

Chapitre XII

LA RESISTANCE DES MATERIAUX

1. INTRODUCTION AU CALCUL DES STRUCTURES

1.1 MMC ET RDM

En principe, la mécanique des milieux continus, MMC, (et en particulier la théorie de l'élasticité) permet de formuler et de résoudre un

Problème de Calcul. On considère une pièce donnée (géométrie, matériau) soumise à une sollicitation donnée. Déterminer la répartition des contraintes et des déformations.

D'un point de vue pratique, la résolution de ce problème répond à un double souci de prévision des performances et de sécurité de la construction (critère de limite d'élasticité pour un calcul élastique, charge limite pour un calcul plastique). On arrive alors à un problème d'équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites. Dans les cas d'intérêt pratique, la résolution d'un tel problème ne peut se faire que par calcul numérique sur un ordinateur. C'est une procédure longue et coûteuse, que l'on peut envisager dans certains cas, mais qui ne se justifie pas en construction courante.

D'autre part, cette résolution ne peut fournir qu'une vérification et ne répond pas, sinon indirectement ou par approximations successives, au problème type de l'ingénieur:

Problème de conception. Une pièce doit supporter une sollicitation donnée ou remplir une fonction donnée. Concevoir cette pièce (forme, dimensions, matériau, ...) pour qu'elle puisse le faire dans les meilleures conditions de sécurité et d'économie.

D'autre part, nous avons vu que la résolution d'un problème exigeait sa formulation correcte sous forme de problème régulier, avec en particulier écriture des conditions aux limites sur toute la surface du corps. Or, c'est souvent trop demander. Il est en effet très fréquent que l'on ne connaisse les efforts appliqués que globalement et non dans leur détail - Voir l'exemple du problème de Saint-Venant au Chapitre VII - .

Il apparaît donc que, en vue des applications à l'art de l'ingénieur, la MMC est une théorie trop fine et qu'il est nécessaire de disposer de théories plus grossières certes, mais plus simples. Ces théories simplifiées font l'objet de ce que l'on appelle traditionnellement la Résistance des Matériaux - RDM.

Nous allons donc désormais nous intéresser à des théories "simplifiées" de milieux continus. Leur structure sera essentiellement la même que pour la MMC classique, et la démarche que nous utiliserons sera calquée sur celle que nous avons utilisée jusqu'à présent:

1. Description des efforts intérieurs
2. Description des déformations
3. Loi de comportement élastique
4. Formulation, étude et résolution des problèmes aux limites correspondants.

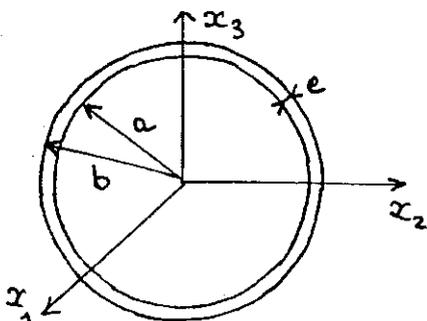
Mais si ces théories sont plus simples que la MMC dans leurs résultats, nous verrons qu'elles posent des problèmes conceptuels difficiles. De nombreux travaux ont été, et sont encore, consacrés à leur construction et leur justification. Nous nous efforcerons de suivre une démarche rationnelle et cohérente, mais cela n'est pas toujours possible, sinon au prix d'une complication hors de proportion avec notre objectif. Nous suivrons donc en fait une voie intermédiaire entre une approche trop rigoureuse, masquant la réalité physique, et l'approche empirique habituelle.

1.2 PLAQUES ET COQUES

La simplification de la RDM est basée sur la géométrie des solides que l'on considère. On a en effet rarement affaire à des solides réellement tridimensionnels, mais plutôt à des solides mono ou bidimensionnels pour lesquels une ou plusieurs dimensions sont petites devant les autres, ce qui autorise certaines approximations.

Considérons par exemple le cas du réservoir sphérique sous pression envisagé au § VI.2.2 en élasticité et au § X.2.2 en plasticité, et supposons qu'il soit mince

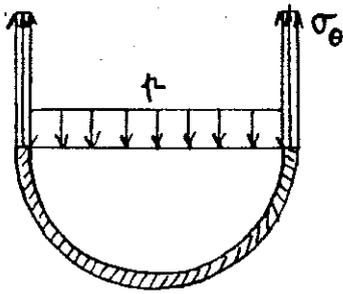
(1) $e = b - a \ll 1$



Dans le repère local des coordonnées sphériques le tenseur des contraintes aura la forme

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\theta \end{bmatrix}$$

L'épaisseur e du réservoir étant petite, on peut négliger la variation



de σ_θ dans l'épaisseur: $\sigma_\theta = Cte$

On écrit alors l'équilibre du demi-réservoir $\alpha_3 \leq 0$ et du gaz qu'il contient.

Les efforts exercés sont

- la pression du gaz situé au dessus

$$- p \pi a^2 \vec{e}_3$$

- les efforts exercés par le demi-réservoir supérieur: $2\pi a e \sigma_\theta \vec{e}_3$. On obtient donc en écrivant l'équilibre

(2) $\sigma_\theta = \frac{p a}{2e} \gg p$ cette quantité étant grande devant p d'après (1). Quant à σ_r , on a

$$(2) \quad \sigma_\theta = \frac{p a}{2e} \gg p$$

cette quantité étant grande devant p d'après (1). Quant à σ_r , on a

$$(3) \quad \sigma_r(a) = -p \quad \sigma_r(b) = 0$$

Il est donc raisonnable de penser que σ_r est du même ordre de grandeur que p et donc négligeable devant σ_θ . Nous obtenons donc en première approximation

$$(4) \quad \sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & pa/2e & 0 \\ 0 & 0 & pa/2e \end{bmatrix}$$

Cette solution sera élastiquement admissible tant que

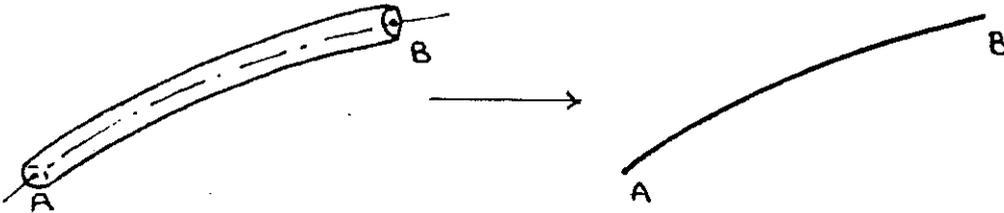
$$(5) \quad pa/2e < \sigma_e \quad p < p_e = p_l = \frac{2e\sigma_e}{a}$$

et en comparant avec les résultats des § VI.2.2 et X.2.2, on vérifie que (4) et (5) représentent correctement la solution du problème lorsque e est petit. En fait, ce sont ces formules, et non celles des § VI.2.2 et X.2.2, qui servent pour le calcul des réservoirs sphériques courants.

