

Chapitre IX

METHODES VARIATIONNELLES

1. THEOREMES VARIATIONNELS

Dans tout ce chapitre, nous nous intéresserons à un problème statique régulier (§VI.1.1) pour un matériau élastique linéaire quelconque (isotrope ou anisotrope) caractérisé par un tenseur d'élasticité A_{ijkl} . Pour simplifier l'écriture, nous supposerons le matériau homogène, $A_{ijkl} = C_{ijkl}$, et nous prendrons les CL sous la forme mixte (VI.7). Pour un autre problème régulier, l'écriture serait plus lourde, mais les résultats et les raisonnements seraient identiques.

1.1 NOTIONS FONDAMENTALES

Nous cherchons donc un champ de déplacements et un champ de contraintes vérifiant les équations suivantes

- (1) $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$
- (2) $\sigma_{ij} n_j |_{S_f} = T_i^d$
- (3) $u_i |_{S_u} = u_i^d$
- (4) $\sigma_{ij} = A_{ijkl} E_{kl}$
- (5) $E_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$

Parmi ces équations, certaines sont de nature statique et portent uniquement sur les contraintes - les équations (1) et (2) - d'autres sont de nature cinématique et portent uniquement sur les déplacements - (3) -. Enfin, un troisième groupe d'équations - (4) - relie les contraintes et les déplacements.

Définition 1. Un champ de déplacements \tilde{u}_i est un champ cinématiquement admissible (\tilde{u}_i est un CCA) s'il vérifie les conditions cinématiques (3).

(6) $\tilde{u}_i |_{S_u} = u_i^d$

Partant d'un CCA \tilde{u}_i , on peut lui associer un champ de déformations $\tilde{\epsilon}_{ij}$ par (5), puis un champ de contraintes $\tilde{\sigma}_{ij}$ par la loi de comportement (4), mais ce champ de contraintes n'a aucune raison de vérifier les conditions statiques (1) et (2).

Définition 2. Un champ de contraintes $\hat{\sigma}_{ij}$ est un champ statiquement admissible ($\hat{\sigma}_{ij}$ est un CSA) s'il vérifie les conditions statiques (1) et (2)

$$(7) \quad \hat{\sigma}_{ij,j} + f_i = 0 \quad , \quad \hat{\sigma}_{ij} n_j |_{S_f} = T_i^d$$

Partant d'un CSA $\hat{\sigma}_{ij}$, on peut lui associer un champ de déformations $\hat{\epsilon}_{ij}$ par la loi de comportement (4), mais, puisque $\hat{\sigma}_{ij}$ ne doit pas vérifier les équations de Beltrami, on ne pourra en général pas calculer un déplacement \hat{u}_i par intégration de (5). A fortiori, les conditions (3) ne seront elles pas vérifiées.

Avec cette terminologie, le problème d'élasticité (1) à (5) se ramène à la recherche d'un CCA \tilde{u}_i et d'un CSA $\hat{\sigma}_{ij}$ reliés par la loi de comportement (4). Toute la suite de ce chapitre sera basée sur le lemme suivant - généralisation du théorème des travaux virtuels (III.46) -.

Lemme fondamental. Soit \tilde{u}_i^* un champ de déplacements (virtuels) quelconque et $\hat{\sigma}_{ij}$ un CSA, alors

$$(8) \quad \iint_{\Omega} \hat{\sigma}_{ij} \tilde{\epsilon}_{ij}^* dv = \iint_{\Omega} f_i \tilde{u}_i^* dv + \iint_{\partial\Omega} \hat{\sigma}_{ij} n_j \tilde{u}_i^* dS$$

Dem. La démonstration est directement calquée sur celle du § I.2.1. Nous partons du premier membre et utilisons la symétrie de $\hat{\sigma}_{ij}$.

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \hat{\sigma}_{ij} \tilde{\epsilon}_{ij}^* dv &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \hat{\sigma}_{ij} (\tilde{u}_{i,j}^* + \tilde{u}_{j,i}^*) dv = \iint_{\Omega} \hat{\sigma}_{ij} \tilde{u}_{i,j}^* dv \\ &= \iint_{\Omega} (\hat{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i^*)_{,j} dv - \iint_{\Omega} \hat{\sigma}_{ij,j} \tilde{u}_i^* dv \end{aligned}$$

Par utilisation du théorème de la divergence, le premier terme donne l'intégrale de surface du second membre de (8), tandis que le second terme donne l'intégrale de volume par (7). On retrouve le théorème des travaux virtuels en prenant comme CSA $\hat{\sigma}_{ij}$ le champ solution σ_{ij} .

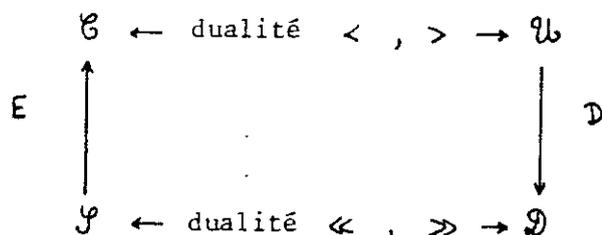
Théorème des travaux virtuels. Pour tout champ de déplacements virtuels \hat{u}_i

$$(9) \quad \int_{\Omega} \sigma_{ij} \hat{\epsilon}_{ij} dv = \int_{\Omega} f_i \hat{u}_i dv + \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j \hat{u}_i dS$$

D'un point de vue algébrique, et en revenant à la structure décrite à la fin du § III.2.3, on peut généraliser (III.50) en

$$(10) \quad \langle \hat{E}, \hat{\sigma} \rangle = \langle \hat{u}, \varphi \rangle$$

valable pour tout champ de déplacements \hat{u}_i et tout CSA $\hat{\sigma}_{ij}$. Plus précisément, on a la situation suivante



L'opérateur D est l'opérateur

$$(11) \quad \hat{u}_i \longmapsto \hat{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{j,i})$$

donnant les déformations en fonction des déplacements, et l'opérateur E est l'opérateur

$$(12) \quad \hat{\sigma}_{ij} \longmapsto (\hat{f}_i = -\hat{\sigma}_{ij,j}, \hat{T}_i = \hat{\sigma}_{ij} n_j)$$

associant au champ de contraintes $\hat{\sigma}_{ij}$ les forces volumiques \hat{f}_i et les efforts de surface \hat{T}_i qui lui correspondent. La relation (10) montre que les opérateurs D et E sont adjoints l'un de l'autre. C'est une structure que l'on retrouvera dans toutes les théories de Mécanique des Solides en petite perturbations.

Il faut remarquer que, bien que nous les ayons présentés dans un contexte d'élasticité, toutes les définitions et tous les résultats de ce paragraphe sont indépendants de la loi de comportement; en particulier, on les retrouvera en plasticité. La loi de comportement se présente comme une relation entre les déformations et les contraintes (voir § IV.1.3.). En élasticité, cette relation est une application linéaire reliant les valeurs instantanées des déformations et des contraintes, cette application étant de plus supposée symétrique (auto-adjointe) et définie positive (§ V.1.1).

