

DOSSIER D'HABILITATION  
À  
DIRIGER DES RECHERCHES

A. LE BOT



DOSSIER D'HABILITATION  
À DIRIGER DES RECHERCHES

TRANSFERT RADIATIF  
DE L'ÉNERGIE  
EN VIBROACOUSTIQUE

**A. LE BOT**  
Chargé de Recherche CNRS - section 9

Septembre 2002



## REMERCIEMENTS

Je tiens ici à exprimer ma sincère gratitude envers C. Soize, directeur du Laboratoire de mécanique de l'université de Marne-la-Vallée, et C. Lesueur, directeur du Laboratoire de recherche en mécanique et acoustique de l'université de Bourgogne, d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette habilitation. La lecture de leurs ouvrages, avec lesquels j'ai découvert la vibroacoustique, et le privilège de les avoir régulièrement rencontrés depuis, m'honnorent autant que leur présence dans ce jury. Qu'ils trouvent ici la marque de mon profond respect.

Je remercie également A. Berry, directeur du laboratoire GAUS de l'université de Sherbrooke au Québec, d'avoir accepté d'être rapporteur, et J.L. Guyader, directeur du Laboratoire de vibrations acoustique de l'Insa Lyon, de sa participation à ce jury, à une période pourtant traditionnellement chargée en soutenances. Également merci à J.N. Gence, Professeur des universités au Laboratoire de mécanique des fluides et acoustique, d'avoir bien voulu examiner un travail pourtant assez éloigné de ses sujets de recherche.

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été menés au sein du laboratoire de tribologie et dynamique des systèmes (LTDS, UMR CNRS 5513) de l'École centrale de Lyon et de l'Enise. J'adresse mes plus vifs remerciements à tout le personnel du laboratoire, et, en premier lieu, P. Kapsa, directeur du LTDS, pour m'avoir soutenu dans la préparation de cette habilitation, J.Perret-Liaudet, pour m'avoir intégré dans son équipe, sans oublier tous ceux qui ont participé à ces recherches, les doctorants bien sûr mais aussi le personnel technique, J.P. Bernard, L. Charles, Y. Ered, J. Gonin sans lequel ces travaux seraient restés purement théoriques.

Je remercie également tous les partenaires institutionnels et industriels pour leur aide précieuse, et, plus particulièrement EDF et le CNRS qui m'ont tour à tour accueilli comme chercheur et ont soutenu cette thématique de recherche.

Enfin, et surtout, à tous mes proches, grands et petits, pour bien plus qu'il ne m'est donné d'écrire ici.



# Table des matières

- INTRODUCTION** **5**
- 1 Contexte économique . . . . . 7
- 2 Contexte scientifique . . . . . 7
- 3 Hautes fréquences . . . . . 10
  
- I THÉORIE** **13**
- 1 Présentation . . . . . 15
- 2 Hypothèses . . . . . 15
- 3 Représentation des champs d'énergie . . . . . 16
- 4 Réflexion . . . . . 17
- 5 Transmission . . . . . 19
- 6 Méthode diffusion de l'énergie vibratoire . . . . . 20
  
- II LE CODE CeReS** **21**
- 1 Présentation . . . . . 23
- 2 Schéma numérique . . . . . 24
  - 2.1 Régime stationnaire . . . . . 24
  - 2.2 Régime transitoire . . . . . 25
- 3 Constitution de la structure . . . . . 26

3.1	Géométrie . . . . .	26
3.2	Caractéristiques physiques . . . . .	29
3.3	Systèmes et couplage entre systèmes . . . . .	31
3.4	Maillage de la structure . . . . .	32
3.5	Les solveurs . . . . .	34

### **III APPLICATIONS 37**

1	Méthode de diffusion de l'énergie vibratoire . . . . .	39
2	Expérimentations sur des structures . . . . .	40
3	Méthode du tir de rayons . . . . .	41
4	Auditorium Maurice Ravel de Lyon . . . . .	42
5	Rayonnement des structures . . . . .	43
6	Billard circulaire . . . . .	44