On voit donc sur cet exemple que la géométrie du problème (réservoir mince) autorise des approximations qui facilitent grandement le calcul de la solution. C'est un exemple très simple de coque. De manière plus générale, on appelle coque un solide pour lequel une dimension est petite par rapport aux deux autres. On pourra donc le considérer comme un milieu surfacique en ramenant tout sur la surface moyenne. On parlera alors de plaque si cette surface est plane, et de coque dans le cas contraire. L'expérience la plus quotidienne montre l'importance pratique de ce type de solide (mur, plafond, carter, carrosserie, etc...). Nous reviendrons plus loin sur ces milieux (Chapitres XXI et XXII).

1.3 MILIEUX CURVILIGNES

La seconde classe de milieux continus pour laquelle on peut construire une théorie approchée est constituée par les milieux curvilignes pour lesquels deux dimensions sont petites par rapport à la troisième. On peut donc assimiler un tel milieu à une courbe matérielle



d'où l'appellation "milieux curvilignes". On parle aussi souvent de "poutres". On introduit alors diverses définitions:

- La fibre moyenne est le lieu des centres de gravité des sections.
- La section droite est la section du solide par un plan perpendiculaire à la fibre moyenne.

La philosophie de l'approximation RDM d'une poutre consiste donc à assimiler le solide tridimensionnel à un milieu continu monodimensionnel et à concentrer chaque section droite en un point. Ce faisant, on perdra bien évidemment de l'information - c'est là que réside l'approximation - mais on y gagnera deux dimensions et les équations aux dérivées partielles deviendront des équations différentielles ordinaires que l'on pourra résoudre à la main.

On parlera de poutre droite, plane ou gauche, suivant que la fibre moyenne est rectiligne, située dans un plan ou quelconque. On parlera de poutre à section variable ou de poutre à section constante, suivant que la section droite varie ou non le long de la poutre.

La théorie des milieux curvilignes, qui forme l'essentiel de la RDM classique, est traditionnellement basée sur trois hypothèses (voir [31] à [39])

[Hypothèse des petites perturbations. La poutre s'écarte peu de la configuration naturelle de référence.]

C'est l'analogie en RDM de l'hypothèse des petites perturbations en MMC (§ III.2.1). Comme en MMC, elle permet

1. d'identifier la configuration déformée à la configuration de référence. En particulier, on peut écrire les conditions d'équilibre dans la configu-

ration non déformée. On verra dans la suite l'importance de cette approximation (linéarité externe).

2. On peut linéariser toutes les quantités et toutes les équations par rapport aux grandeurs de perturbation. Si de plus le comportement n'introduit pas de non linéarité essentielle (cas de la plasticité par exemple, Chapitre X), alors on obtiendra une théorie linéaire permettant d'introduire un principe de superposition.

Hormis quelques cas spécifiques (comme par exemple le flambement, Chapitre XX), cette hypothèse est justifiée et, sauf mention explicite du contraire, nous la ferons systématiquement.

Hypothèse de Saint-Venant. Tous les efforts qui interviennent dans la théorie des milieux curvilignes peuvent être schématisés par leur torseur résultant.

Cette hypothèse est à la base de la description des efforts extérieurs (voir § 2) et des efforts intérieurs (voir Chapitre XIII) en RDM. Elle est justifiée par le principe de Saint Venant que nous avons introduit au § VII.1.1 et qui affirmait que, dans une poutre, l'état de contrainte et de déformation ne dépendait que du torseur des efforts appliqués et non de la manière précise dont ces efforts étaient appliqués. Il en résulte, en particulier, que la RDM, comme le principe de Saint-Venant dont elle émane, ne pourra pas donner d'informations précises au voisinage des extrémités, ou plus généralement des sections remarquables où il se passe quelque chose (force appliquée, variation brusque de section, coude, etc...). L'étude locale du voisinage de ces sections est du ressort de la MMC, tandis que la RDM ne donne que des informations globales et des informations locales loin des sections remarquables.

Cette hypothèse est véritablement l'hypothèse de base de la RDM, qui permet de ramener la MMC tridimensionnelle à une théorie monodimensionnelle.

Hypothèse de Navier-Bernoulli. Les sections droites restent planes et normales à la fibre moyenne.

Cette hypothèse, de nature cinématique, est en fait surabondante. En effet, comme nous l'avons vu au § III.2.3, les contraintes et les déformations doivent être en dualité. Une fois choisie la schématisation des efforts, qui résulte de l'hypothèse de Saint-Venant, la schématisation des déformations est pratiquement imposée par cette dualité. Nous n'utiliserons donc pas essentiellement cette hypothèse, mais nous discuterons au passage

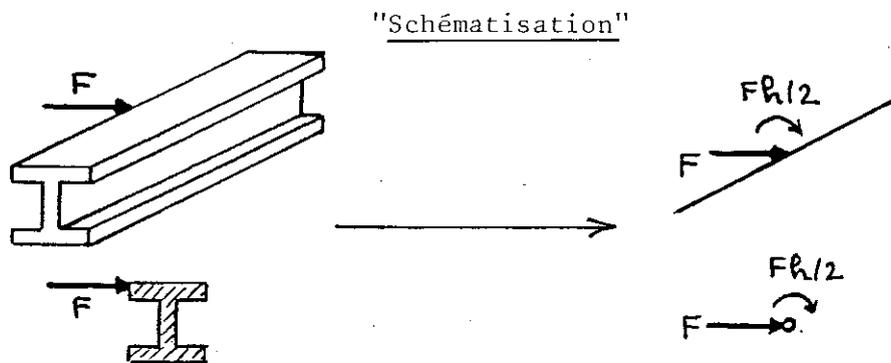
sa signification et sa validité.