1.2 LE THEOREME DE L'ENERGIE POTENTIELLE

Soit \tilde{u}_i un CCA, on calcule $\tilde{\epsilon}_{ij}$ par (5), et on peut donc définir l'énergie de déformation du CCA \tilde{u}_i par

$$(13) \quad W(\tilde{\epsilon}_{ij}) = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} A_{ijkl} \tilde{\epsilon}_{ij} \tilde{\epsilon}_{kl} \, dv = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\epsilon}_{ij} \, dv$$

On introduit également le travail des efforts (volumiques et surfaciques) donnés dans le déplacement \tilde{u}_i

$$(14) \quad \tilde{T}_f^d(\tilde{u}_i) = \iiint_{\Omega} f_i \tilde{u}_i \, dv + T_f^d(\tilde{u}_i) \quad , \quad T_f^d(\tilde{u}_i) = \iint_{S_f} T_i^d \tilde{u}_i \, dS$$

Pour les CL mixtes (VI.7) choisies, le travail des efforts surfaciques donnés, T_f^d , s'exprime simplement. Pour un problème régulier quelconque, l'expression peut être plus compliquée, mais, comme on l'a vu au § VI.1.1, le travail des efforts de surface se décompose sans ambiguïté en T_u^d et T_f^d (voir par exemple (VI.10) et le § 1.4).

Définition. L'énergie potentielle du CCA \tilde{u}_i est

$$(15) \quad K(\tilde{u}_i) = W(\tilde{\epsilon}_{ij}) - \tilde{T}_f^d(\tilde{u}_i)$$

On démontre alors

Théorème de l'énergie potentielle. Parmi tous les CCA, la (ou les) solution u_i minimise l'énergie potentielle

$$(16) \quad K(u_i) \leq K(\tilde{u}_i) \quad \forall \tilde{u}_i \text{ CCA}$$

Dem. Soit u_i une solution du problème (1) à (5), et \tilde{u}_i un CCA. Nous définissons

$$(17) \quad \tilde{u}_i = u_i + \tilde{u}_i^0 \quad , \quad \tilde{u}_i^0|_{S_u} = 0$$

et \tilde{u}_i^0 est un CCA pour le problème homogène associé

$$\begin{aligned} K(\tilde{u}_i) &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} A_{ijkl} (\epsilon_{ij} + \tilde{\epsilon}_{ij}^0) (\epsilon_{kl} + \tilde{\epsilon}_{kl}^0) \, dv \\ &\quad - \iiint_{\Omega} f_i (u_i + \tilde{u}_i^0) \, dv - \iint_{S_f} T_i^d (u_i + \tilde{u}_i^0) \, dS \\ &= K(u_i) + \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} A_{ijkl} \tilde{\epsilon}_{ij}^0 \tilde{\epsilon}_{kl}^0 \, dv \\ &\quad + \iiint_{\Omega} A_{ijkl} \tilde{\epsilon}_{ij}^0 \epsilon_{kl} \, dv - \iiint_{\Omega} f_i \tilde{u}_i^0 \, dv - \iint_{S_f} T_i^d \tilde{u}_i^0 \, dS \end{aligned}$$

Mais u_i est solution, et le théorème des travaux virtuels (9) donne, en prenant $\tilde{u}_i^* = \tilde{u}_i^0$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} A_{ijkl} \tilde{\epsilon}_{ij}^0 \epsilon_{kl} dv &= \iint_{\Omega} \sigma_{ij} \tilde{\epsilon}_{ij}^0 dv \\ &= \iint_{\Omega} f_i \tilde{u}_i^0 dv + \iint_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j \tilde{u}_i^0 dS \\ &= \iint_{\Omega} f_i \tilde{u}_i^0 dv + \iint_{S_f^d} T_i^d \tilde{u}_i^0 dS + \iint_{S_u} \sigma_{ij} n_j \tilde{u}_i^0 dS \end{aligned}$$

puisque sur S_f on a (2), et que, d'après (3) et (6), \tilde{u}_i^0 est nul sur S_u .
Finalement, on obtient donc

$$(18) \quad K(\tilde{u}_i) = K(u_i) + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} A_{ijkl} \tilde{\epsilon}_{ij}^0 \tilde{\epsilon}_{kl}^0 dv$$

Or le second terme est positif, puisque la matrice d'élasticité est définie positive (§ V.1.1). Ceci démontre (16). cqfd

On tire également de cette démonstration

Théorème d'existence et d'unicité. Pour un problème de type I ou un problème mixte, il existe une solution unique.

Pour un problème de type II, il existe une solution définie à un mouvement de solide rigide près SSI

$$(19) \quad \begin{aligned} \iint_{\Omega} f_i dv + \iint_{\partial\Omega} T_i^d dS &= 0 \\ \iint_{\Omega} \epsilon_{ijk} x_j f_k dv + \iint_{\partial\Omega} \epsilon_{ijk} x_j T_k^d &= 0 \end{aligned}$$

càd SSI les efforts appliqués forment un torseur nul.

Dem. Unicité. Soit u_i^1 et u_i^2 deux solutions, ils sont aussi CCA, et l'application de (16) montre que

$$K(u_i^1) = K(u_i^2)$$

soit, d'après (18)

$$(20) \quad \iint_{\Omega} A_{ijkl} (\epsilon_{ij}^1 - \epsilon_{ij}^2) (\epsilon_{kl}^1 - \epsilon_{kl}^2) dv = 0$$

Il en résulte, puisque A_{ijkl} est défini positif

$$(21) \quad \epsilon_{ij}^1 = \epsilon_{ij}^2, \quad u_i^1 = u_i^2 + \epsilon_{ijk} \omega_j x_k + \alpha_i$$

et les deux solutions ne diffèrent que d'un mouvement de solide. Si S_u existe

(plus précisément, si S_u est de mesure non nulle), les CL en déplacements permettent de montrer que $\vec{\omega} = \vec{\alpha} = 0$ et donc $u_i^1 = u_i^2$, d'où l'unicité. Par contre, si S_u est vide (problème de type II), on ne peut plus éliminer ce mouvement de solide qui reste indéterminé.

Existence. L'existence d'une solution peut par exemple se démontrer en construisant, dans un espace fonctionnel approprié, une suite minimisante pour la fonctionnelle K - voir cours de Mathématiques -. Pour un problème de type II, la condition d'équilibre (19) apparaît naturellement, car sinon la fonctionnelle n'est pas minorée. Pour les autres problèmes, cette condition d'équilibre n'apparaît pas, car les efforts donnés sont équilibrés par les efforts de liaison (inconnus a priori) s'exerçant à travers S_u .

