisissant par exemple de prendre la normale principale à la courbe  $\vec{k}$  orientée à  $+\frac{\pi}{2}$  de  $\vec{t}$

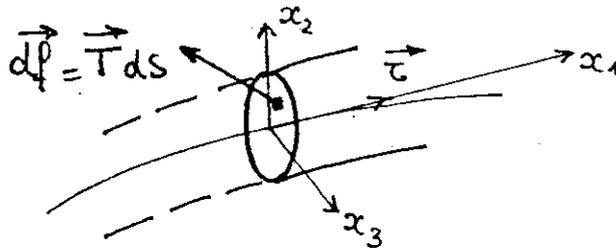
$$(3) \quad \vec{R} = N \vec{t} + T \vec{k} \qquad \vec{m} = m \vec{e}_y$$

- $N$  est l'effort normal
- $T$  est l'effort tranchant
- $m$  est le moment fléchissant

Dans le cas des poutres droites chargées transversalement, on a vu au § XII.3.1 que l'on pouvait ignorer les forces longitudinales, et donc l'effort normal. Les efforts intérieurs ne font donc plus intervenir que 2 composantes: l'effort tranchant et le moment fléchissant

## 1.2 RELATION AVEC LES CONTRAINTES

Un point du milieu curviligne représente une section droite. Le torseur des efforts intérieurs  $[\mathcal{C}(\delta)]$  est donc le torseur représentant tous les efforts élémentaires exercés à travers la section droite par la partie gauche sur la partie droite



Comme nous l'avons vu en MMC (Chapitre II), ces efforts sont caractérisés à partir du tenseur des contraintes  $\sigma$  par le vecteur contrainte  $\vec{T}(M, -\vec{n})$  puisque  $\vec{n}$  est la normale intérieure à la partie droite. Le torseur des efforts intérieurs s'obtiendra donc par intégration de ces efforts sur la section droite  $\Sigma$

$$(4) \quad \vec{R} = \iint_{\Sigma} \vec{T} \, dS \quad \vec{m} = \iint_{\Sigma} \vec{PM} \wedge \vec{T} \, dS$$

Si nous introduisons localement un système d'axes  $P x_1 x_2 x_3$  tel que l'axe  $P x_1$  soit dans la direction du vecteur tangent  $\vec{\tau}$  et que les axes  $P x_2, P x_3$  soient dans le plan de la section droite, alors le vecteur  $\vec{T}$  a comme composantes  $(-\sigma_{11}, -\sigma_{12}, -\sigma_{13})$  et les formules (4) s'explicitent en

$$(5) \quad R_1 = N = - \iint_{\Sigma} \sigma_{11} \, dx_2 \, dx_3 \quad \text{effort normal}$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_2 = T_2 = - \iint_{\Sigma} \sigma_{12} \, dx_2 \, dx_3 \\ R_3 = T_3 = - \iint_{\Sigma} \sigma_{13} \, dx_2 \, dx_3 \end{array} \right\} \quad \text{effort tranchant}$$

$$(7) \quad m_{11} = m_{12} = \iint_{\Sigma} (x_3 \sigma_{12} - x_2 \sigma_{13}) \, dx_2 \, dx_3 \quad \text{moment de torsion}$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_2 = m_{f2} = - \iint_{\Sigma} x_3 \sigma_{11} \, dx_2 \, dx_3 \\ m_3 = m_{f3} = + \iint_{\Sigma} x_2 \sigma_{11} \, dx_2 \, dx_3 \end{array} \right\} \quad \text{moment de flexion}$$

Aux conventions de signe près, ces formules sont identiques aux formules (VII.5 à 8) du § VII.1.1. En fait, le problème de Saint-Venant, qui a fait l'objet du Chapitre VII, est le problème type de la RDM. La comparaison de la solution RDM de ce problème avec la solution élastique obtenue au Chapitre VII nous permettra plus tard de faire le lien entre la théorie de l'élasticité en MMC et la théorie des milieux curvilignes élastiques que nous sommes actuellement en train de construire. En particulier, c'est ainsi que nous pourrons obtenir, à partir de la solution RDM, c'est à partir du torseur des efforts intérieurs, des informations tridimensionnelles, en particulier sur la répartition des contraintes dans la section droite et donc sur les critères de dimensionnement.

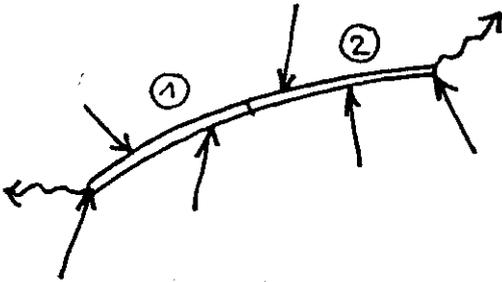
### 1.3 CALCUL DES EFFORTS INTERIEURS

Le torseur des efforts intérieurs a été défini par une coupe permettant de séparer la poutre en deux parties

Partie droite ou partie ② ( $\Delta > \Delta_0$ )

Partie gauche ou partie ① ( $\Delta < \Delta_0$ )

On pourra donc obtenir le torseur des efforts intérieurs en écrivant l'équilibre de l'une de ces deux parties.

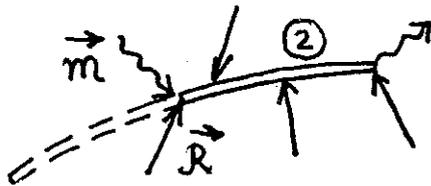


Les efforts extérieurs (charges connues et efforts de liaison inconnus) se décomposent en deux parties: les efforts extérieurs appliqués sur la partie ① et les efforts extérieurs appliqués sur la partie ②. Nous noterons  $[F_{ext \rightarrow 1}]$  et  $[F_{ext \rightarrow 2}]$  les torseurs correspondants.

De l'équilibre global de la poutre on déduit la relation

$$(9) \quad [F_{ext}] = [F_{ext \rightarrow 1}] + [F_{ext \rightarrow 2}] = 0$$

Méthode A. On écrit l'équilibre de la partie droite 2.