2. SCHEMATISATION DES EFFORTS EXTERIEURS

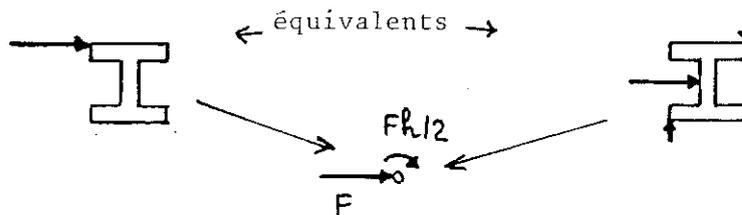
2.1 LES CHARGES

Une structure, quelle qu'elle soit, a toujours pour fonction de supporter des efforts appliqués connus qui sont les données du problème. Suivant le cas, ces données peuvent être réelles (poids d'un plafond reposant sur une poutre) ou règlementaires (poids de la neige ou action du vent sur un bâtiment, convoi type pour un pont). Suivant le cas, ces charges peuvent être réparties avec une densité donnée par unité de longueur (poids propre d'une structure) ou concentrées en un certain nombre de points. Enfin, ce sont des charges permanentes (poids) ou bien des surcharges temporaires. De toute façon, pour l'ingénieur, elles font partie du cahier des charges, et nous les supposons connues.

En vertu de l'hypothèse de Saint-Venant, ces charges seront caractérisées par leur torseur résultant, c'est-à-dire ramenées à la fibre moyenne en introduisant leur résultante et leur moment



On voit clairement sur l'exemple de la figure la perte d'information due à l'approximation RDM: deux systèmes de forces, appliqués sur une section donnée et ayant même torseur, ne seront pas distingués par la RDM.



Bien entendu, c'est le principe de Saint-Venant qui justifie cette approximation en affirmant que ces deux systèmes d'efforts produiront, sauf au voisinage immédiat de la section concernée, le même effet.

D'un point de vue géométrique, une poutre est une courbe définie

par son équation paramétrique

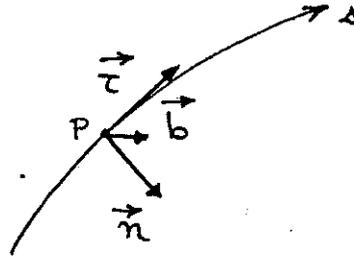
$$(6) \quad \vec{OP} = \vec{x}(\Delta)$$

où Δ est l'abscisse curviligne, seule variable d'espace. Nous noterons parfois d'un ' la dérivée par rapport à Δ et nous introduisons le vecteur unitaire tangent à la courbe par

$$(7) \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{OP}}{ds} = \vec{x}'(\Delta)$$

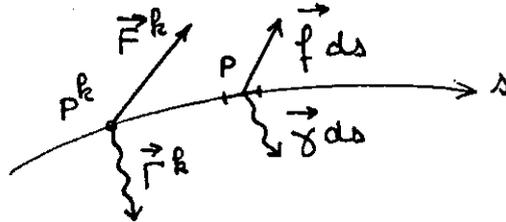
ou plus généralement le trièdre de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ par

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{d\vec{\tau}}{ds} &= \vec{\tau}' = -\frac{\vec{n}}{R} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} &= \vec{n}' = -\frac{\vec{\tau}}{R} - \frac{\vec{b}}{T} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} &= \vec{b}' = \frac{\vec{n}}{T} \end{aligned}$$

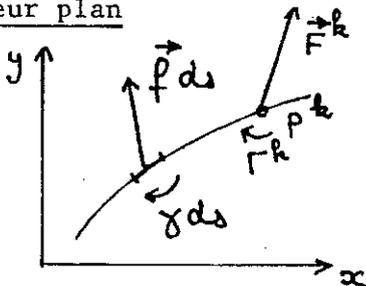


Les charges appliquées seront donc caractérisées par
 - un certain nombre de charges concentrées aux points $P^k (\Delta = \Delta^k)$, ces charges étant données par leurs torseurs $[\Phi^k]$, ou de manière équivalente par leurs résultantes \vec{F}^k et leurs moments résultants $\vec{\Gamma}^k$ au point P^k ;

- une densité linéique de charge donnée par son torseur $[\varphi(\Delta)]$ ou par sa résultante $\vec{f}(\Delta)$ et son moment résultant $\vec{\gamma}(\Delta)$ au point P



Un cas particulier important est celui des structures planes chargées dans leur plan



$$\vec{x}(\Delta) = \begin{bmatrix} x(\Delta) \\ y(\Delta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

La courbe est alors située dans le plan xy, les forces \vec{F}^k et $\vec{f}(\Delta)$ ont deux composantes (sur x et y) tandis que les moments $\vec{\Gamma}^k$ et $\vec{\gamma}(\Delta)$ n'ont qu'une composante (sur la troisième direction z)

$$(9) \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{f}(\Delta) = \begin{bmatrix} f_x(\Delta) \\ f_y(\Delta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} \quad \vec{\gamma}(\Delta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Une poutre est reliée au monde extérieur par un certain nombre de liaisons. L'étude générale des liaisons a été faite dans le cours de mécanique générale. Une liaison introduit un certain nombre de conditions cinématiques de liaison. Pour maintenir ces liaisons, il faut exercer des efforts de liaison qui sont des inconnues du problème.

Définition. Une liaison parfaite est un liaison pour laquelle la puissance virtuelle des efforts de liaison est nulle dans tout mouvement virtuel compatible avec la liaison.