1.3 LE THEOREME DE L'ENERGIE COMPLEMENTAIRE

Si nous partons d'un CSA $\hat{\sigma}_{ij}$, nous définissons son énergie de déformation par

$$(22) \quad \hat{W}(\hat{\sigma}_{ij}) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \Lambda_{ijkl} \hat{\sigma}_{ij} \hat{\sigma}_{kl} dv = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \hat{\sigma}_{ij} \hat{\epsilon}_{ij} dv$$

et son travail dans les déplacements donnés par

$$(23) \quad T_u^d(\hat{\sigma}_{ij}) = \iint_{S_u} \hat{\sigma}_{ij} n_j u_i^d dS$$

et nous définissons

[Définition. L'énergie complémentaire du CSA $\hat{\sigma}_{ij}$ est

$$(24) \quad H(\hat{\sigma}_{ij}) = T_u^d(\hat{\sigma}_{ij}) - \hat{W}(\hat{\sigma}_{ij})$$

et on obtient le résultat suivant

[Théorème de l'énergie complémentaire. Parmi tous les CSA, la solution σ_{ij} maximise l'énergie complémentaire

$$(25) \quad H(\hat{\sigma}_{ij}) \leq H(\sigma_{ij}) \quad \forall \hat{\sigma}_{ij} \text{ CSA}$$

Dem. Soit σ_{ij} la solution, $\hat{\sigma}_{ij}$ un CSA, et posons

$$(26) \quad \hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \hat{\sigma}_{ij}^0$$

et $\hat{\sigma}_{ij}^0$ est un CSA pour le problème homogène associé ($f_i^0 = 0$, $T_i^{d0} = 0$)

$$(27) \quad \hat{\sigma}_{ij,j}^{\circ} = -f_i^{\circ} = 0, \quad \hat{\sigma}_{ij}^{\circ} n_j |_{S_f} = T_i^{do} = 0$$

$$\begin{aligned} H(\hat{\sigma}_{ij}) &= -\frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \Lambda_{ijklkh} (\sigma_{ij} + \hat{\sigma}_{ij}^{\circ}) (\sigma_{kh} + \hat{\sigma}_{kh}^{\circ}) dv \\ &\quad + \iint_{S_u} (\sigma_{ij} + \hat{\sigma}_{ij}^{\circ}) n_j u_i^d dS \\ &= H(\sigma_{ij}) - \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \Lambda_{ijklkh} \hat{\sigma}_{ij}^{\circ} \hat{\sigma}_{kh}^{\circ} dv \\ &\quad - \iint_{\Omega} \Lambda_{ijklkh} \hat{\sigma}_{ij}^{\circ} \sigma_{kh} dv + \iint_{S_u} \hat{\sigma}_{ij}^{\circ} n_j u_i^d dS \end{aligned}$$

En appliquant le lemme fondamental à $\hat{\sigma}_{ij}^{\circ}$, CSA pour le problème homogène associé, et à u_i , déplacement solution, on obtient

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \Lambda_{ijklkh} \hat{\sigma}_{ij}^{\circ} \sigma_{kh} dv &= \iint_{\Omega} \hat{\sigma}_{ij}^{\circ} \epsilon_{ij} dv \\ &= \iint_{\Omega} f_i^{\circ} u_i dv + \iint_{S_f} T_i^{do} u_i dS + \iint_{S_u} \hat{\sigma}_{ij}^{\circ} n_j u_i dS \end{aligned}$$

Les deux premiers termes disparaissent d'après (27), tandis que sur S_u , $u_i = u_i^d$ par (3). Il vient finalement

$$(28) \quad H(\hat{\sigma}_{ij}) = H(\sigma_{ij}) - \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \Lambda_{ijklkh} \hat{\sigma}_{ij}^{\circ} \hat{\sigma}_{kh}^{\circ} dv$$

d'où la conclusion, puisque, comme A_{ijklkh} , la matrice Λ_{ijklkh} est définie positive.

Théorème de comparaison: Soit (u_i, σ_{ij}) la solution d'un problème régulier, \tilde{u}_i un CCA et $\hat{\sigma}_{ij}$ un CSA

$$(29) \quad H(\hat{\sigma}_{ij}) \leq H(\sigma_{ij}) = K(u_i) \leq K(\tilde{u}_i)$$

Les deux théorèmes de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire permettent d'écrire les deux inégalités. Il reste donc à montrer l'égalité

$$(30) \quad K(u_i) = H(\sigma_{ij})$$

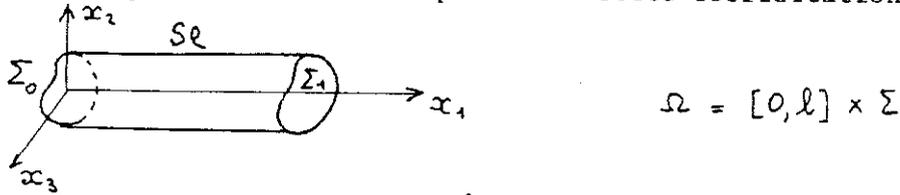
pour la solution.

Dem. Pour la solution, on a

$$W(u_i) = \hat{W}(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv$$

A partir de (15) et (24), il vient alors

Ainsi, le théorème de comparaison permet un encadrement de la solution par des solutions approchées. A titre d'application, nous allons montrer comment il permet d'encadrer le module de rigidité à la torsion d'un arbre cylindrique (§ VII.2). Nous avons formulé au § VII.2.3 le problème régulier le plus commode correspondant à cette sollicitation



$$(33) \quad \begin{cases} S_l : [0, l] \times \partial\Sigma & \sigma_{ij} n_j = 0 \\ \Sigma_0 : x_1 = 0 & \sigma_{11} = 0, \quad u_2 = u_3 = 0 \\ \Sigma_1 : x_1 = l & \sigma_{11} = 0, \quad u_2 = -\alpha l x_3, \quad u_3 = \alpha l x_2 \end{cases}$$

Un CSA $\hat{\sigma}_{ij}$ doit vérifier les équations d'équilibre et les CL de type statique, à savoir

$$(34) \quad \begin{cases} \hat{\sigma}_{ij} n_j = 0 & \text{sur } [0, l] \times \partial\Sigma \\ \hat{\sigma}_{11} = 0 & \text{en } x_1 = 0, \quad x_1 = l \end{cases}$$

Nous inspirant de la solution du § VII.2.2, nous prenons un champ de contraintes de la forme (VII.48). Les CL (34) sur les extrémités sont alors automatiquement vérifiées. Comme au § VII.2.2, les équations d'équilibre permettent d'introduire une fonction de contrainte $\hat{\Phi}$ et les CL (34) sur la surface latérale exigent que $\hat{\Phi}$ soit nulle sur $\partial\Sigma$. Par contre, pour un CSA, la fonction $\hat{\Phi}$ ne doit pas vérifier l'équation (VII.34) qui résultait des équations de Beltrami. Ainsi, un CSA est défini par une fonction $\hat{\Phi}(x_2, x_3)$ nulle sur $\partial\Sigma$ avec

$$(35) \quad \hat{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\sigma}_{12} & \hat{\sigma}_{13} \\ \hat{\sigma}_{12} & 0 & 0 \\ \hat{\sigma}_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_{12} = \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x_3}, \quad \hat{\sigma}_{13} = -\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x_2}$$

Pour calculer l'énergie de déformation, en élasticité isotrope, on utilise les formules suivantes, qui s'obtiennent directement à partir des formules du chapitre V

$$(36) \quad \begin{cases} w(\sigma_{ij}) = w(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \\ = \frac{1}{2E} \left\{ \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - 2\nu(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) \right\} \\ \quad + \frac{1}{2G} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) \\ = \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 + 2\mu (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2) \end{cases}$$

et à partir de (35) on obtient

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \hat{W}(\hat{\sigma}_{ij}) &= \frac{1}{2G} \int_{\Sigma} \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x_2} \right)^2 \right\} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \frac{l}{2G} \int_{\Sigma} \left\{ \left(\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x_2} \right)^2 \right\} dx_2 dx_3 \end{aligned} \right.$$