Les efforts appliqués à ② sont  
 - efforts extérieurs appliqués à ②  
 - efforts exercés par ① sur ②.  
 La condition d'équilibre est donc

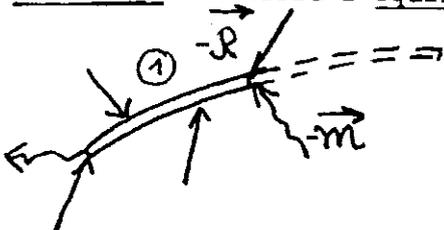
$$(10) \quad [C_{1 \rightarrow 2}] + [F_{ext \rightarrow 2}] = 0$$

Soit, compte-tenu de la convention de signe:

Méthode A: Le torseur des efforts intérieurs est opposé au torseur des efforts appliqués sur la partie droite

$$(11) \quad [C(\Delta)] = - [F_{ext \rightarrow 2}]$$

Méthode B. On écrit l'équilibre de la partie gauche 1.



Les efforts appliqués à 1 sont  
 - efforts extérieurs appliqués à ①  
 - efforts exercés par ② sur ①.  
 La condition d'équilibre est donc

$$(12) \quad [C_{2 \rightarrow 1}] + [F_{ext \rightarrow 1}] = 0$$

et, compte-tenu de (1), on obtient

Méthode B: Le torseur des efforts intérieurs est égal au torseur des efforts appliqués sur la partie 1

$$(13) \quad [\mathcal{T}(s)] = [\mathcal{F}_{\text{ext} \rightarrow 1}]$$

Il est clair d'après (9) que ces deux méthodes conduisent au même résultat. Pratiquement, on choisira l'une ou l'autre pour simplifier au maximum les calculs.

A titre d'application, caractérisons les efforts intérieurs dans un treillis. Comme on l'a vu au § XII.3.3, chaque barre d'un treillis est soumise à deux forces opposées exercées à ses extrémités



Il résulte alors directement de ce qui précède que le torseur des efforts intérieurs en tout point de la barre se réduit à un effort normal  $N \vec{e}$  avec  $N > 0$  en compression et  $N < 0$  en traction. Ceci justifie la notation  $N_s$  et la terminologie "tension" utilisée au § XII.3.3 .

Pour les systèmes isostatiques, les équations de la statique permettent de calculer les efforts de liaison. On peut alors déterminer par l'une des deux méthodes précédentes les efforts intérieurs. Ainsi, pour les systèmes isostatiques, on peut déterminer le champ des efforts intérieurs à partir de la statique seule. En particulier, les efforts intérieurs sont indépendants du comportement. Pour un système hyperstatique de degré  $h$ , on peut calculer les efforts de liaison, puis les efforts intérieurs, en fonction de  $h$  inconnues hyperstatiques. Le comportement interviendra alors pour lever l'hyperstaticité, c-à-d pour déterminer les inconnues hyperstatiques. Une autre manière de voir les choses, et ce point de vue sera essentiel dans la suite, consiste à remarquer qu'en RDM l'espace des champs statiquement admissibles - c-à-d l'espace des champs d'efforts intérieurs en équilibre avec un chargement donné - se réduit à un seul élément pour un système isostatique, et est un espace affine de dimension  $h$  pour un système hyperstatique de degré  $h$ .

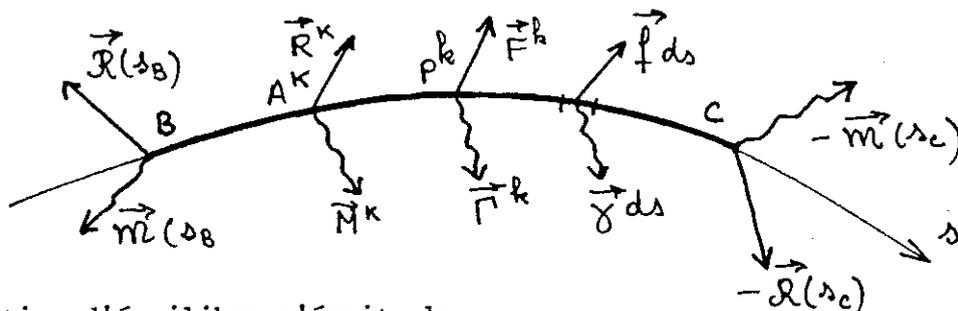
#### 1.4 EQUATIONS D'EQUILIBRE

Les conditions d'équilibre d'une partie quelconque de la structure ont déjà été exploitées au § 1.3 . Néanmoins il est intéressant, pour certains calculs, d'avoir les équations d'équilibre sous forme différentielle locale. Pour les obtenir nous écrivons l'équilibre d'une partie BC quel-

conque de la poutre.

En utilisant les notations des § XII.2.1 et XII.2.2, les efforts appliqués sur cette partie de poutre sont

- les charges réparties  $[\varphi(s)]$  ou  $\vec{f}(s), \vec{y}(s)$
  - les charges concentrées  $[\Phi^k]$  ou  $\vec{F}^k, \vec{r}^k$  en  $P^k$
  - les efforts de liaison  $[\Psi^K]$  ou  $\vec{R}^K, M^K$  en  $A^K$
- (en ne considérant bien sûr que les points  $P^k$  et  $A^K$  situés entre B et C)
- les efforts exercés par la partie située à gauche de B  $[\mathcal{C}(s_B)]$  ou  $\vec{\mathcal{R}}(s_B), \vec{\mathcal{M}}(s_B)$
  - les efforts exercés par la partie située à droite de C  $-\mathcal{C}(s_c)$  ou  $-\vec{\mathcal{R}}(s_c), -\vec{\mathcal{M}}(s_c)$