La plupart des liaisons rencontrées en RDM sont des liaisons parfaites, et on peut alors caractériser les efforts de liaison. Dans le cas général, nous notons $[\Psi]$ le torseur des efforts de liaison, \vec{R} sa résultante et \vec{M} son moment résultant au point A où se trouve la liaison. De même, pour un mouvement de solide virtuel nous notons $\dot{\Omega}$ la rotation et \dot{V} la vitesse du point A. La puissance virtuelle des efforts de liaison est alors

$$(10) \quad \dot{\Phi}_e = \vec{R} \cdot \dot{V} + \vec{M} \cdot \dot{\Omega} = 0$$

Exemple 1. Encastrement ou liaison rigide.

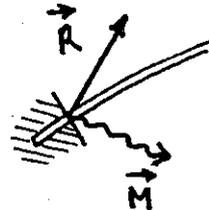
La liaison étant rigide, aucun mouvement n'est possible

$$(11) \quad \dot{V} = 0 \quad \dot{\Omega} = 0$$

et \vec{R} et \vec{M} peuvent être quelconques

$$(12) \quad \vec{R} \text{ qcq} \quad \vec{M} \text{ qcq}$$

On a donc 6 conditions scalaires de liaison et 6 inconnues de liaison.



Exemple 2. Rotule sphérique.

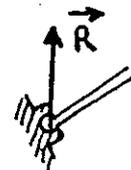
Toutes les rotations sont permises, mais la vitesse du point A est nulle

$$(13) \quad \dot{V} = 0 \quad \dot{\Omega} \text{ qcq}$$

de sorte que \vec{M} doit être nul par (10)

$$(14) \quad \vec{R} \text{ qcq} \quad \vec{M} = 0$$

On a donc 3 conditions de liaison et 3 inconnues de liaison.



On trouvera d'autres exemples dans le cours de mécanique rationnelle. Dans le cas particulier des structures chargées dans leur plan la relation (10) devient

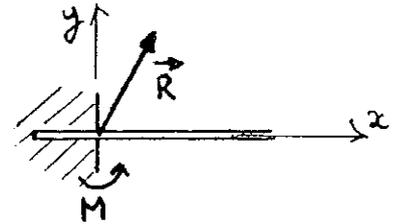
$$(15) \quad R_x \dot{V}_x + R_y \dot{V}_y + M \dot{\Omega} = 0$$

puisque \vec{R} et $\dot{\vec{V}}$ sont dans le plan, tandis que \vec{M} et $\dot{\Omega}$ lui sont perpendiculaires. On rencontre alors 3 types de liaison

a) Encastrement.

On obtient alors directement

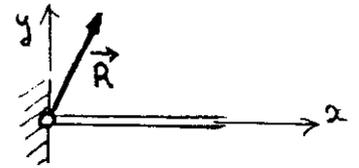
$$(16) \quad \begin{cases} \dot{\vec{V}} = 0 & \dot{\Omega} = 0 \\ \vec{R} \text{ qcq} & M \text{ qcq} \end{cases}$$



b) Articulation.

C'est l'analogie de la rotule, et il vient

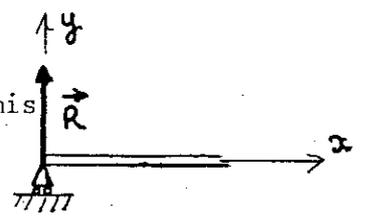
$$(17) \quad \begin{cases} \dot{\vec{V}} = 0 & \dot{\Omega} \text{ qcq} \\ \vec{R} \text{ qcq} & M = 0 \end{cases}$$



c) Appui simple.

La rotation et le mouvement dans une direction sont permis

$$(18) \quad \begin{cases} \dot{V}_x \text{ qcq} & \dot{V}_y = 0 & \dot{\Omega} \text{ qcq} \\ R_x = 0 & R_y \text{ qcq} & M = 0 \end{cases}$$



On rencontre parfois en RDM des liaisons non parfaites (appuis élastiques par exemple), mais cela reste exceptionnel.

2.3 LES EQUATIONS DE LA STATIQUE

Pour déterminer les efforts de liaison inconnus (liaisons de la structure avec l'extérieur ou bien liaisons entre poutres d'une même structure), il faut écrire les conditions d'équilibre pour chaque élément de la structure, c'est-à-dire écrire la loi fondamentale de la statique.

Loi de la statique. Un système matériel sera en équilibre si et seulement si le torseur de tous les efforts extérieurs exercés sur le système est nul.

Ceci nous donne donc pour chaque système, c'est-à-dire en fin de compte pour chaque solide constituant la structure, une équation de résultante et une équation de moment, soit dans le cas général 6 équations scalaires. De manière générale, si on exerce sur la poutre des efforts concentrés $[\Phi^k]$ des efforts répartis $[\varphi(\Delta)]$, et si elle est soumise à des liaisons $[\Psi^k]$

	<u>Point d'application</u>	<u>Torseur</u>	<u>Résultante</u>	<u>Moment</u>
<u>Charges concentrées</u>	P^k	$[\Phi^k]$	\vec{F}^k	\vec{F}^k
<u>Charges réparties</u>	$P(\Delta)$	$[\varphi(\Delta)]$	$\vec{f}(\Delta)$	$\vec{y}(\Delta)$
<u>Efforts de liaison</u>	A^k	$[\Psi^k]$	\vec{R}^k	\vec{M}^k

Alors, l'équation de résultante et l'équation de moment s'écrivent

$$(19) \quad \sum_k \vec{F}^k + \int_{A_0}^{A_1} \vec{f}(s) ds + \sum_K \vec{R}^K = 0$$

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_k (\vec{r}^k + \vec{OP}^k \wedge \vec{F}^k) + \int_{A_0}^{A_1} [\vec{y}(s) + \vec{OP} \wedge \vec{f}(s)] ds \\ + \sum_K (\vec{M}^K + \vec{OA}^K \wedge \vec{R}^K) = 0 \end{aligned} \right.$$

Dans le cas d'une structure plane chargée dans son plan, les équations de la statique se réduisent à trois: deux équations de résultante et une équation de moment

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_k F_x^k + \int_{A_0}^{A_1} f_x(s) ds + \sum_K R_x^K &= 0 \\ \sum_k F_y^k + \int_{A_0}^{A_1} f_y(s) ds + \sum_K R_y^K &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_k (x^k F_y^k - y^k F_x^k + \Gamma^k) + \int_{A_0}^{A_1} (x f_y - y f_x + \gamma) ds \\ + \sum_K (x^K R_y^K - y^K R_x^K + M^K) = 0 \end{aligned} \right.$$

en notant x^k, y^k les coordonnées des points P^k où sont exercées les charges concentrées, et x^K, y^K les coordonnées des liaisons A^K .