Pour calculer T_u^d et T_f^d il faut expliciter la décomposition (VI.8) pour le problème (33)

$$\begin{aligned} \iint_{\partial \Sigma} \sigma_{ij} n_j u_i dS &= \iint_{S_2} T_i^d u_i dS + \iint_{\Sigma_1} [\sigma_{11}^d u_1 + \sigma_{12}^d u_2 + \sigma_{13}^d u_3] dx_2 dx_3 \\ &\quad - \iint_{\Sigma_0} [\sigma_{11}^d u_1 + \sigma_{12}^d u_2 + \sigma_{13}^d u_3] dx_2 dx_3 \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{T_f^d(u_i)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{T_u^d(\sigma_{ij})} \end{aligned}$$

et compte-tenu de la valeur des données (33)

$$(38) \quad T_f^d(u_i) = 0$$

$$(39) \quad T_u^d(\hat{\sigma}_{ij}) = \alpha l \iint_{\Sigma_1} (x_2 \hat{\sigma}_{13} - x_3 \hat{\sigma}_{12}) dx_2 dx_3 = \alpha l \hat{m}_1$$

où \hat{m}_1 est le moment de torsion résultant des efforts associés au CSA $\hat{\sigma}_{ij}$
Compte-tenu de (35), il vient

$$\begin{aligned} T_u^d(\hat{\sigma}_{ij}) &= -\alpha l \iint_{\Sigma} \left(x_2 \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x_3} \right) dx_2 dx_3 \\ &= 2\alpha l \iint_{\Sigma} \hat{\Phi} dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

en reprenant le calcul de (VII.63). Finalement

$$(40) \quad H(\hat{\sigma}_{ij}) = \iint_{\Sigma} \left\{ 2\alpha l \hat{\Phi} - \frac{l}{2G} \left[\left(\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x_3} \right)^2 \right] \right\} dx_2 dx_3$$

ou en posant $\hat{\Phi} = G\alpha \hat{\varphi}$

$$(41) \quad H(\hat{\sigma}_{ij}) = \frac{G\alpha^2 l}{2} \iint_{\Sigma} \left\{ 4\hat{\varphi} - \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_3} \right)^2 \right\} dx_2 dx_3$$

où $\hat{\varphi}$ est une fonction de x_2, x_3 nulle sur $\partial \Sigma$

Un CCA \tilde{u}_i doit uniquement vérifier les CL de type cinématique

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma_0 : & \tilde{u}_2 = \tilde{u}_3 = 0 \\ \Sigma_1 : & \tilde{u}_2 = -\alpha l x_3, \quad \tilde{u}_3 = \alpha l x_2 \end{aligned} \right.$$

et, en nous inspirant de la structure (VII.76) de la solution, nous prenons pour CCA le champ

$$(43) \quad \tilde{u}_1 = \alpha \tilde{\psi}(x_2, x_3) \quad \tilde{u}_2 = -\alpha x_1 x_3 \quad \tilde{u}_3 = \alpha x_1 x_2$$

qui vérifie automatiquement (42). Un CCA sera donc défini par une fonction quelconque (effectivement, les restrictions (VII.78) imposées à ψ pour la solution sont d'origine statique). On a alors

$$(44) \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{\alpha}{2} \begin{bmatrix} 0 & -x_3 + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_2} & x_2 + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_3} \\ -x_3 + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ x_2 + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et on tire de (36)

$$(45) \quad W(\tilde{\varepsilon}_{ij}) = \frac{G \alpha^2 l}{2} \iint_{\Sigma} \left\{ \left(x_3 - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_2} \right)^2 + \left(x_2 + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_3} \right)^2 \right\} dx_2 dx_3$$

soit finalement, grâce à (38),

$$(46) \quad H(\tilde{u}_i) = \frac{G \alpha^2 l}{2} \iint_{\Sigma} \left\{ \left(x_3 - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_2} \right)^2 + \left(x_2 + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_3} \right)^2 \right\} dx_2 dx_3$$

Ainsi, compte tenu de (46) et (41), le théorème de comparaison permet d'encadrer $H(u_i) = K(\sigma_{ij})$. Compte-tenu de (38) et (39), on a pour la solution

$$(47) \quad H(u_i) = K(\sigma_{ij}) = W = \alpha l m_1 - W = \frac{\alpha l m_1}{2} = \frac{G \alpha^2 l}{2} I$$

compte-tenu de (VII.64). Le théorème de comparaison nous donne donc

$$(48) \quad \begin{cases} h(\hat{\varphi}) \leq I \leq k(\tilde{\psi}) \\ h(\hat{\varphi}) = \iint_{\Sigma} \left\{ 4\hat{\varphi} - \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_3} \right)^2 \right\} dx_2 dx_3 \\ k(\tilde{\psi}) = \iint_{\Sigma} \left\{ \left(x_3 - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_2} \right)^2 + \left(x_2 + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_3} \right)^2 \right\} dx_2 dx_3 \end{cases}$$

valable pour toute fonction $\hat{\varphi}$ nulle sur $\partial\Sigma$ et toute fonction $\tilde{\psi}$. On voit donc que l'on peut encadrer le module de rigidité à la torsion et obtenir ainsi des valeurs approchées.

On peut ainsi démontrer certains résultats généraux: par exemple, en prenant $\tilde{\psi} = 0$ on obtient

$$(49) \quad I \geq \iint_{\Sigma} (x_2^2 + x_3^2) dx_2 dx_3 = I_0$$

le moment polaire I_0 est un minorant du module de rigidité à la torsion (on a vu que c'était le module de rigidité à la torsion pour une section circulaire ou annulaire).

Pour aller plus loin, considérons par exemple le cas d'une section rectangulaire. On a vu au § VII.2.4 que l'on pouvait obtenir une solution exacte par développement en série de Fourier. Les calculs précédents vont nous fournir une valeur approchée. La fonction $\hat{\varphi}$ doit être nulle sur le bord, nous prenons

$$(50) \quad \hat{\varphi} = m (a^2 - x_2^2) (b^2 - x_3^2)$$

On trouve alors par un calcul direct

$$(51) \quad h(\hat{\varphi}) = \frac{64 a^3 b^3}{9} m \left[1 - \frac{2m}{5} (a^2 + b^2) \right]$$

La fonction $\tilde{\psi}$ est quelconque ; par analogie avec la section elliptique, nous prenons

$$(52) \quad \tilde{\psi} = p x_2 x_3$$

et nous obtenons

$$(53) \quad k(\tilde{\psi}) = \frac{4 a b}{3} \left[(p+1)^2 b^2 + (p-1)^2 a^2 \right]$$

d'où l'encadrement (48) pour I . Pour obtenir l'encadrement optimal, nous choisissons la valeur de m qui maximise $h(\hat{\varphi})$ et la valeur de p qui minimise $k(\tilde{\psi})$. On trouve

$$(54) \quad m_{opt} = \frac{5}{4(a^2 + b^2)} \quad p_{opt} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\frac{40}{9} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \leq I \leq \frac{48}{9} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

En particulier pour la section carrée, on trouve

$$(55) \quad 0,139 \leq \frac{I}{a^4} \leq 0,167$$

alors que la valeur exacte est de 0,141. Bien entendu, on pourrait raffiner en prenant des fonctions $\hat{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ plus compliquées. Néanmoins, on voit que notre CSA est déjà assez proche de la solution, et peut nous donner une approximation raisonnable du champ de contraintes réel.