La condition d'équilibre s'écrit alors

$$(14) \quad [\mathcal{C}(s_B)] - [\mathcal{C}(s_c)] + \sum_k [\Phi^k] + \sum_K [\Psi^K] + \int_{s_B}^{s_c} [\varphi(s)] ds = 0$$

soit, en séparant résultante et moment,

$$(15) \quad \vec{\mathcal{R}}(s_B) - \vec{\mathcal{R}}(s_c) + \sum_k \vec{F}^k + \sum_K \vec{R}^K + \int_{s_B}^{s_c} \vec{f}(s) ds = 0$$

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}(s_B) + \vec{OB} \wedge \vec{\mathcal{R}}(s_B) - \vec{\mathcal{M}}(s_c) - \vec{OC} \wedge \vec{\mathcal{R}}(s_c) + \sum_k (\vec{r}^k + \vec{OP}^k \wedge \vec{F}^k) \\ + \sum_K (\vec{M}^K + \vec{OA}^K \wedge \vec{R}^K) + \int_{s_B}^{s_c} [\vec{y}(s) + \vec{OP} \wedge \vec{f}(s)] ds = 0 \end{aligned} \right.$$

Pour exploiter ces équations, analogues en RDM aux équations de conservation (I.2) et (I.3) sous forme globale, nous allons choisir diverses parties BC.

1er cas. Il n'y a pas d'effort concentré (charge ou effort de liaison) entre B et C. L'équation (15) devient

$$\int_{s_B}^{s_c} \vec{f}(s) ds = \vec{\mathcal{R}}(s_c) - \vec{\mathcal{R}}(s_B) = \int_{s_B}^{s_c} \frac{d\vec{\mathcal{R}}}{ds} ds$$

$$\int_{s_B}^{s_c} \left[ \frac{d\vec{\mathcal{R}}}{ds} - \vec{f}(s) \right] ds = 0$$

Equation qui doit être vérifiée pour toute valeur de  $s_B$  et  $s_c$ . On en déduit

$$(17) \quad \frac{d\vec{\mathcal{R}}}{ds} = \vec{f}(s)$$

De la même manière, l'équation de moment donne

$$\int_{s_B}^{s_c} [\vec{y}(s) + \vec{OP} \wedge \vec{f}(s)] ds = \vec{\mathcal{M}}(s_c) + \vec{OC} \wedge \vec{\mathcal{R}}(s_c) - \vec{\mathcal{M}}(s_B) - \vec{OB} \wedge \vec{\mathcal{R}}(s_B)$$

$$= \left[ \vec{\mathcal{M}} + \vec{OP} \wedge \vec{\mathcal{R}} \right]_{P=B}^{P=C} = \int_B^C \frac{d}{ds} [\vec{\mathcal{M}} + \vec{OP} \wedge \vec{\mathcal{R}}] ds$$

$$= \int_B^C \left[ \frac{d\vec{m}}{ds} + \vec{\tau} \wedge \vec{Q} + \vec{OP} \wedge \frac{d\vec{Q}}{ds} \right] ds$$

d'après la définition XII.7 du vecteur tangent  $\vec{\tau}$ . On en déduit, compte-tenu de (17)

$$(18) \quad \int_{s_0}^{s_1} \left[ \frac{d\vec{m}}{ds} + \vec{\tau} \wedge \vec{Q} - \vec{Y}(s) + \vec{OP} \wedge \left( \frac{d\vec{Q}}{ds} - \vec{f}(s) \right) \right] ds = 0$$

$$\frac{d\vec{m}}{ds} = \vec{Y}(s) - \vec{\tau} \wedge \vec{Q}$$

2ème cas. Au passage d'une charge concentrée en  $P^k$ . On fait alors tendre B vers  $P^k$  par la gauche  
C vers  $P^k$  par la droite

$$(s_0 \rightarrow s_k^-, s_1 \rightarrow s_k^+)$$

(ce qui revient à écrire l'équilibre

d'un élément entourant  $P^k$ ). Les conditions (15) et (16) reviennent alors à écrire

$$(19) \quad \vec{Q}(s_k^+) = \vec{Q}(s_k^-) + \vec{F}^k$$

$$(20) \quad \vec{m}(s_k^+) = \vec{m}(s_k^-) + \vec{\Gamma}^k$$



En d'autres termes, la résultante et le moment des efforts intérieurs subissent une discontinuité égale à la résultante et au moment de la charge appliquée.

3ème cas. Au passage d'une liaison  $A^k$ , on obtient de la même manière

$$(21) \quad \vec{Q}(s_k^+) = \vec{Q}(s_k^-) + \vec{R}^k$$

$$(22) \quad \vec{m}(s_k^+) = \vec{m}(s_k^-) + \vec{M}^k$$

Quant aux extrémités droite et gauche de la poutre, on vérifie facilement par examen des différents cas possibles que l'on peut encore écrire les relations (19), (20), (21), (22) en convenant de prendre

$$(23) \quad \vec{Q}(s_0^-) = \vec{Q}(s_1^+) = 0, \quad \vec{m}(s_0^-) = \vec{m}(s_1^+) = 0$$

pour une poutre  $[s_0, s_1]$ , càd si  $s_0$  représente l'extrémité gauche et  $s_1$  l'extrémité droite.

Ainsi, connaissant les efforts extérieurs, on peut calculer le torseur des efforts intérieurs par intégration de (17), (18), avec les relations de discontinuité (19), (20) et (21), (22) et les conditions aux limites (23). Ce calcul est bien sûr équivalent au calcul global présenté au § 1.3, qu'on lui préférera dans la plupart des cas. Néanmoins cette formulation est utile pour certaines applications.