### **CONCLUSION 55**



# INTRODUCTION



## 1 Contexte économique

En quelques années, la prévision vibroacoustique est devenue un sujet de préoccupation croissante chez les concepteurs de machines et matériels divers. À cela deux raisons au moins. Tout d'abord, le confort vibratoire et acoustique est aujourd'hui un argument commercial de toute première importance. Des efforts considérables ont été conduits en vue de réduire le bruit et les vibrations dans les habitacles d'automobiles, de trains, d'avions et de ferry boats. Toute l'industrie du transport est soucieuse d'améliorer le confort de ses passagers. L'industrie de l'électroménager a su elle aussi intégrer cette contrainte de réduction des gênes. Finies les machines à laver qui traversent la salle de bains et dont le bruit n'est couvert que par celui de l'aspirateur ! Le second aspect concerne la réglementation des nuisances sonores. Les niveaux de bruits extérieurs imposés aux véhicules sont de plus en plus bas et les constructeurs sont invités à concevoir des matériels plus silencieux. Par exemple, en dix ans, les niveaux imposés aux véhicules de plus de 3,5 t de PTAC ont baissé de 8 dBA en Europe [1]. Les recherches menées en ce sens sont nombreuses et débouchent sur des résultats spectaculaires. Un Airbus A320 fait 100 fois moins de bruit qu'une Caravelle !

Dans ce contexte général de réduction des nuisances sonores, les bureaux d'étude se sont dotés d'outils de calcul en vibroacoustique. Très souvent dans le passé, les performances vibroacoustiques étaient mesurées après avoir construit le matériel, puis, éventuellement corrigées pour atteindre les niveaux spécifiés. Ces études *a posteriori* laissaient peu de marge de manœuvre aux experts. Aujourd'hui, il s'agit d'être en mesure de prévoir les performances vibroacoustiques dès la conception des matériels.

## 2 Contexte scientifique

Les codes d'éléments finis s'imposent en tant qu'outils indispensables pour la conception des équipements. Ils permettent de réaliser des calculs pour le dimensionnement statique et dynamique. Cependant, ces calculs sont limités en fréquence en raison des capacités restreintes des calculateurs. En effet, la convergence des algorithmes requiert d'utiliser un nombre constant d'éléments par longueur d'onde (typiquement sept), or celle-ci décroît avec la fréquence et le nombre de degrés de liberté devient vite déraisonnable. En pratique les fréquences limites pour les calculateurs actuels sont relativement basses (voir tableau 1). Elles ne permettent pas de couvrir pleinement la bande audio.

Des méthodes spécifiques au domaine des hautes fréquences sont alors apparues. Parmi celles-ci, citons l'acoustique géométrique et les algorithmes de tir de rayons, l'analyse statistique de l'énergie [2] (*Statistical Energy Analysis* ou SEA) et un modèle local de comportement de l'énergie dans les structures

automobile	250 Hz
avion Falcon	25 Hz
navire marchand	5 Hz
lanceur Ariane	1 Hz

TAB. 1 – Fréquences maximales accessibles par un calcul éléments finis. Ces valeurs ne sont que des ordres de grandeur. Elles montrent toutefois que pour tous ces équipements, la bande audio n'est, au mieux, qu'abordée par le bas.

reposant sur une analogie avec la diffusion thermique [3].

L'acoustique géométrique connaît un grand succès. Elle fait l'objet de nombreux codes d'acoustique intérieure et est sans doute le modèle le plus utilisé dans ce domaine après la formule de Sabine. Cependant l'application de la technique des rayons à la propagation des ondes dans les structures se heurte à la difficulté de prendre en compte le couplage. En effet, chaque rayon se divise en deux à l'interface des structures et le nombre de ceux-ci devient vite très important. Par ailleurs, l'algorithme des rayons converge lentement dans le cas de structures réverbérantes.

La SEA est étudiée depuis une trentaine d'années. Elle fait l'objet d'un certain nombre de codes à usage industriel. Aujourd'hui, l'essentiel de l'industrie du transport l'a adopté comme standard pour l'analyse hautes fréquences des véhicules. Elle est bien adaptée à l'étude des structures complexes comportant un grand nombre d'éléments hétérogènes. Cependant, la SEA ne propose qu'une analyse discrète des structures, ne donnant qu'une valeur globale de l'énergie par élément constitutif. Aucune information n'est disponible sur la répartition spatiale de la densité d'énergie au sein de chaque élément.