2. LES THEOREMES DE L'ENERGIE

2.1 LE THEOREME DE RECIPROCITE

On considère un solide élastique pouvant être soumis à deux chargements différents. Soit (u_i^1, σ_{ij}^1) et (u_i^2, σ_{ij}^2) les solutions correspondantes.

Théorème de réciprocité ou de Maxwell-Betti. Le travail des efforts extérieurs 2 dans le déplacement 1 est égal au travail des efforts extérieurs 1 dans le déplacement 2.

$$(56) \quad \int_{\Omega} f_i^2 u_i^1 dv + \int_{\partial\Omega} T_i^2 u_i^1 dS = \int_{\Omega} f_i^1 u_i^2 dv + \int_{\partial\Omega} T_i^1 u_i^2 dS$$

Dem. On utilise le théorème des travaux virtuels appliqué au problème 1 avec comme déplacement virtuel le déplacement u_i^2 solution du problème 2. On obtient

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2 dv = \int_{\Omega} f_i^1 u_i^2 dv + \int_{\partial\Omega} T_i^1 u_i^2 dS$$

On effectue la même opération en changeant 1 et 2

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^1 dv = \int_{\Omega} f_i^2 u_i^1 dv + \int_{\partial\Omega} T_i^2 u_i^1 dS$$

et on obtient (56) en remarquant que, d'après la symétrie de la matrice d'élasticité

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^1 dv = \int_{\Omega} A_{ijkl} \varepsilon_{ij}^1 \varepsilon_{kl}^2 dv = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2 dv$$

A titre d'exemple d'application, considérons un problème du type II, avec des données (f_i, T_i^d) . En général, on ne saura pas calculer la solution (u_i, σ_{ij}) . Par contre, certains problèmes de type II peuvent être résolus pour le même domaine, par exemple tous ceux qui admettent une solution homogène: le problème caractérisé par les données

$$(57) \quad f_i = 0 \quad T_i^d = \sigma_{ij}^0 n_j$$

où σ_{ij}^0 est constant, admet en effet la solution

$$(58) \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 \quad u_i = \Lambda_{ijkl} \sigma_{kl}^0 x_j$$

On applique le théorème de Maxwell Betti en prenant comme problème

Théorème de Castigliano. Soit $\hat{\sigma}_{ij}^2$ un CSA pour le problème 2. Le travail des efforts extérieurs 2 dans le déplacement 1 est égal à la dérivée à l'origine de la fonction donnant l'énergie de déformation du champ de contraintes $\sigma_{ij}^1 + \lambda \hat{\sigma}_{ij}^2$ en fonction de λ .

$$(62) \quad \iint_{\Omega} f_i^2 u_i^1 dv + \iint_{\partial\Omega} T_i^2 u_i^1 dS = \left. \frac{d}{d\lambda} \left\{ \hat{W}(\sigma_{ij}^1 + \lambda \hat{\sigma}_{ij}^2) \right\} \right|_{\lambda=0}$$

Dem. On développe

$$\begin{aligned} \hat{W}(\sigma_{ij}^1 + \lambda \hat{\sigma}_{ij}^2) &= \hat{W}(\sigma_{ij}^1) + \lambda^2 \hat{W}(\hat{\sigma}_{ij}^2) \\ &+ \lambda \iint_{\Omega} \Lambda_{ijkl} \sigma_{ij}^1 \hat{\sigma}_{kl}^2 dv \end{aligned}$$

De sorte que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\lambda} \left\{ \hat{W}(\sigma_{ij}^1 + \lambda \hat{\sigma}_{ij}^2) \right\} \right|_{\lambda=0} &= \iint_{\Omega} \Lambda_{ijkl} \sigma_{ij}^1 \hat{\sigma}_{kl}^2 dv \\ &= \iint_{\Omega} \epsilon_{kl}^1 \hat{\sigma}_{kl}^2 dv = \iint_{\Omega} f_i^2 u_i^1 dv + \iint_{\partial\Omega} T_i^2 u_i^1 dv \end{aligned}$$

d'après le lemme fondamental appliqué à $\hat{\sigma}_{ij}^2$, CSA pour le problème 2, et u_i^1 . cqfd

L'utilisation de ce théorème et du théorème de réciprocité est basée sur le fait que, en introduisant comme chargement 2 des chargements fictifs, ils permettent de calculer certains déplacements ou déformations. En effet, si on introduit par exemple comme chargement 2 une force concentrée \vec{F} appliquée au point M, alors le travail du chargement 2 dans le déplacement 1 se réduit à

$$(63) \quad \vec{F} \cdot \vec{u}^1(M)$$

d'où le calcul du déplacement du point M pour le problème 1. Ce type de méthode est peu utilisé en MMC, pour deux raisons:

1. L'introduction de forces concentrées en MMC pose quelques problèmes liés à la singularité du chargement. On sait résoudre ces problèmes, mais ce n'est pas si simple.
2. En MMC, il est en général très difficile de calculer le champ de contraintes solution ou de construire un CSA.

Par contre, ces "théorèmes de l'énergie" - comme sont couramment nommés le théorème de réciprocité et le théorème de Castigliano - seront utilisés de manière intensive en Résistance des Matériaux, où les deux difficultés mentionnées ci-dessus disparaissent. De manière générale en effet,

tous les théorèmes que nous avons démontrés depuis le début de ce chapitre sont valables pour toute théorie de milieux continus élastiques. En fait, ils reposent sur la structure algébrique décrite à la fin du § 1.1.

Ces théorèmes ne sont en principe valables que pour les problèmes réguliers. Pour un problème non régulier - problème avec frottement ou avec contact unilatéral par exemple, voir § VI.1.1 - on peut avoir des résultats analogues, mais il convient de tout reprendre pour chaque cas particulier. C'est le champ d'étude des méthodes variationnelles ([24]).

3. LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

3.1 PRINCIPE DE LA METHODE

Les théorèmes du § 1 énoncent des principes variationnels dont l'affirmation type est la suivante: "La solution minimise une certaine fonctionnelle dans un espace de fonctions admissibles". Nous avons présenté les deux principes variationnels traditionnels, mais il en existe bien d'autres, plus ou moins appropriés, suivant le type de problème que l'on envisage [21]. L'intérêt de ces principes variationnels réside dans le fait qu'ils engendrent à peu près automatiquement une méthode numérique pour calculer une solution approchée. Il suffit en effet de discrétiser l'espace des fonctions admissibles - c'est-à-dire de l'approcher par un espace de dimension finie - et de minimiser la fonctionnelle sur cet espace discrétisé. On obtient ainsi une solution approchée d'autant plus proche de la solution réelle que l'espace discrétisé approche mieux l'espace des fonctions admissibles.

Pour discrétiser l'espace des fonctions admissibles, on peut par exemple introduire une base fonctionnelle de cet espace - base de fonctions sinusoïdales pour un domaine rectangulaire, par exemple - et approcher l'espace des fonctions admissibles par l'espace engendré par les n premiers éléments de cette base. C'est la méthode de Galerkin, et on peut montrer que lorsque $n \rightarrow \infty$, la solution approchée ainsi calculée tend vers la solution réelle.