Connaissant les charges appliquées, les équations de la statique (19), (20), ou (21), (22), appliquées à chaque sous-système, nous donneront un certain nombre de relations entre les efforts de liaison.

Définition. Un système sera instable s'il est impossible de vérifier les équations de la statique.

Un système sera isostatique si les équations de la statique permettent de déterminer complètement les efforts de liaison.

Un système sera hyperstatique si ces équations ne suffisent pas.

Il s'agit ici de l'isostaticité ou de l'hyperstaticité externe, par opposition à l'hyperstaticité interne dont nous parlerons au Chapitre XIII.

Les liaisons introduisent un certain nombre n d'inconnues. Les équations de la statique appliquées à tous les sous-systèmes nous fournissent un certain nombre m d'équations indépendantes. En règle générale, c'est-à-dire sauf pour certaines géométries singulières, on a la situation suivante.

. Si $n < m$, le système est instable et peut se déformer librement. En particulier, si $m = n+1$, on obtient un système à un degré de liberté, appelé mécanisme.

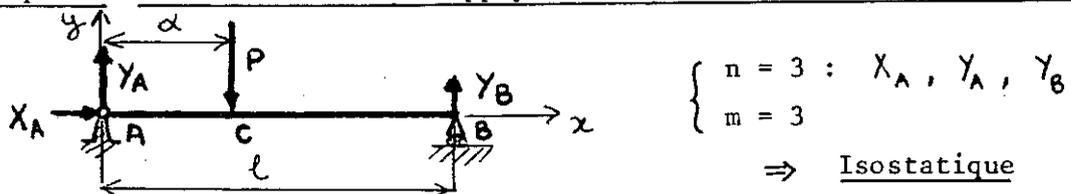
. Si $n = m$, le système est isostatique (externe), on peut calculer à partir des seules équations de la statique les inconnues de liaison, c'est-à-dire en fait tous les efforts exercés sur la structure.

. Si $n > m$, le système est hyperstatique de degré $h = n - m$, et on pourra calculer les efforts de liaison en fonction de h inconnues hyperstatiques qu'il s'agira ensuite de déterminer: il faudra lever l'hyperstaticité du système. C'est un des problèmes de base de la RDM.

3. EXEMPLES DE STRUCTURES

3.1 POUTRES DROITES

Exemple 1. Poutre articulée - appuyée soumise à une force concentrée



On a trois inconnues de liaison (2 composantes X_A, Y_A de la réaction en A d'après (17), 1 réaction verticale Y_B en B d'après (18)), et trois équations de la statique. Le système est donc isostatique.

Les équations de la statique (21), (22) donnent

$$(23) \quad X_A = 0$$

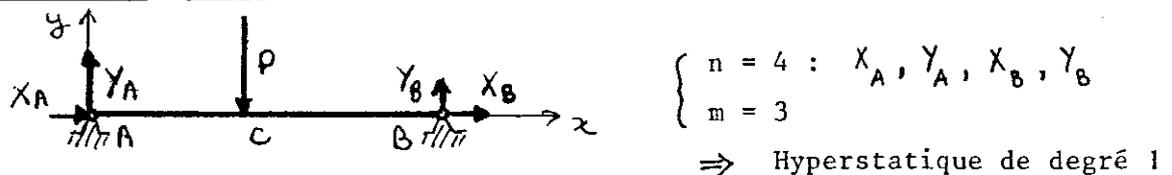
$$(24) \quad \begin{cases} Y_A + Y_B = 0 \\ -P\alpha + Y_B l = 0 \end{cases}$$

Système qui se résoud en (23) et

$$(25) \quad Y_B = \frac{P\alpha}{l} \quad Y_A = \frac{P(l-\alpha)}{l}$$

Le système est bien isostatique.

Exemple 1 bis. Poutre articulée - articulée.



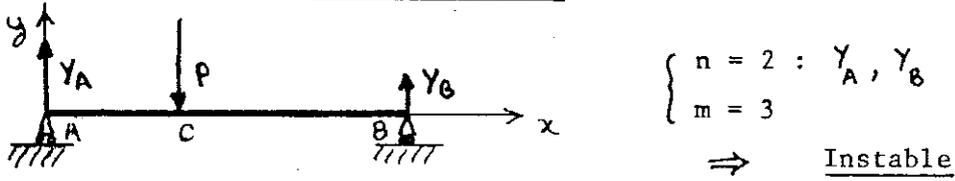
On a maintenant 4 inconnues de liaison, et (23) devient

$$(26) \quad X_A + X_B = 0$$

tandis que (24) reste inchangée et permet d'écrire (25). Ainsi le système est hyperstatique de degré 1, car on ne peut pas calculer X_A . Mais cela

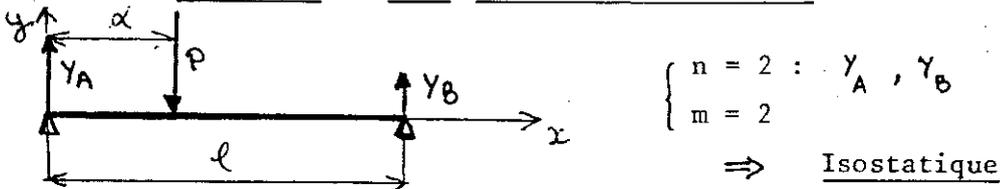
n'a guère d'importance, car pour des poutres droites chargées transversalement, seuls importent les efforts verticaux.

Exemple 1 ter. Poutre appuyée - appuyée.



On a maintenant 2 inconnues de liaison, et (23) devient simplement $0 = 0$, tandis que (24) et donc (25) restent inchangés. La poutre est instable, car elle ne pourrait supporter aucun effort horizontal, mais, à nouveau, cela n'importe guère si l'on se limite à des chargement verticaux.