2.1 POUTRES DROITES

Dans le cas des poutres droites, les efforts intérieurs sont l'effort tranchant  $T$  et le moment fléchissant  $\mathcal{M}$ . Nous supposons qu'il n'y a pas de moment réparti ( $\gamma = 0$ ). Les relations (17) et (18) s'écrivent alors

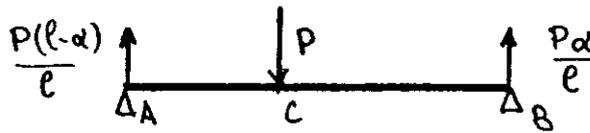
$$(24) \quad \frac{dT}{dx} = f(x)$$

$$(25) \quad \frac{d\mathcal{M}}{dx} = -T(x)$$

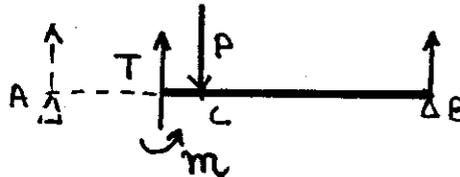
Nous allons reprendre les trois exemples du § XII.3.1 .

Exemple 1.

Pour calculer les efforts intérieurs  $T$  et  $\mathcal{M}$ , il faut considérer séparément les deux tronçons AC et BC.



Sur AC  $0 \leq x \leq \alpha$



On utilise la méthode B: le

torseur des efforts intérieurs est égal au torseur des efforts appliqués sur la partie gauche (càd au torseur formé de la force de réaction en A).

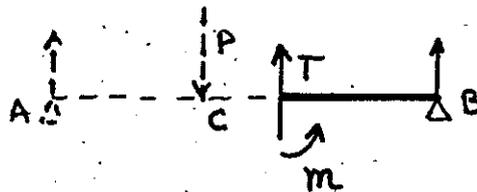
En prenant ses éléments de réduction au point d'abscisse  $x$  on trouve

$$(26) \quad T = \frac{P(l-\alpha)}{l}, \quad \mathcal{M} = -\frac{P(l-\alpha)}{l} x$$

On peut vérifier directement que l'on obtiendrait le même résultat par la méthode A, mais ce serait moins agréable.

Sur BC  $\alpha \leq x \leq l$

Il faut maintenant rajouter la force appliquée  $P$ , et il vient

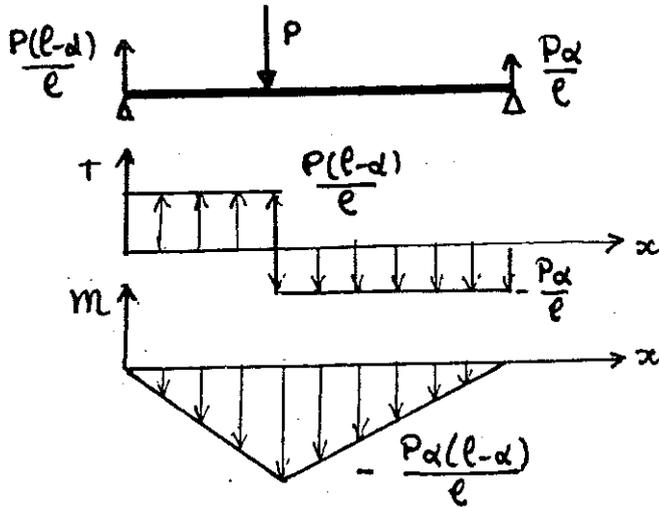


$$(27) \quad T = \frac{P(l-\alpha)}{l} - P = -\frac{P\alpha}{l}$$

$$\mathcal{M} = -\frac{P(l-\alpha)}{l} x + P(x-\alpha) = -\frac{P\alpha}{l} (l-x)$$

résultat que l'on obtiendrait plus simplement par utilisation de la méthode A.

On peut maintenant tracer le diagramme des efforts tranchants et des moments fléchissants, càd les courbes donnant  $T$  et  $\mathcal{M}$  en fonction de  $x$ .



On peut également calculer  $T$  et  $\mathcal{M}$  par intégration de (24) et (25). Partant de  $x = 0$ , on a d'après (23)

$$(28) \quad T(0^-) = \mathcal{M}(0^-) = 0$$

Le torseur des efforts de liaison en A se réduit à une force  $Y_A$ ; on obtient alors par (21), (22)

$$(29) \quad T(0^+) = Y_A = \frac{P(l-\alpha)}{l}, \quad \mathcal{M}(0^+) = 0$$

L'intégration de (24), (25) entre 0 et  $\alpha$  donne, avec les conditions aux limites (29)

$$(30) \quad T(x) = \frac{P(l-\alpha)}{l}, \quad \mathcal{M}(x) = -\frac{P(l-\alpha)}{l}x$$

valable pour  $0 < x < \alpha$ . Au passage de la force concentrée, on obtient par (19), (20)

$$(31) \quad T(\alpha^+) = T(\alpha^-) - P = -\frac{P\alpha}{l}, \quad \mathcal{M}(\alpha^+) = \mathcal{M}(\alpha^-) = -\frac{P(l-\alpha)\alpha}{l}$$

On intègre ensuite (24), (25) entre  $\alpha$  et  $l$  pour obtenir

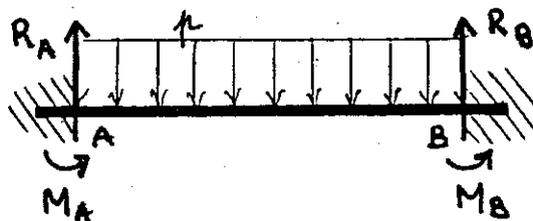
$$(32) \quad T(x) = -\frac{P\alpha}{l}, \quad \mathcal{M}(x) = -\frac{P(l-\alpha)\alpha}{l} + \frac{P\alpha}{l}(x-\alpha)$$

càd (27) pour  $\alpha < x < l$ . Pour  $x = l$ , il suffit d'écrire (21), (22) pour vérifier que

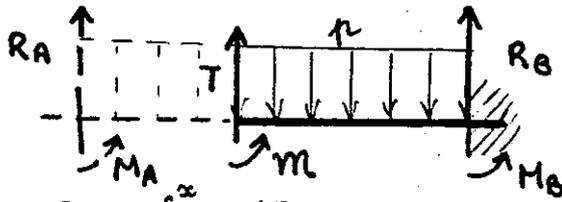
$$(38) \quad T(l^+) = T(l^-) + Y_B = 0, \quad \mathcal{M}(l^+) = \mathcal{M}(l^-) = 0$$

en accord avec (23). On peut donc bien calculer les efforts intérieurs par intégration des équations d'équilibre du § 1.4, mais en général on préférera utiliser les conditions d'équilibre global du § 1.3.