Le terme "méthode d'éléments finis" recouvre un ensemble de méthodes pour lesquelles l'espace discrétisé s'obtient

1. en découpant le domaine Ω en un certain nombre de sous-domaines simples (triangles ou rectangles): les éléments finis;
2. en prenant sur chaque élément une forme analytique simple, de sorte que la valeur de la fonction en tout point est donnée par sa valeur en un nombre

limité de noeuds. A titre d'exemple, nous allons présenter les trois éléments les plus simples pour un espace de fonctions à valeur scalaire (pour une fonction à valeur vectorielle ou tensorielle, il suffit de considérer séparément chaque composante) dans le plan.

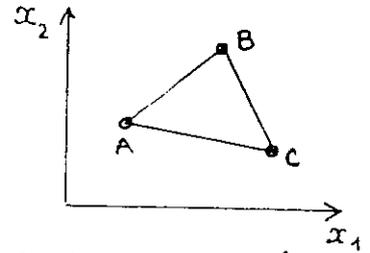
Exemple 1. Élément triangulaire avec fonction linéaire sur chaque triangle

$$f = a + bx_1 + cx_2$$

La valeur de la fonction f en un point du triangle ABC dépend de 3 paramètres, par exemple la valeur de f aux trois sommets

$$(64) \quad f = f_A \lambda_A(x_1, x_2) + f_B \lambda_B(x_1, x_2) + f_C \lambda_C(x_1, x_2)$$

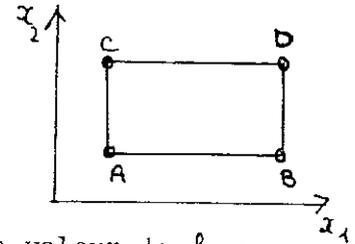
où $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C$ sont les "coordonnées barycentriques" du point M.



Exemple 2. Élément rectangulaire avec fonction bilinéaire

$$f = a + bx_1 + cx_2 + dx_1x_2$$

La valeur de la fonction f en un point M du rectangle ABCD dépend de 4 paramètres: la valeur de f aux noeuds A, B, C, D.

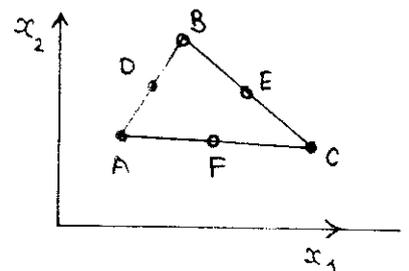


$$(65) \quad f = f_A \frac{(x_1 - x_1^B)(x_2 - x_2^C)}{(x_1^A - x_1^B)(x_2^A - x_2^C)} + f_B \frac{(x_1 - x_1^A)(x_2 - x_2^D)}{(x_1^B - x_1^A)(x_2^B - x_2^D)} \\ + f_C \frac{(x_1 - x_1^D)(x_2 - x_2^A)}{(x_1^C - x_1^D)(x_2^C - x_2^A)} + f_D \frac{(x_1 - x_1^C)(x_2 - x_2^B)}{(x_1^D - x_1^C)(x_2^D - x_2^B)}$$

Exemple 3. Élément triangulaire avec fonction quadratique sur chaque triangle

$$(66) \quad f = a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2$$

La valeur de la fonction f sur le triangle ABC dépend de 6 paramètres: la valeur de f aux 6 noeuds A, B, C, D, E, F, et ainsi de suite. On trouvera dans la littérature sur les éléments finis des "catalogues" d'éléments.



Après avoir découpé le modèle et choisi les éléments, une fonction de l'espace discrétisé est définie par sa valeur en un certain nombre de noeuds, et on doit minimiser une fonction d'un nombre fini de variables, problème qui se prête bien au calcul numérique.

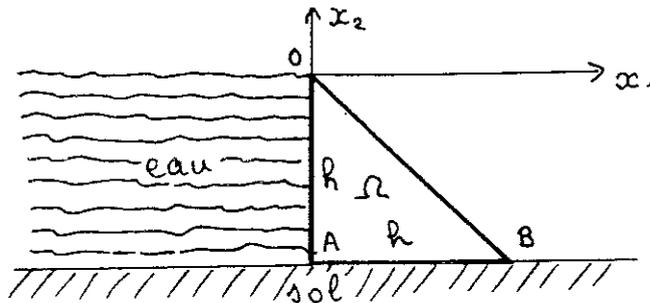
Pour la torsion, par exemple, on peut à partir de (48) construire deux méthodes d'éléments finis

1ère méthode. On discrétise Σ , et on maximise la fonctionnelle $k(\hat{\varphi})$ sur l'espace des fonctions $\hat{\varphi}$ nulles sur le bord.

2ème méthode. On discrétise Σ , et on minimise la fonctionnelle $k(\tilde{\psi})$ sur l'espace de toutes les fonctions $\tilde{\psi}$.

3.2 APPLICATION A UN EXEMPLE

Pour montrer la mise en oeuvre de la méthode, nous allons envisager un exemple. Considérons en déformations planes un barrage triangulaire OAB



Les forces de volume se réduisent à la pesanteur

$$(67) \quad f_1 = 0, \quad f_2 = -\rho g$$

ρ étant la masse volumique du béton.

Quant aux conditions aux limites, elles traduisent l'absence de contrainte sur OB, l'effet de la pression hydrostatique $-\varpi x_2$ (ϖ étant le poids spécifique de l'eau) sur OA, et la liaison supposée rigide avec le sol sur AB

$$(68) \quad \begin{cases} \underline{OB} & \sigma_{11} + \sigma_{12} = 0, & \sigma_{12} + \sigma_{22} = 0 \\ \underline{OA} & \sigma_{11} = \varpi x_2, & \sigma_{12} = 0 \\ \underline{AB} & u_1 = u_2 = 0 \end{cases}$$

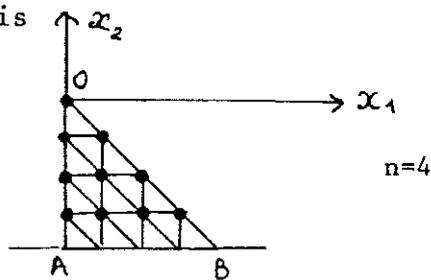
Le théorème de l'énergie potentielle affirme que dans l'espace des CCA,

$$(69) \quad \mathcal{U} = \{ (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \mid \tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 = 0 \text{ pour } x_2 = -h \}$$

la solution minimise la fonctionnelle

$$(70) \quad \begin{cases} K(\tilde{u}_i) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} A_{ij} \tilde{E}_{ij} \tilde{E}_{kl} dx_1 dx_2 \\ + \iint_{\Omega} \rho g \tilde{u}_2 dx_1 dx_2 + \int_{OA} \varpi x_2 \tilde{u}_1 dx_2 \end{cases}$$

Pour discrétiser ce problème, nous introduisons un découpage en éléments finis



Par exemple, nous introduisons un maillage régulier et des éléments triangulaires du type (64), et nous approchons \mathcal{U} par

$$\mathcal{U}_n = \left\{ (u_1, u_2), u_1 \text{ et } u_2 \text{ nuls sur AB et de la forme (64) sur chaque triangle} \right\}$$