Pour les poutres droites, nous conviendrons d'ignorer les efforts horizontaux et, par suite, de considérer les trois exemples précédents comme définissant une seule et même poutre sur deux appuis



Par conséquent, on ne considère plus que des efforts verticaux (transversaux) et les trois équations d'équilibre (21), (22) se réduisent à deux

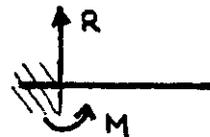
$$(27) \quad \sum_k F^k + \sum_k R^k + \int_0^l f(x) dx = 0$$

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_k (x^k F^k + r^k) + \sum_k (x^k R^k + M^k) \\ + \int_0^l x f(x) dx = 0 \end{array} \right.$$

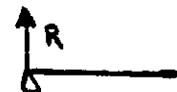
où l'on a noté $F^k = F_y^k$ ($F_x^k = 0$) etc....

Il en résulte également que l'on n'envisagera plus que deux types de liaisons

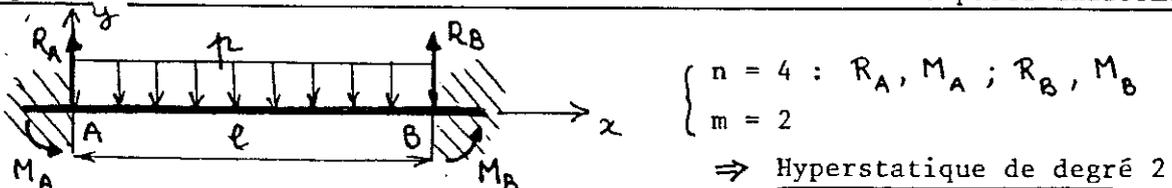
a) L'encastrement, qui introduit deux inconnues de liaison R et M



b) L'appui, qui introduit une inconnue de liaison R



Exemple 2. Poutre encadrée - encadrée soumise à un effort réparti uniforme.



Les équations de la statique (27) et (28) donnent directement

$$(29) \quad R_A + R_B - pl = 0 \quad \text{Rés.}$$

$$(30) \quad M_A + M_B + R_B l - \frac{pl^2}{2} = 0 \quad \text{Mt / A}$$

et si on choisit comme inconnues hyperstatiques R_A et M_A , on obtient

$$(31) \quad \begin{cases} R_B = pl - R_A \\ M_B = -M_A + R_A l - \frac{pl^2}{2} \end{cases}$$

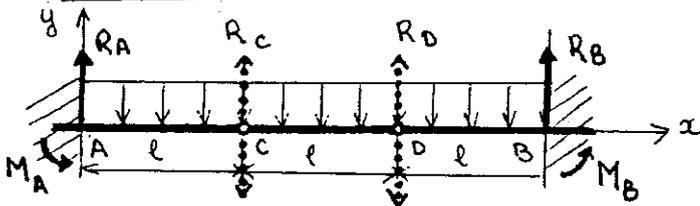
Le système est hyperstatique de degré 2.

On peut utiliser la symétrie pour réduire le degré d'hyperstativité à 1. De la symétrie et de (29), (30) on tire en effet

$$(32) \quad R_A = R_B = \frac{pl}{2} \quad M_A = -M_B$$

et il subsiste une seule inconnue hyperstatique M_A .

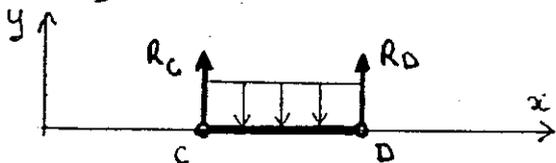
Exemple 3. Poutre cantilever



$$\begin{cases} n = 6 : R_A, R_B, R_C, R_D, M_A, M_B \\ m = 6 \\ \Rightarrow \text{Isostatique} \end{cases}$$

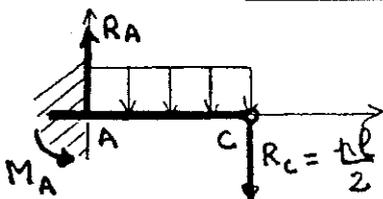
On a 6 inconnues de liaison (les deux encastremets donnent 4 inconnues et les deux articulations intermédiaires en donnent 2). Or, on doit écrire l'équilibre des 3 poutres AC, CD et BD, ce qui fournira 6 équations, le système sera donc isostatique.

L'équilibre de la poutre CD donne (en notant R_C et R_D la valeur algébrique des efforts exercés par AC et BD sur CD, et donc $-R_C$ et $-R_D$ les efforts exercés par CD sur AC et BD)



$$\begin{cases} R_C + R_D - pl = 0 \\ R_D l - \frac{pl^2}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow R_C = R_D = \frac{pl}{2}$$

De même, l'équilibre de AC donne



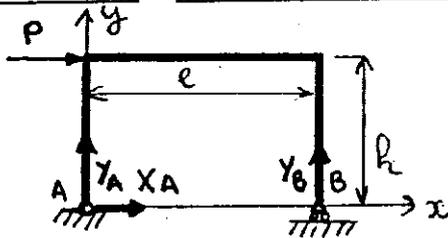
$$\begin{cases} R_A = pl + R_C = \frac{3pl}{2} \\ M_A = R_C l + \frac{pl^2}{2} = pl^2 \end{cases}$$

et l'équilibre de BD donne de la même manière R_B et M_B . Finalement, on obtient

$$(33) \quad R_A = R_B = \frac{3pl}{2}, \quad R_C = R_D = \frac{pl}{2}, \quad M_A = -M_B = pl^2$$

3.2 STRUCTURES PLANES

Exemple 1. Portique articulé - appuyé.



$$\begin{cases} n = 3 & X_A, Y_A, Y_B \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Isostatique}$$

