# Règle de décision bayésienne (suite calculs commencés en cours)

$$E[L(s(Y),X)] \xrightarrow[\text{Fubini}]{\text{th.}} \underset{Y}{E}\Big[\underbrace{\underset{X}{E}[L(s(Y),X)\mid Y]}_{\phi(y)}\Big]$$

Minimiser la perte moyenne revient à minimiser $\phi(y)$.

$$\phi(y) = \sum_{k=1}^{K} L(s(y), X=k)\; p(X=k\mid Y)$$

On cherche donc la fonction $s$ qui minimise $\phi(y)$. Cette fonction est notée $\hat{s}_B$.

Si la classe $i$ est la solution :

$$\hat{s}_B(y)=i \iff \forall j\in\Omega,\ \sum_{k=1}^{K} L(i,k)\, p(X=k\mid Y) \le \sum_{k=1}^{K} L(j,k)\, p(X=k\mid Y)$$

$$\iff \forall j\in\Omega,\ \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{K} \lambda_{ik}\, p(X=k\mid Y) \le \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{K} \lambda_{jk}\, p(X=k\mid Y)$$

Et donc $\boxed{\hat{s}_B(y) = \arg\min_{j} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{K} \lambda_{ik}\, p(X=k\mid Y)}$

Si $K=2$ et $L_{01}(i,j)=\begin{cases}0 & \text{si } i=j\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$

$$\hat{s}_B(y) = \arg\min_{j}\Big(\underbrace{\lambda_{11}}_{=0} p(X=1\mid Y) + \underbrace{\lambda_{12}}_{=1} p(X=2\mid Y),\ \underbrace{\lambda_{21}}_{=1} p(X=1\mid Y) + \underbrace{\lambda_{22}}_{=0} p(X=2\mid Y)\Big)$$

$$= \arg\min\big(p(X=2\mid Y),\ p(X=1\mid Y)\big)$$

La solution de ce problème est donc la classe 1 si $p(X=1\mid Y) > p(X=2\mid Y)$

Pour un problème à $K$ classes, la règle de décision bayésienne s'écrit

$$\boxed{\hat{S}_B(y) = \arg\max_{j\in\Omega}\ p(X=j\mid Y)}$$