Ainsi, une fonction de \mathcal{U}_n sera caractérisée par sa valeur aux $n(n+1)/2$ points du maillage non situés sur AB (si OA et AB sont découpés en n intervalles égaux). Ainsi, l'espace \mathcal{U}_n est un espace de dimension $n(n+1)$, et une fonction de \mathcal{U}_n sera caractérisée par un vecteur colonne \underline{U} de $n(n+1)$ éléments donnant les deux composantes de \underline{u}_i en chaque point du maillage, la formule (64) donnant alors la valeur de \underline{u}_i en tout point. Si l'on reporte cette fonction dans la définition (70) ou (15) de l'énergie potentielle, l'énergie de déformation $W(\tilde{\underline{\epsilon}}_i)$ devient une forme quadratique par rapport aux composantes de \underline{U} et le travail des efforts \underline{T}_f^d devient une forme linéaire par rapport à ces mêmes composantes. Ainsi

$$(71) \quad K(\tilde{\underline{u}}_i) = \frac{1}{2} \underline{U}^T \underline{\mathcal{A}} \underline{U} - \underline{F}^T \underline{U}$$

où la matrice carrée $\underline{\mathcal{A}}$ est la matrice de rigidité, symétrique et définie positive, et où le vecteur colonne \underline{F} caractérise les efforts extérieurs. Pour minimiser l'énergie potentielle, il faut donc résoudre le système linéaire

$$(72) \quad \underline{\mathcal{A}} \underline{U} = \underline{F}$$

Nous utilisons ici le théorème de l'énergie potentielle, car en MMC il est en général très difficile d'engendrer des champs statiquement admissibles, et le théorème de l'énergie complémentaire est peu utilisé dans ce contexte.

3.3 ETUDE D'UN ELEMENT

Pour calculer les intégrales qui interviennent dans (70), il faudra sommer les contributions de chaque triangle pour les intégrales de surface, et de chaque segment pour les intégrales de ligne. Nous allons donc

déjà examiner la contribution d'un élément triangulaire abc à l'énergie de déformation, au travail des efforts de volume, et au travail des efforts de surface.

Sur chaque élément, nous pouvons donc écrire le déplacement en fonction de la valeur aux sommets a, b et c de cet élément

$$(73) \quad \tilde{u}_i = u_i^a \lambda_a(x_1, x_2) + u_i^b \lambda_b(x_1, x_2) + u_i^c \lambda_c(x_1, x_2)$$

où λ_a , λ_b et λ_c sont les coordonnées barycentriques du point (x_1, x_2) , définies par

$$(74) \quad \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^a & x_1^b & x_1^c \\ x_2^a & x_2^b & x_2^c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

et qui dépendent uniquement de la géométrie de l'élément. (73) donne donc

$$(75) \quad \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^a & u_1^b & u_1^c \\ u_2^a & u_2^b & u_2^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^a & x_1^b & x_1^c \\ x_2^a & x_2^b & x_2^c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

a) Discrétisation de l'énergie.

Le tenseur des déformations ε_{ij} est alors constant et donné par

$$(76) \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} u_1^a & u_1^b & u_1^c \\ u_2^a & u_2^b & u_2^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^a & x_1^b & x_1^c \\ x_2^a & x_2^b & x_2^c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^S$$

où \underline{A}^S désigne la matrice \underline{A} symétrisée

$$(77) \quad \underline{A}^S = \frac{1}{2} (\underline{A} + \underline{A}^T)$$

L'intégration de l'énergie de déformation sur le triangle abc donne

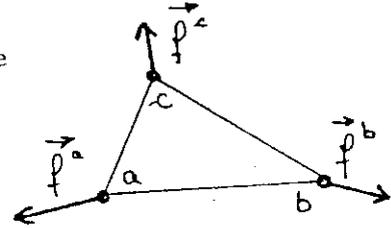
$$(78) \quad \begin{aligned} W_{abc} &= \frac{1}{2} \iint_{abc} \left\{ \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 + 2 (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2 \varepsilon_{12}^2) \right\} dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{a}_{abc} \underline{u} \end{aligned}$$

où \underline{u} désigne le vecteur colonne des déplacements aux noeuds, donc un sous-vecteur de \underline{U} , et où \underline{a}_{abc} est une matrice symétrique 6x6 qui résulte de l'intégration sur le triangle abc et qui dépend donc uniquement de la géométrie du triangle.

Si l'on dérive la forme quadratique W_{abc} par rapport aux dé-

placements des noeuds, on obtient un vecteur colonne

$$(79) \quad \underline{f} = \underline{a}_{abc} \underline{u} = \frac{\partial W_{abc}}{\partial \underline{u}}$$



qui peut s'interpréter énergétiquement comme donnant les "forces élastiques" $\vec{f}^a, \vec{f}^b, \vec{f}^c$, qui doivent être appliquées aux noeuds pour produire le déplacement \underline{u} . Ceci résulte par exemple du bilan énergétique (32) qui montre que pour une variation $d\underline{u}$ des déplacements aux noeuds, la variation de l'énergie de déformation

$$(80) \quad dW_{abc} = \underline{f}^T d\underline{u}$$

est égale au travail des efforts exercés sur l'élément. On peut donc interpréter (80) comme donnant le travail des "forces élastiques" (supposées concentrées aux noeuds) \vec{f}^a, \vec{f}^b et \vec{f}^c . Il faut bien garder à l'esprit, cependant, qu'il ne s'agit là que d'une interprétation, et que ces "forces élastiques" sont fictives et sans aucune existence réelle; ce ne sont pas des forces, mais des dérivées de l'énergie de déformation.

b) Discrétisation des forces de volume.

Calculons la contribution du triangle abc au travail des forces de volume, c'ad dans (70) des forces de pesanteur. En reportant (73) dans (70) et en remarquant que

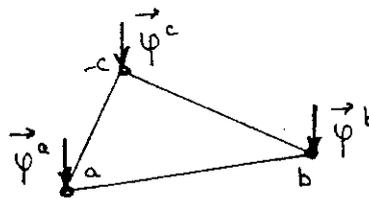
$$(81) \quad \iint_{abc} \lambda_a dx_1 dx_2 = \iint_{abc} \lambda_b dx_1 dx_2 = \iint_{abc} \lambda_c dx_1 dx_2 = \frac{S}{3}$$

on obtiendra

$$(82) \quad - \iint_{abc} \rho g \tilde{u}_2 dx_1 dx_2 = - \frac{\rho g S}{3} (u_2^a + u_2^b + u_2^c) = \underline{\varphi}^T \cdot \underline{u}$$

$$(83) \quad \underline{\varphi}^T = (0, 0, 0, -\frac{\rho g S}{3}, -\frac{\rho g S}{3}, -\frac{\rho g S}{3})$$

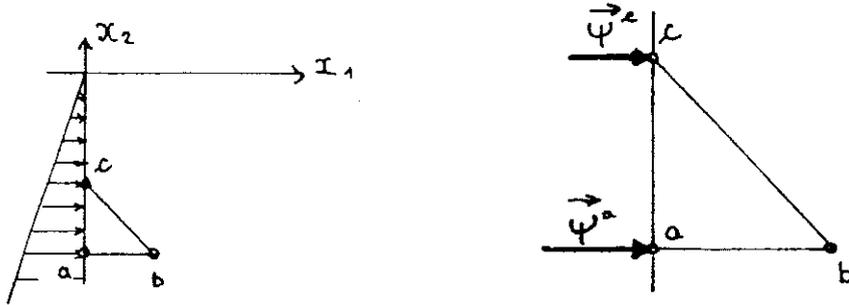
D'un point de vue énergétique, on peut interpréter (82) en disant que les forces de volume sont équivalentes aux trois forces concentrées $\vec{\varphi}^a, \vec{\varphi}^b, \vec{\varphi}^c$ appliquées aux noeuds.