Enfin, le dernier modèle cité se présente comme une généralisation de la SEA. Il repose sur une analogie avec la diffusion thermique. La diffusion de l'énergie au sein des structures est modélisée avec l'équation de conduction de la chaleur. Les variables énergétiques sont donc locales ce qui est une amélioration sur le modèle SEA. Cependant, ce modèle a été critiqué dans les références [4, 5, 6] dans son application aux vibrations de plaques. En effet, le comportement asymptotique du champ direct prédit par cette méthode est en contradiction avec celui des équations du mouvement : la décroissance en champ lointain est plus faible dans le premier cas que dans le second. Cette contradiction ôte tout espoir d'appliquer

correctement cette méthode aux assemblages de plaques et à l'acoustique intérieure où la prise en compte du champ direct est primordiale.

Dans ce contexte, et depuis quelques années, nous travaillons à l'élaboration d'une théorie énergétique locale pour les hautes fréquences [7, 4, 8, 9]. Ce modèle, que nous appelons méthode des échanges radiatifs par analogie avec le rayonnement thermique, s'applique à l'acoustique intérieure, aux vibrations de

structures et, plus largement, à l'ensemble des interactions vibroacoustiques. Il prend correctement en compte le champ direct et ne présente pas le défaut de la méthode précédente de diffusion de l'énergie vibratoire.

La méthode des échanges radiatifs tire son origine de la méthode standard en thermique, quelquefois appelée méthode des facteurs de vue, mais aussi de la méthode de radiosité en acoustique intérieure, elle-même inspirée de la première. Toutefois, de nombreuses généralisations ont été nécessaires.

Tout d'abord, en thermique et en acoustique, une seule onde se propage tandis que la vibroacoustique est beaucoup plus riche en ondes progressives qui, de plus, peuvent échanger de l'énergie. C'est une généralisation importante.

Par ailleurs, en vibroacoustique, plusieurs systèmes interagissent, des poutres, des plaques assemblées immergées dans un ou plusieurs milieux acoustiques. Il a donc fallu prendre en compte les échanges énergétiques entre des milieux de natures diverses, selon les trois modes habituels, transmission, rayonnement, absorption.

Une autre difficulté propre à la vibroacoustique concerne l'atténuation des ondes au cours de la propagation. En général, en thermique et en acoustique intérieure, ce phénomène est mineur. En vibration de structures, il ne l'est pas et le négliger pourrait conduire à des incohérences théoriques (dans le cas du rayonnement acoustique supersonique, l'onde s'atténue par rayonnement au cours de sa propagation). La prise en compte de ce phénomène induit peu de modifications théoriques. Elle a cependant une conséquence numérique très importante : les facteurs de vue ne sont plus calculables analytiquement.

Le rayonnement acoustique nous a par ailleurs conduit à étudier la diffraction des ondes structurales dans le milieu acoustique (mode de bord et mode de coin). Le chemin de propagation de ces rayons ainsi que le chemin réciproque est donné par les lois de la théorie géométrique de la diffraction (*Geometrical Theory of Diffraction* ou GTD). Ces rayons diffractés sont négligés dans la méthode standard en thermique et dans la méthode de radiosité en acoustique. Pour les intégrer dans la méthode des échanges radiatifs en vibroacoustique, des sources fictives diffractantes ont été introduites. La principale difficulté fût d'écrire les équations de bilan énergétique permettant d'obtenir les puissances de ces sources.

Une autre adaptation qui s'est avérée nécessaire, concerne le calcul du régime transitoire. Peu utile en thermique et en optique (la vitesse de propagation est si élevée que ce régime est extrêmement court), il est indispensable en acoustique où la durée de réverbération est une donnée essentielle en acoustique architecturale. En vibroacoustique, chaque système pris isolément possède sa propre durée de réverbération. La décroissance de la vibration en un lieu donné de la structure assemblée est une combinaison linéaire des décroissances propres. C'est une conséquence importante de la méthode des

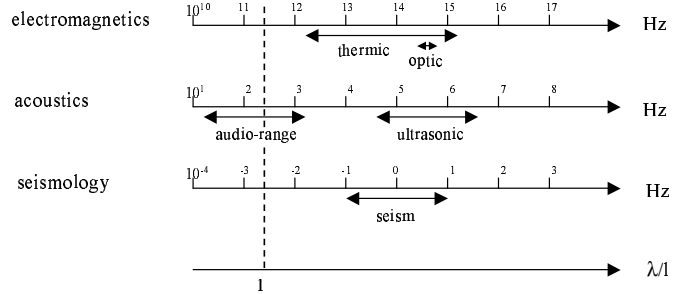


FIG. 1 – Hautes fréquences dans différents domaines. Le facteur adimensionnel  $\lambda/l$  est évalué respectivement pour  $l = 10^{-3}$  m (électromagnétisme),  $l = 1$  m (acoustique) et  $l = 10^6$  m (seismologie).