Exemple 2.

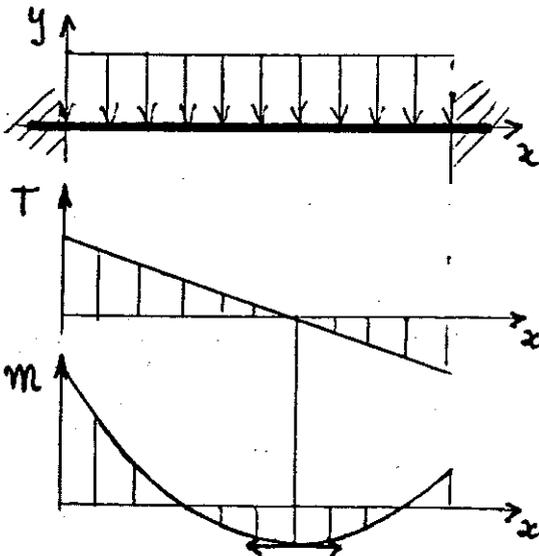


On utilise encore la méthode B qui <sup>28</sup> donne



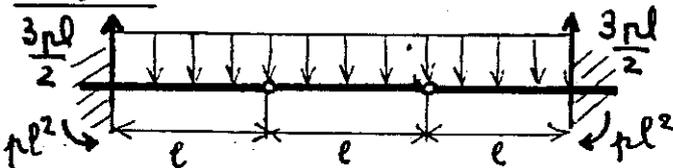
$$(39) \quad \begin{cases} T = R_A - \int_0^x p \, d\xi = R_A - px \\ M = M_A - R_A x + \int_0^x p(x-\xi) \, d\xi = M_A - R_A x + \frac{px^2}{2} \end{cases}$$

Les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants dépendent des inconnues hyperstatiques. Ils ont l'allure suivante: diagramme linéaire pour l'effort tranchant, parabolique pour le moment fléchissant. En particulier, d'après (25), le moment fléchissant passe par un minimum au point où l'effort tranchant s'annule. Cette remarque est importante, car on verra plus loin que le dimensionnement d'une poutre résulte de la grandeur maximale (en valeur absolue) du moment fléchissant. Cette valeur maximale peut ici être atteinte aux extrémités  $x = 0$  et  $x = l$  ou au point où l'effort tranchant s'annule.

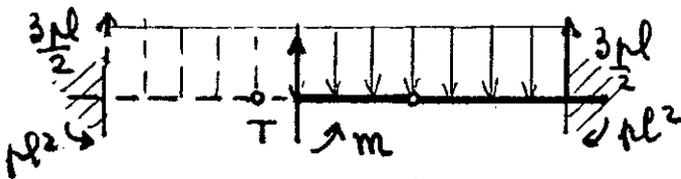


ont l'allure suivante: diagramme linéaire pour l'effort tranchant, parabolique pour le moment fléchissant. En particulier, d'après (25), le moment fléchissant passe par un minimum au point où l'effort tranchant s'annule. Cette remarque est importante, car on verra plus loin que le dimensionnement d'une poutre résulte de la grandeur maximale (en valeur absolue) du moment fléchissant. Cette valeur maximale peut ici être atteinte aux extrémités  $x = 0$  et  $x = l$  ou au point où l'effort tranchant s'annule.

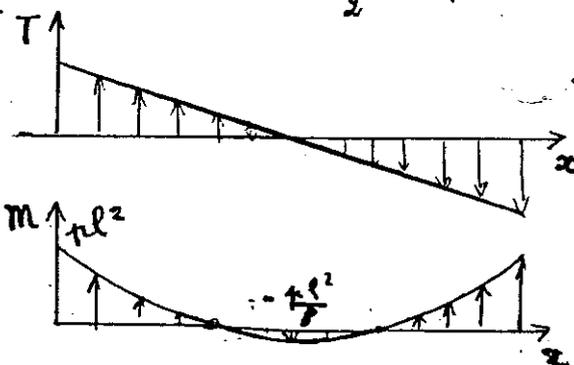
Exemple 3.



On utilise encore la méthode B qui donne



$$(40) \quad T = \frac{3pl}{2} - px, \quad M = pl^2 - \frac{3plx}{2} + \frac{px^2}{2}$$

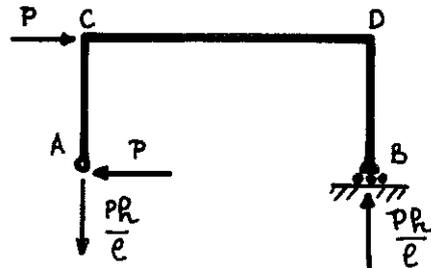


Le moment fléchissant s'annule automatiquement aux articulations. A cela près, l'allure des diagrammes est la même que précédemment. Bien entendu, on aurait pu considérer chaque tronçon séparément, mais cela n'est pas nécessaire.

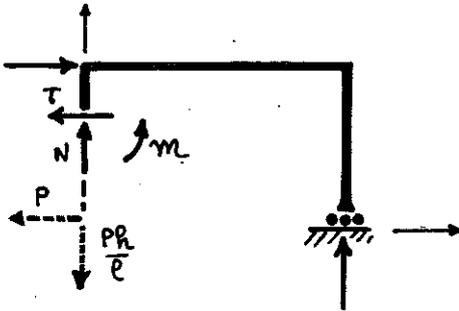
Nous allons reprendre les trois exemples du § XII.3.2 .

Exemple 1.

On oriente le portique dans le sens ACDB.