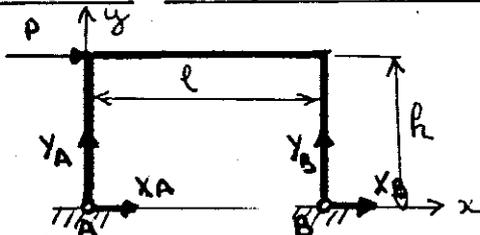
On a trois inconnues de liaison (deux pour l'articulation en A, une pour l'appui simple en B), et les trois équations de la statique s'écrivent

$$(34) \quad \begin{cases} X_A + P = 0 & \text{Résultante / x} \\ Y_A + Y_B = 0 & \text{Résultante / y} \\ Y_B l - Ph = 0 & \text{Moment / A} \end{cases}$$

et le système est isostatique

$$(35) \quad X_A = -P, \quad Y_B = -Y_A = \frac{Ph}{l}$$

Exemple 2. Portique articulé - articulé.



$$\begin{cases} n = 4 & X_A, Y_A, X_B, Y_B \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Hyperstatique de degré 1}$$

On a 4 inconnues de liaison et les équations (34) deviennent

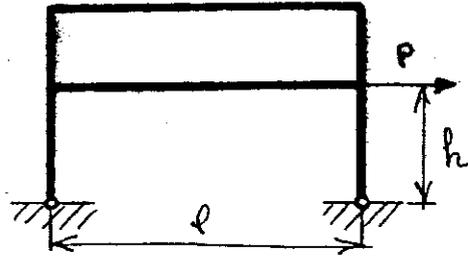
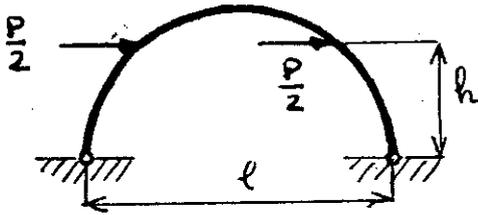
$$(36) \quad \begin{cases} X_A + X_B + P = 0 & \text{Résultante / x} \\ Y_A + Y_B = 0 & \text{Résultante / y} \\ Y_B l - Ph = 0 & \text{Moment / A} \end{cases}$$

Le système est hyperstatique de degré 1, et on prendra comme inconnue hyperstatique X_A

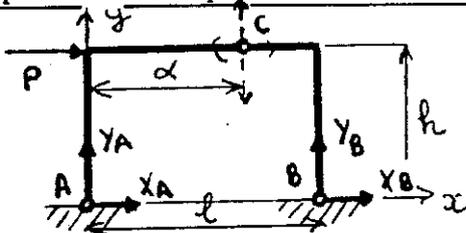
$$(37) \quad X_B = -P - X_A, \quad Y_B = -Y_A = \frac{Ph}{l}$$

Remarque 1. Le caractère isostatique ou hyperstatique dépend uniquement de la structure et non du chargement.

Remarque 2. Les résultats de l'application de la statique dépendent de la géométrie et de la nature des appuis et du torseur des charges appliquées, mais non de la forme de la structure et de la manière précise dont sont appliquées les charges. Par exemple, les résultats (37) restent variables pour les deux structures suivantes

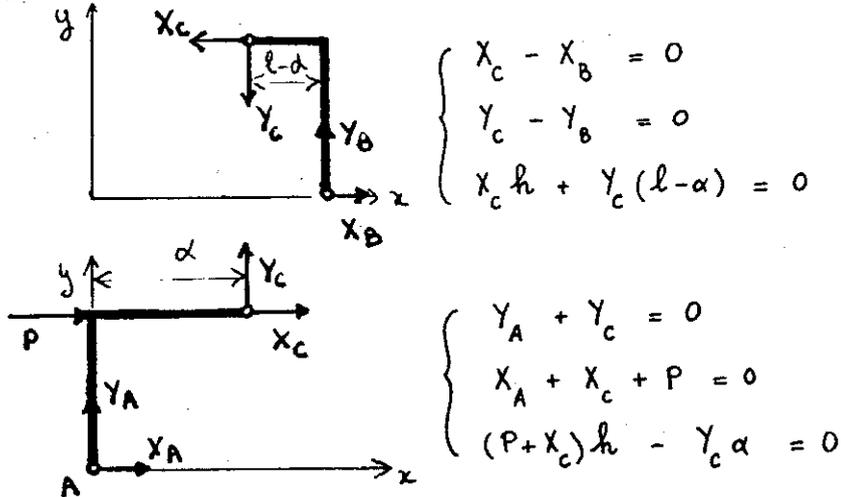


Exemple 3. Portique à trois articulations.



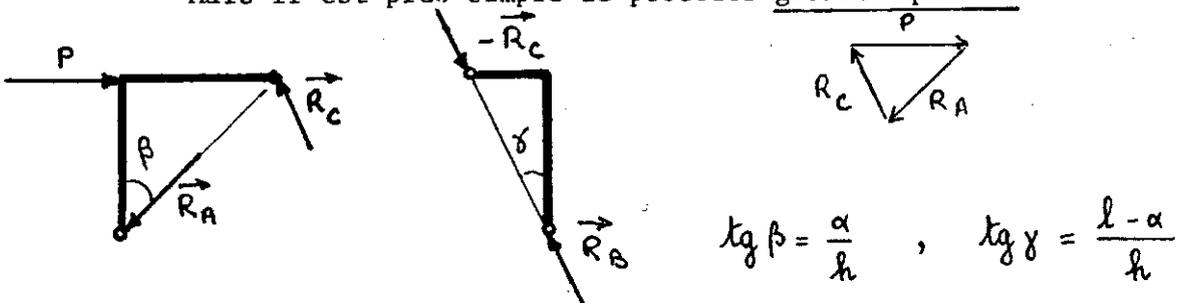
$$\begin{cases} n = 6 & X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C \\ m = 6 \end{cases} \Rightarrow \text{Isostatique}$$

On a 6 inconnues de liaison (2 pour chaque articulation), et 2 solides, donc 6 équations statiques. Le système est donc isostatique. Pour calculer les inconnues de liaison \vec{R}_A, \vec{R}_B et \vec{R}_C , action de BC sur AC, on peut procéder analytiquement en écrivant l'équilibre de BC puis de AC



$$(38) \quad Y_B = Y_C = -Y_A = \frac{Ph}{l} \quad X_B = X_C = -\frac{P(l-\alpha)}{l} \quad X_A = -\frac{P\alpha}{l}$$

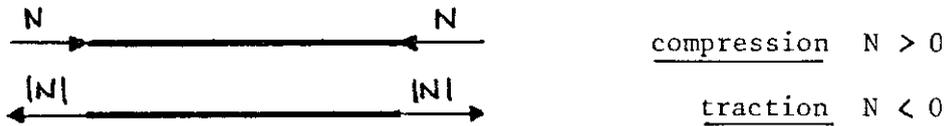
Mais il est plus simple de procéder géométriquement.