échanges radiatifs.

Enfin, la dernière généralisation que nous avons été amenés à effectuer est l'étude de la réflexion spéculaire. En thermique, les corps portés à une température donnée rayonnent de l'énergie suivant la loi de Lambert. En optique (miroir), en acoustique (mur lisse) et en vibration de structure (bord sans défaut), la réflexion spéculaire se rencontre fréquemment. La méthode standard ainsi que la méthode de radiosités appliquées aux réflexions partiellement diffuses sont généralement basées sur la technique des sources images. Notre théorie est moins restrictive. Elle est basée sur une équation fonctionnelle récemment publiée [10], valable au-delà du domaine d'application de la technique des sources images. Nous travaillons actuellement à l'élaboration d'un algorithme numérique pour la résolution de celle-ci.

### 3 Hautes fréquences

Les hautes fréquences sont habituellement définies comme le domaine des courtes longueurs d'onde. Les rayons sont souvent introduits en tant que développement du champ vibratoire selon le petit paramètre  $\lambda/l$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde et  $l$  une grandeur caractéristique du problème. En optique géométrique ( $c \sim 3 \cdot 10^8$  m/s dans le vide) et pour des objets de petite taille, disons 1 mm, les courtes longueurs d'ondes comprennent les fréquences optiques et thermiques. En acoustique ( $c \sim 300$  m/s dans l'air) où les objets sont généralement plus grands, disons 1 m, le domaine des courtes longueurs d'onde

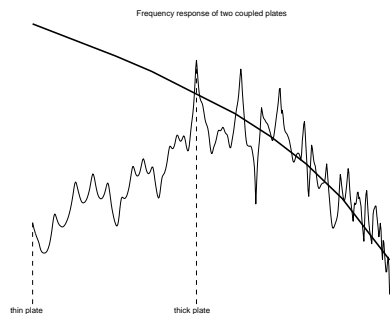


FIG. 2 – Fonction de réponse en fréquence de deux plaques couplées (ligne maigre) et comparaison avec les résultats de la théorie des rayons (ligne épaisse). Les premières fréquences propres des plaques isolées sont notées.

ne couvre pas entièrement le domaine audible (20 Hz - 20 kHz). En sismologie pour les ondes de pression (type P) ( $c \sim 3000$  m/s dans la roche) se propageant dans le sol avec une longueur caractéristique de, disons  $l = 1000$  km, les méthodes de rayons s'appliquent (voir figure 1). *Ce raisonnement heuristique montre que la vibroacoustique, contrairement à d'autres disciplines, est bien souvent située à la limite du domaine d'application des méthodes de rayons.*

Une difficulté survient dans le cas des ondes structurales. La longueur d'onde dépend des propriétés du matériau (masse, raideur). Dans les structures assemblées comportant plusieurs éléments de différents matériaux, tous les éléments doivent être situés dans les hautes fréquences et donc pour la structure dans son ensemble, les hautes fréquences commencent lorsque la longueur d'onde est petite pour tous les éléments. La figure 2 montre un exemple de réponse de deux plaques assemblées de différentes épaisseurs. La comparaison avec la méthode de rayons dont les détails sont donnés ci-après montre clairement que la méthode des rayons est valide au delà de la première fréquence propre de la plaque la plus raide. *C'est une limitation importante des méthodes asymptotiques en vibroacoustique.*