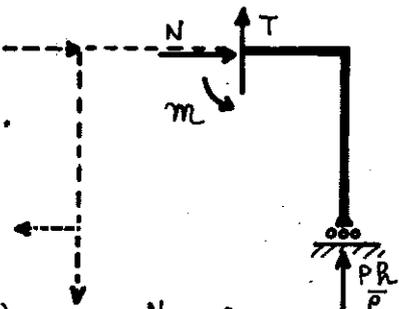
a) Sur AC



(41)  $N = - \frac{Ph}{l}$  ,  $T = P$  ,  $m = - P y$

On utilise la méthode B qui donne, compte-tenu des conventions de signe (N dans le sens de l'orientation, T à  $+\pi/2$  )

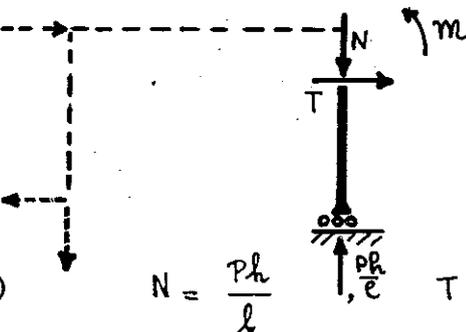
b) Sur CD



(42)  $N = 0$  ,  $T = - \frac{Ph}{l}$  ,  $m = - \frac{Ph}{l} (l-x)$

On utilisera plutôt la méthode A

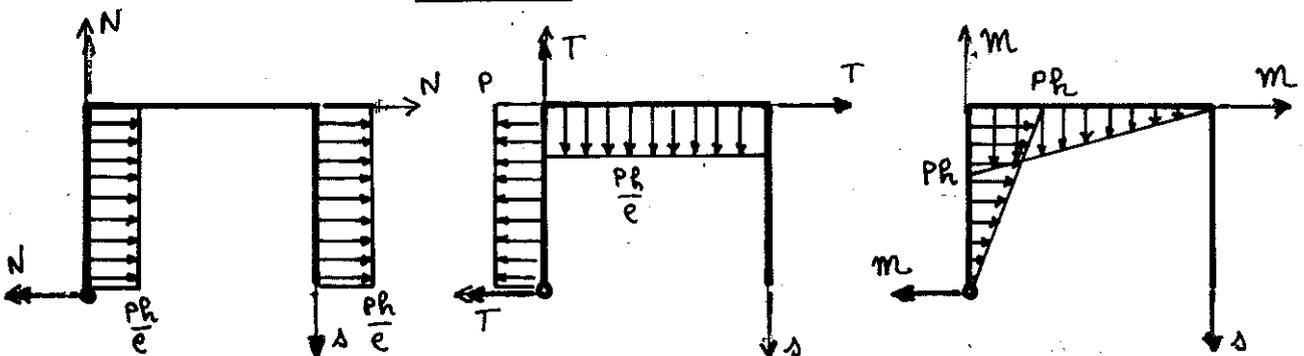
c) Sur DB



(43)  $N = \frac{Ph}{l}$  ,  $T = 0$  ,  $m = 0$

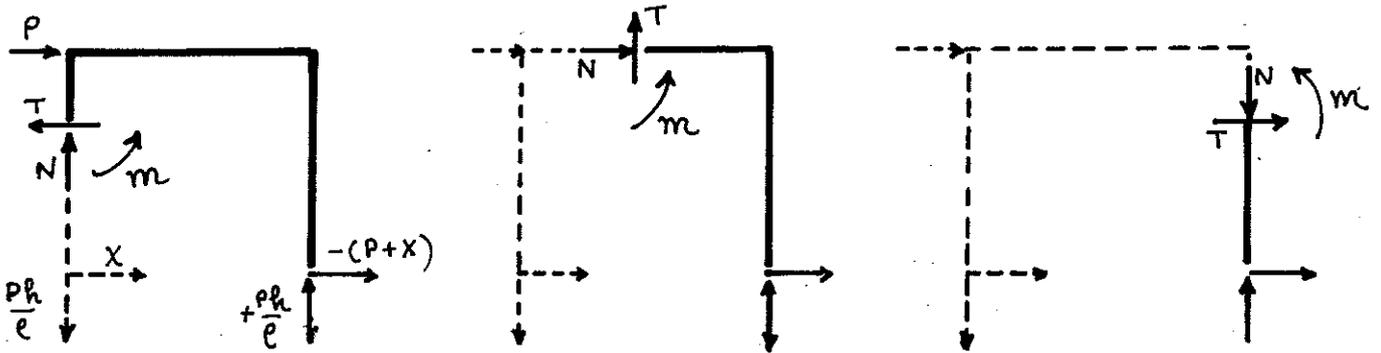
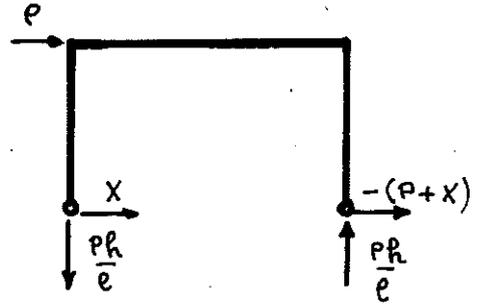
On utilise encore la méthode A

On peut représenter les diagrammes N , T et m



Exemple 2.