En effet, l'équilibre de BC soumis à deux forces \vec{R}_B et $-\vec{R}_C$ montre que $\vec{R}_B = \vec{R}_C$ est porté par BC. L'équilibre de AC, soumis à trois forces \vec{P} , \vec{R}_C et \vec{R}_A , montre que ces trois forces doivent être concurrentes, c'est-à-dire que \vec{R}_A est portée par AC. On en tire les valeurs de \vec{R}_A et \vec{R}_C en écrivant que la somme vectorielle de ces trois forces est nulle, ce qui donne (38).

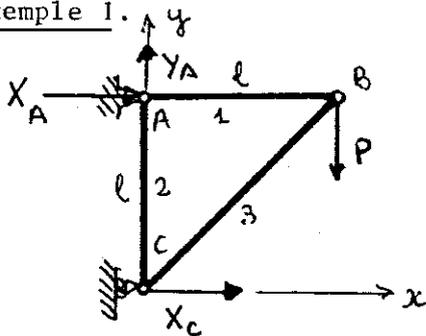
3.3 TREILLIS

Un treillis est une structure formée de barres articulées et chargées aux noeuds. Une barre est donc soumise à deux forces exercées à ses deux extrémités. Ces deux forces doivent donc être opposées et elles définissent la "tension" N dans la barre. Par convention, nous supposons $N > 0$ en compression et $N < 0$ en traction



Ainsi, si l'on a b barres et e inconnues de liaison entre le treillis et l'extérieur, on aura donc $n = b + e$ inconnues de liaison. D'autre part, il reste à écrire l'équilibre de tous les noeuds ce qui nous donnera, si le treillis comporte q noeuds, $m = 3q$ équations dans le cas général et $m = 2q$ équations dans le cas plan.

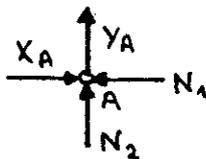
Exemple 1.



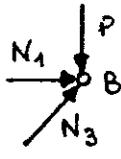
$$\begin{aligned} b &= 3 & \left. \begin{array}{l} N_1, N_2, N_3 \end{array} \right\} & \Rightarrow n = 6 \\ e &= 3 & \left. \begin{array}{l} X_C, X_A, Y_A \end{array} \right\} & \\ q &= 3 & & \Rightarrow m = 6 \end{aligned}$$

\Rightarrow Isostatique

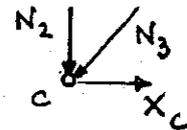
On écrit l'équilibre des 3 noeuds en remarquant que l'effort exercé par une barre sur le noeud est opposé à l'effort exercé par le noeud sur la barre et donc dirigé de la barre vers le noeud si $N_i > 0$



$$\begin{aligned} X_A - N_1 &= 0 \\ Y_A - N_2 &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} - P &= 0 \\ N_1 + N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} N_2 + N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \\ N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} - X_C &= 0 \end{aligned}$$

ce qui donne

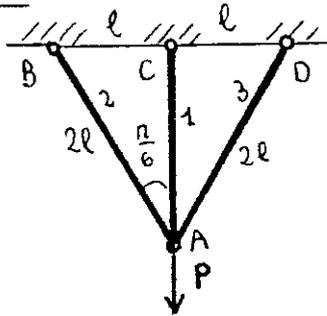
$$(39) \left\{ \begin{array}{l} N_3 = P\sqrt{2} \\ X_A = -P \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} N_1 = N_2 = -P \\ Y_A = -P \end{array} \quad X_C = P$$

Le système est isostatique et la barre 3 est comprimée, tandis que les barres 1 et 2 sont tendues.

Remarque. On aurait pu écrire l'équilibre global du treillis et calculer directement X_A , Y_A et X_C puis ensuite écrire l'équilibre des noeuds, ce qui n'aurait plus donné que trois équations indépendantes. Plus générale-

ment, on peut remplacer trois des m équations d'équilibre des noeuds par les trois équations exprimant l'équilibre global du treillis. De même, il est parfois plus commode d'écrire, plutôt que l'équilibre des noeuds, l'équilibre d'autres parties du système. Sous réserve de n'oublier aucune équation, cela conduit bien sûr au même résultat.

Exemple 2.



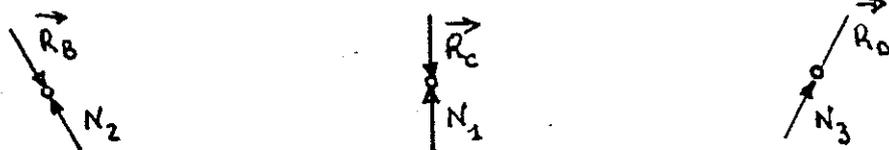
$$b = 3 \quad N_1, N_2, N_3 \quad \left. \vphantom{b} \right\} \Rightarrow n = 9$$

$$e = 6 \quad \vec{R}_B, \vec{R}_C, \vec{R}_D \quad \left. \vphantom{e} \right\}$$

$$q = 4 \quad \Rightarrow m = 8$$

\Rightarrow Hyperstatique de degré 1

L'équilibre des noeuds B, C et D donne $\vec{R}_B, \vec{R}_C, \vec{R}_D$.



L'équilibre du noeud A donne la relation

$$\begin{cases} \frac{N_2}{2} - \frac{N_3}{2} = 0 \\ N_1 + (N_2 + N_3) \frac{\sqrt{3}}{2} + P = 0 \end{cases}$$

et, en prenant comme inconnue hyperstatique N_2 , on trouve

$$(40) \quad N_3 = N_2, \quad N_1 = - (P + \sqrt{3} N_2)$$

Le treillis est hyperstatique de degré 1.