D'autres définitions des hautes fréquences apparaissent dans la littérature. L'une d'entre elles repose sur la notion de densité modale  $n = \Delta N / \Delta \omega$  où  $\Delta N$  est le nombre de modes contenus dans la bande de fréquences  $\Delta \omega$  (rad/s). Cette définition est souvent adoptée en SEA. En effet, la SEA est largement basée sur des concepts statistiques. Son application suppose que la bande spectrale d'analyse contienne une large population de modes, c'est à dire que la densité modale soit forte pour qu'aucun mode particulier ne domine la dynamique. Par ailleurs, la densité modale est une grandeur facilement évaluable (de nombreuses formules asymptotiques existent dans la littérature), et facilement mesurable, une simple mesure de fonction de réponse en fréquence

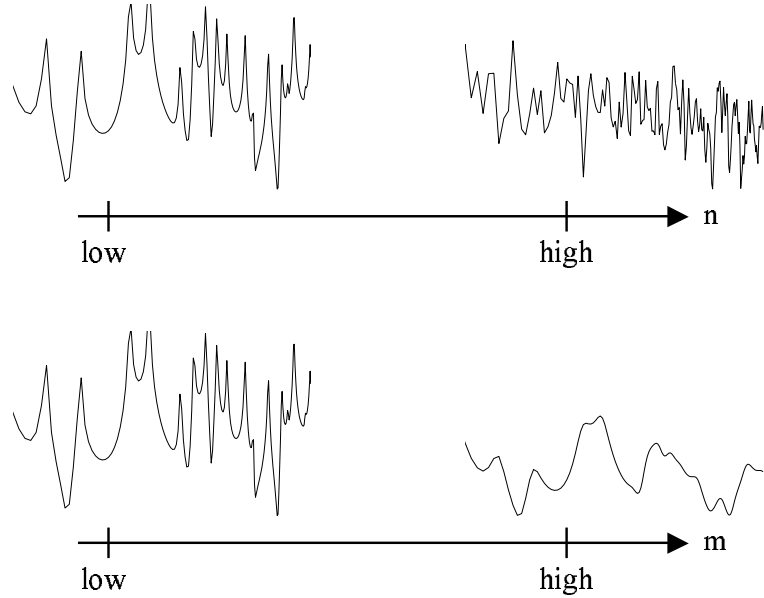


FIG. 3 – Fonctions de réponse en fréquence pour faibles et fortes valeurs de la densité modale  $n$  et du recouvrement modal  $m$ .

donne sa valeur. Cependant, cette définition ne s'applique pas aux problèmes extérieurs (systèmes non bornés) tels que la diffraction par des obstacles ou le rayonnement acoustique des structures, puisque ces systèmes ne présentent pas de modes. Par ailleurs, certains systèmes, les vibrations transverses des poutres d'Euler-Bernoulli par exemple, voient leur densité modale diminuer à mesure que la fréquence augmente! Une autre définition repose sur la notion de recouvrement modal,  $m = \eta\omega\Delta N/\Delta\omega$ , produit de la densité modale par  $\eta\omega$ , où  $\eta$  est le taux d'amortissement. Le recouvrement modal est un paramètre sans dimension. Un fort recouvrement modal signifie que les fréquences propres sont indiscernables et donc que l'analyse modale perd de son efficacité (figure 3).



Première partie

# THÉORIE



## 1 Présentation

Dans cette partie, nous présentons succinctement les principes théoriques de la méthode des échanges radiatifs. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux publications annexées. Toutefois, cette partie est rédigée de telle sorte que tous les principes de la méthode y sont décrits tout en limitant volontairement la portée théorique de l'exposé par souci de simplicité.

À la fin de cette partie figure une présentation de la méthode de diffusion de l'énergie vibratoire. Bien que nous n'ayons pas développé cette méthode, c'est l'étude critique de celle-ci [11] qui fût le point de départ pour l'élaboration de la théorie des échanges radiatifs de l'énergie vibratoire.

## 2 Hypothèses

La méthode des échanges radiatifs repose sur la théorie des rayons. C'est une méthode hautes fréquences de représentation des champs vibratoires (mécanique et acoustique).