On procède comme précédemment,  
et on trouve



Sur AC

(44)

$$N = - \frac{Ph}{l}$$

$$T = - X$$

$$m = X y$$

Sur CD

(45)

$$N = P + X$$

$$T = - \frac{Ph}{l}$$

$$m = X h + \frac{Ph}{l} x$$

Sur DB

(46)

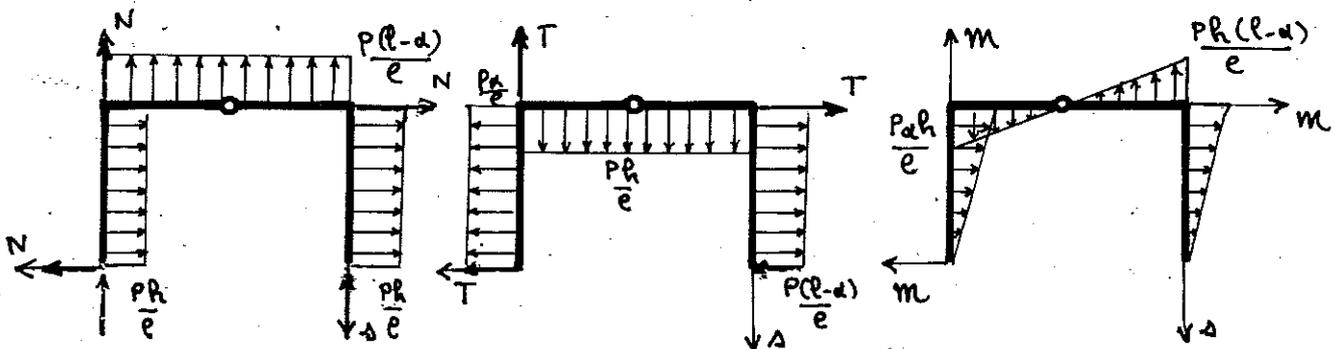
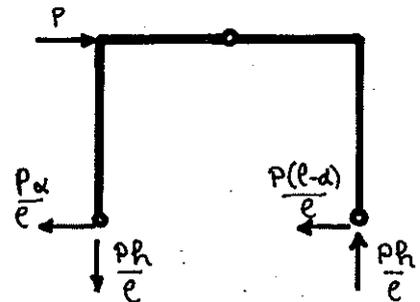
$$N = \frac{Ph}{l}$$

$$T = P + X.$$

$$m = (P + X) y$$

Exemple 3.

C'est un cas particulier du précédent, avec  $X = X_A$  donné par (XII.38). En particulier, on peut tracer les diagrammes des  $N$ ,  $T$  et  $m$ . Comme dans l'exemple 3 du § précédent, on vérifie que  $m$  s'annule à l'articulation.



Dans tous ces exemples, on voit que

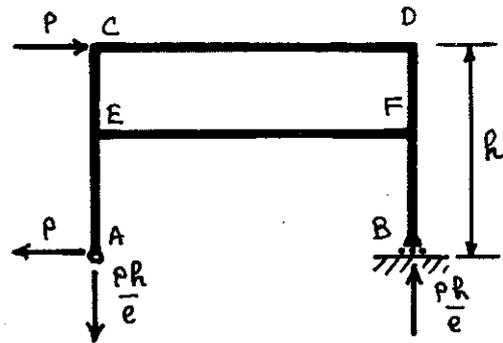
- si le système est isostatique, on sait calculer les efforts intérieurs en tout point par utilisation des seules équations de la statique. Ces résultats sont donc valables pour tout milieu curviligne quels que soient son comportement et sa section droite.

- si le système est hyperstatique, alors on ne peut les calculer qu'en fonction des inconnues hyperstatiques. La nature du milieu curviligne interviendra dans la détermination de ces inconnues hyperstatiques.

### 2.3 HYPERSTATICITE INTERNE

#### Exemple 1. Portique à étage.

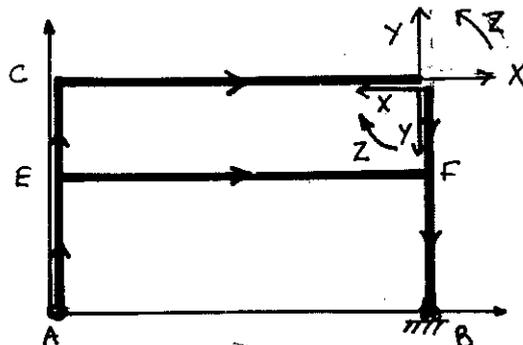
Considérons le portique ci-contre.



Comme nous l'avons souligné au § XII.3.2, ce portique est, du point de vue de l'équilibre global, strictement équivalent au portique de l'exemple 1 du § 2.2. Le système est donc isostatique, et les inconnues de liaison ont la même valeur (XII.35) que pour le portique sans étage.

Cependant, si l'on veut appliquer les résultats du § 1.3 pour calculer les efforts intérieurs, on se heurte à une difficulté essentielle: du fait de la présence de l'étage, on ne peut plus identifier une partie gauche ou une partie droite à laquelle appliquer les équations d'équilibre (sauf pour les parties AE et BF). Pour lever cette difficulté, il faut introduire une coupure dans la structure, et introduire les efforts intérieurs associés à cette coupure comme inconnues hyperstatiques.

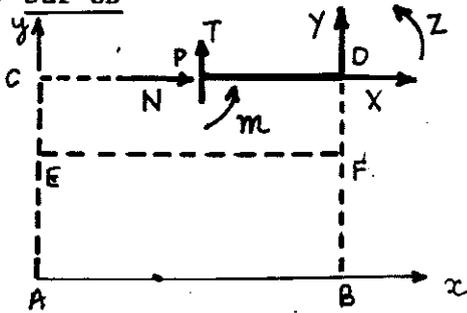
Introduisons donc une coupure par exemple au coin supérieur droit, et notons (X,Y,Z) les composantes du tenseur des efforts (intérieurs)



exercés par FD sur CD. (Bien entendu, les efforts exercés par CD sur FD sont opposés). Compte-tenu de cette coupure, il est maintenant possible de calculer les efforts intérieurs: on définit une orientation sur chaque

tronçon que l'on considère ensuite séparément

a) Sur CD



Partie droite : PD

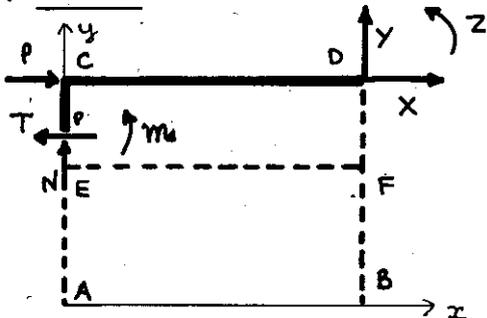
Partie gauche : le reste de la structure