De manière générale, l'écriture du travail des efforts de volume conduit à décomposer ces efforts en trois forces concentrées appliquées aux noeuds.

c) Discrétisation des efforts surfaciques

Soit ac un côté du triangle abc appartenant à S_f , c'ad où les efforts surfaciques sont donnés



La restriction de (75) à ac donne, dans le cas particulier du barrage (ac vertical)

$$(84) \quad \tilde{u}_1 = u_1^a \frac{x_2 - x_2^c}{x_2^a - x_2^c} + u_1^c \frac{x_2 - x_2^a}{x_2^c - x_2^a}$$

De sorte que la contribution de ac au travail des efforts surfaciques est

$$\frac{\sigma}{x_2^c - x_2^a} \int_{x_2^a}^{x_2^c} [u_1^c x_2 (x_2 - x_2^a) - u_1^a x_2 (x_2 - x_2^c)] dx_2$$

et on obtient finalement

$$(85) \quad - \int_a^c \sigma x_2 \tilde{u}_1 dx_2 = - \frac{\sigma \Delta h}{\epsilon} \left[(x_2^c - \frac{\Delta h}{3}) u_1^c + (x_2^a + \frac{\Delta h}{3}) u_2^c \right]$$

$$= \underline{\psi}^T \underline{u}$$

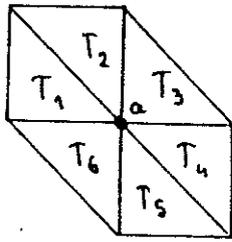
$$(86) \quad \underline{\psi}^T = \left(- \frac{\sigma \Delta h (x_2^c + \frac{\Delta h}{3})}{2}, 0, - \frac{\sigma \Delta h (x_2^a - \frac{\Delta h}{3})}{2}, 0, 0, 0 \right)$$

D'un point de vue énergétique, les forces de contact exercées sur ac sont équivalentes à deux forces concentrées $\vec{\psi}^a$ et $\vec{\psi}^c$ exercées aux noeuds. Par contre, u_i^b n'intervient pas dans (84), et donc $\vec{\psi}^b = 0$.

3.4 ASSEMBLAGE

Pour calculer $K(\tilde{u}_i)$, c'ad pour expliciter (71), on doit sommer la contribution de tous les triangles pour l'énergie de déformation et le travail des forces de volume, ainsi que la contribution de tous les segments de S_f pour le travail des forces de surface. Pour minimiser la fonction $K(\underline{U})$ résultante, il faut annuler la dérivée de K par rapport à chaque déplacement de chaque noeud.

a) Cas d'un noeud intérieur a .



Chaque noeud intérieur appartient à n triangles T_1, T_2, \dots, T_n ($n=6$ dans notre exemple). D'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent, le déplacement u_i^a n'interviendra dans K que par la contribution de ces n triangles. On pourra donc écrire

$$(87) \quad \frac{\partial W}{\partial u_i^a} = \frac{\partial W_{T_1}}{\partial u_i^a} + \dots + \frac{\partial W_{T_m}}{\partial u_i^a} = f_i^{a, T_1} + \dots + f_i^{a, T_m}$$

où les quantités f_i^{a, T_j} sont les composantes des forces élastiques appliquées en a sur chacun des éléments T_1, T_2, \dots, T_n entourant a .

$$(88) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_1^a} \iint_{\Omega} \rho g \tilde{u}_z \, dx_1 \, dx_2 &= 0 = - (\varphi_1^{a, T_1} + \dots + \varphi_1^{a, T_m}) \\ \frac{\partial}{\partial u_2^a} \iint_{\Omega} \rho g \tilde{u}_z \, dx_1 \, dx_2 &= \frac{\rho g}{3} (S^1 + \dots + S^m) = - (\varphi_2^{a, T_1} + \dots + \varphi_2^{a, T_m}) \end{aligned}$$

où les quantités φ_i^{a, T_j} sont les forces concentrées en a équivalentes aux forces de volume exercées sur chacun des éléments T_1, T_2, \dots, T_n . Enfin, u_i^a n'interviendra pas dans le travail des efforts de contact, puisque celui-ci ne fait apparaître que les déplacements des noeuds de S_f .

Ainsi, la minimisation de K par rapport à u_i^a pourra s'écrire

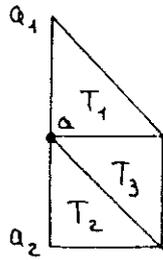
$$(89) \quad - \vec{f}^{a, T_1} - \dots - \vec{f}^{a, T_m} + \vec{\varphi}^a = 0$$

On peut interpréter cette équation comme exprimant l'équilibre au noeud a sous l'action des forces qui lui sont appliquées

- forces élastiques exercées par tous les éléments entourant a, qui sont égales à l'opposé des forces élastiques \vec{f}^{a, T_i} exercées sur l'élément;
 - la force $\vec{\varphi}^a = \vec{\varphi}^{a, T_1} + \dots + \vec{\varphi}^{a, T_m}$ qui est la force concentrée équivalente en a aux forces volumiques appliquées aux éléments entourant a.
- Dans notre exemple, cette force est égale au tiers (car les trois sommets de chaque triangle participent) du poids des éléments entourant a.

b) Cas d'un noeud frontière, c-à-d d'un noeud appartenant à S_f (car sur S_u le déplacement est donné). L'analyse précédente reste valable, mais il

faut rajouter la contribution des 2 segments de S_f issus de a.



On obtient alors

$$(90) \quad \frac{\partial}{\partial \mu_i^a} \int_{OA} \sigma \alpha_2 \tilde{u}_1 dx_2 = - \psi_i^{a,T_1} - \psi_i^{a,T_2}$$

et finalement, la minimisation de K donne

$$(91) \quad - \vec{f}^{a,T_1} - \dots - \vec{f}^{a,T_m} + \vec{\varphi}^a + \vec{\psi}^a = 0$$

On peut encore interpréter (91) comme exprimant l'équilibre du noeud a, à condition de rajouter aux forces appliquées

- la force $\vec{\psi}^a = \vec{\psi}^{a,T_1} + \vec{\psi}^{a,T_2}$ qui est la force concentrée équivalente en a aux forces de contact appliquées aux éléments entourant a.

Ainsi, on peut interpréter la méthode des éléments finis comme exprimant l'équilibre des tous les noeuds sous l'action des forces élastiques exercées par chaque élément, et des forces extérieures (volumiques ou de contact) appliquées, ces forces étant rapportées aux noeuds.