On peut distinguer deux cas selon que l'on s'intéresse au champ stationnaire ou transitoire. Dans le premier cas, l'élément fondamental est l'onde progressive. Un champ vibratoire complexe est décomposé en ondes progressives. Les ondes évanescentes sont négligées dans cette représentation. Les caractéristiques de ces ondes, célérité, front d'onde et atténuation, doivent être connues analytiquement. Ceci implique en général, bien que ce ne soit pas absolument nécessaire sur le principe, que le milieu soit linéaire, homogène et isotrope. On retiendra qu'un seul type d'onde se propage en acoustique linéaire, trois ondes dans une plaque de Love (une onde associée au mouvement hors plan et deux ondes aux mouvements dans le plan) et trois ondes dans une poutre d'Euler-Bernoulli (flexion, traction-compression et torsion). Pour simplifier les notations, la suite de cette partie est rédigée en ne prenant en compte qu'un seul type d'onde. Si l'on s'intéresse au régime transitoire, la notion fondamentale est plutôt celle de paquet d'ondes. La longueur d'onde de ces paquets doit être inférieure à leur étendue spatiale et faible devant la longueur caractéristique du système (hypothèse hautes fréquences).

Les ondes progressives et les paquets d'ondes vérifient des relations très simples. Tout d'abord, si l'on note  $\mathbf{H}$  le vecteur intensité<sup>1</sup> et  $G$  la densité d'énergie vibratoire, alors  $\mathbf{H} = cG$  où  $c$  est la vitesse de groupe. De plus, on suppose toujours que la densité de puissance dissipée est proportionnelle à la densité d'énergie,  $p_{\text{diss}} = \eta\omega G = mcG$  où  $\eta$  désigne un coefficient d'amortissement, constant dans le cas de l'amortissement hystérétique,  $\omega$  la pulsation

---

<sup>1</sup>Au sens acoustique, son flux donne la puissance qui transite à travers une surface. C'est aussi le vecteur de Poynting en électromagnétisme.

centrale des ondes et  $m$  le coefficient d'atténuation des ondes en  $m^{-1}$ . Le premier modèle est plutôt répandu en mécanique et le deuxième en acoustique ( $m$  désigne alors l'absorption atmosphérique). On passe de l'un à l'autre avec la relation  $m = \eta\omega/c$ .

La théorie des échanges radiatifs s'appuie sur l'application de trois principes valables à hautes fréquences.

Le premier principe repose sur les formules de représentation intégrale des champs vibratoires comme, par exemple, la formule de Helmholtz-Kirchhoff pour l'acoustique. Dans chacune de ces formules, le champ est la somme du champ direct, contribution des sources réelles situées dans le domaine et du champ réfléchi, contribution des sources fictives situées sur la frontière du domaine. Ces dernières garantissent que les conditions aux limites sont vérifiées.

Le second principe stipule que toutes ces sources, réelles ou fictives, sont décorréelées, c'est à dire que leur phase relative est une variable aléatoire de loi uniforme. Il faut distinguer deux cas, les sources réelles ou *primaires* et les sources fictives ou *secondaires*. La décorrélation des sources primaires relève d'une hypothèse. On doit s'assurer, par la mesure, que les sources extérieures d'origine mécanique ou acoustique sont effectivement incohérentes. La décorrélation des sources secondaires relève plutôt d'une simplification délibérément introduite. Bien sûr, fondamentalement ces sources sont toujours en partie corrélées, mais les considérer comme incohérentes permet de négliger une partie de l'information (les interférences entre les ondes) ce qui conduit à réduire considérablement le temps de calcul.

Le troisième principe est le principe de localité. Il précise que tous les processus d'interaction entre ondes en un point donné ne dépendent que de la géométrie locale du système et des fronts d'onde. Ce principe découle directement de l'hypothèse hautes fréquences. Son intérêt principal est de permettre la décomposition d'un problème complexe en plusieurs problèmes canoniques. Chaque problème canonique « colle » localement au problème complexe, mais il est extrapolé de telle sorte qu'une solution analytique est disponible. De nombreux problèmes canoniques ont été résolus dans la littérature.

### 3 Représentation des champs d'énergie

Les systèmes vibrants sont supposés être entièrement décrits à l'aide de deux champs : le champ scalaire de densité d'énergie  $W$  et le champ vectoriel d'intensité  $\mathbf{I}$ , puissance vibratoire par unité de surface.