⇒ Méthode A

L'application de la méthode A donne

$$(47) \quad N = -X \quad T = -Y \quad m = -Z - Y(l-x)$$

b) Sur CE



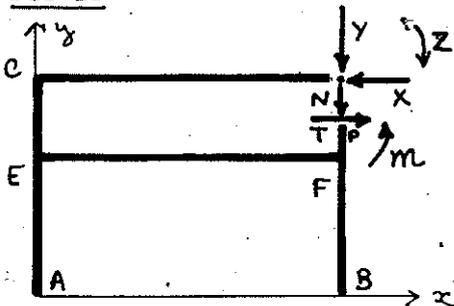
Partie droite : PCD

Partie gauche : le reste

⇒ Méthode A

$$(48) \quad N = -Y \quad T = X + P \quad m = -Z + (P+X)(h-y) - Yl$$

c) Sur DF



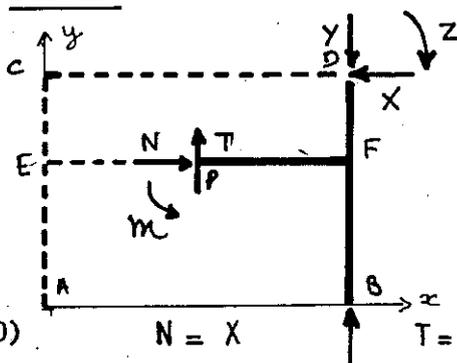
Partie gauche : PD

Partie droite : le reste

⇒ Méthode B

$$(49) \quad N = Y \quad T = -X \quad m = -Z + X(h-y)$$

d) Sur EF



Partie droite : PFDB

Partie gauche : PECDA

⇒ Méthode A

$$(50) \quad N = X \quad T = Y - \frac{Ph}{l} \quad m = Z + \left( Y - \frac{Ph}{l} \right) (l-x) - X \frac{h}{2}$$

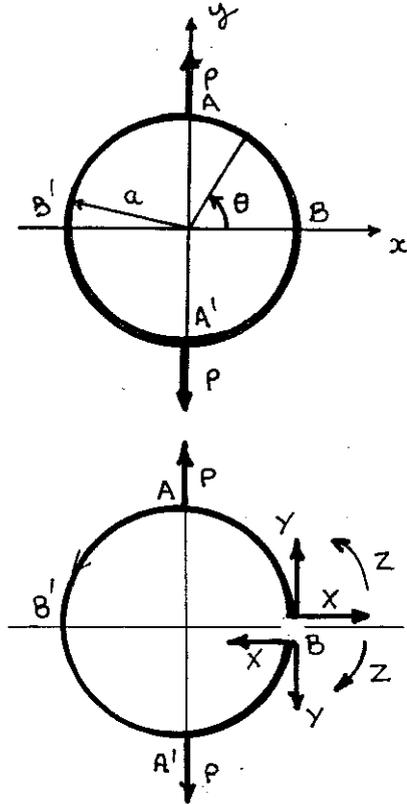
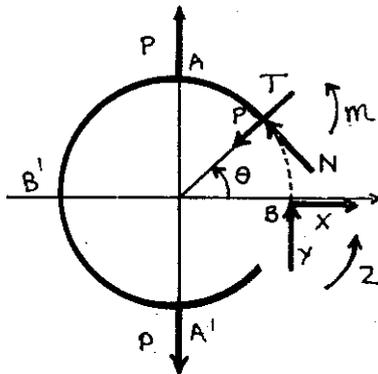
Enfin, sur AE et BF, tous ces problèmes ne se posent pas et les résultats (41) et (43) sont encore valables.

L'introduction d'une coupure permet donc, au prix de l'introduction de 3 inconnues hyperstatiques, de calculer tous les efforts intérieurs. Ce portique est isostatique externe, mais hyperstatique interne de degré 3, car pour calculer les efforts intérieurs il faudra déterminer trois inconnues hyperstatiques qui, physiquement, expriment comment les efforts intérieurs se partagent entre les deux étages.

Exemple 2. Anneau hyperstatique.

Un anneau est chargé par deux forces diamétralement opposées. Le problème est le même que dans l'exemple précédent, et il faut introduire une coupure, par exemple en  $\theta = 0$ , et les trois inconnues de liaison correspondantes  $X, Y, Z$ . Le système est hyperstatique (interne) de degré 3.

Pour calculer le torseur des efforts intérieurs au point  $P$  repéré par l'angle  $\theta$ , on oriente l'anneau dans le sens direct ( $s = a\theta$ ).



Partie gauche :  $BP, 0 < s < a\theta$

Partie droite :  $PAB'A'B, a\theta < s < 2\pi a$

$\Rightarrow$  Méthode B

En projetant l'équation de résultante sur les directions radiale et tangentielle en  $P$ , on obtient

$$(51) \quad N = -X \sin \theta + Y \cos \theta, \quad T = -X \cos \theta - Y \sin \theta$$

tandis que l'équation de moment donne

$$(52) \quad \mathcal{M} = Z + aX \sin \theta + aY (1 - \cos \theta)$$

et des expressions analogues pour les autres cas.

Comme dans l'exemple 2 du § XII.3.1, on peut utiliser la symétrie du problème pour réduire le degré d'hyperstaticité. En effet, d'après les symétries, il est clair que

$$(53) \quad X = 0, \quad Y = -\frac{P}{2}$$

de sorte qu'il ne reste plus qu'une seule inconnue hyperstatique  $Z$  et que les formules (51) et (52) deviennent

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} N = -\frac{P}{2} \cos \theta \quad , \quad T = +\frac{P}{2} \sin \theta \\ \mathcal{M} = Z - \frac{aP}{2} (1 - \cos \theta) \end{array} \right.$$

Le système est hyperstatique interne de degré 1.