Le champ direct issu d'une impulsion à l'instant  $\tau$  au point  $\mathbf{s}$  est noté  $G$  (densité d'énergie) et  $\mathbf{H}$  (intensité). Son expression est facilement déterminée à l'aide du bilan local de puissance et de la relation de proportionnalité qui

lie l'intensité et la densité d'énergie pour une onde progressive ou un paquet d'ondes. On obtient,

$$G(\mathbf{s}, \tau; \mathbf{r}, t) = G(\mathbf{s}, \mathbf{r})\delta(t - \tau - s/c) \quad (1)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}, \tau; \mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{r})\delta(t - \tau - s/c) \quad (2)$$

où  $s = |\mathbf{s} - \mathbf{r}|$ .  $G(\mathbf{s}; \mathbf{r})$  et  $\mathbf{H}(\mathbf{s}; \mathbf{r})$  sont les champs stationnaires donnés par,

$$G(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \frac{e^{-ms}}{\gamma_0 c s^{n-1}} \quad (3)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = cG(\mathbf{s}, \mathbf{r})\mathbf{u}_{\mathbf{s}\mathbf{r}} \quad (4)$$

où  $\gamma_0$  est l'angle solide de l'espace ( $\gamma_0 = 2\pi$  si  $n = 2$  et  $\gamma_0 = 4\pi$  si  $n = 3$ ) et  $\mathbf{u}_{\mathbf{s}\mathbf{r}}$  est le vecteur unitaire orienté de  $\mathbf{s}$  vers  $\mathbf{r}$ .

Les champs complets  $W$  et  $\mathbf{I}$  sont obtenus par superposition linéaire des champs directs issus des sources primaires de puissance notée  $\rho$  et des sources secondaires  $\sigma$ . Il s'ensuit,

$$W(\mathbf{r}, t) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{s}, t - s/c)G(\mathbf{s}, \mathbf{r})d\Omega_{\mathbf{s}} + \int_{\Gamma} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}_{\mathbf{p}\mathbf{r}}, t - r/c)G(\mathbf{p}, \mathbf{r})d\Gamma_{\mathbf{p}} \quad (5)$$

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}, t) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{s}, t - s/c)\mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{r})d\Omega_{\mathbf{s}} + \int_{\Gamma} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}_{\mathbf{p}\mathbf{r}}, t - r/c)\mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{r})d\Gamma_{\mathbf{p}} \quad (6)$$

(7)

où  $s = |\mathbf{s} - \mathbf{r}|$ ,  $r = |\mathbf{p} - \mathbf{r}|$ .  $d\Omega$  est la mesure de Lebesgue dans le domaine  $\Omega$  et  $d\Gamma$  est la mesure de surface sur la frontière  $\Gamma$ .

Les champs  $W$  et  $\mathbf{H}$  vérifient le bilan local de puissance,

$$\mathbf{div}.\mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial t} + mcW = \rho \quad (8)$$

$\rho$  est une densité de puissance en  $\text{W}/\text{m}^3$ .

Dans le cas où la frontière est diffusante, les sources secondaires émettent l'énergie suivant la loi de Lambert,

$$\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}, \tau) = \sigma(\mathbf{p}, \tau) \cos \theta \quad (9)$$

où  $\theta$  est l'angle d'émission au point  $\mathbf{p}$  dans la direction  $\mathbf{u}$ .

## 4 Réflexion

L'équation sur l'inconnue  $\sigma$  est obtenue en appliquant le bilan de puissance sur la frontière pour chaque direction. La forme la plus générale de cette équation dépend de la *reflectivité bi-directionnelle* de la frontière  $R(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  où  $\mathbf{u}$

et  $\mathbf{v}$  sont des vecteurs unitaires.  $R(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  donne la luminance<sup>2</sup> dans la direction  $\mathbf{u}$  induite par un flux unitaire provenant de la direction  $\mathbf{v}$ . Il s'ensuit,

$$\frac{\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}, t)}{\gamma_0 \cos \theta} = \left[ \int_{\Omega} R(\mathbf{u}_{\mathbf{s}\mathbf{p}}, \mathbf{u}) \rho(\mathbf{s}, t - s/c) \mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) d\Omega_{\mathbf{s}} + \int_{\Gamma} R(\mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{p}}, \mathbf{u}) \sigma(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{p}}, t - r/c) \mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\Gamma_{\mathbf{q}} \right] \cdot \mathbf{n} \quad (10)$$

où  $s = |\mathbf{s} - \mathbf{p}|$ ,  $r = |\mathbf{q} - \mathbf{p}|$  avec  $\mathbf{n}$  la normale unitaire extérieure en  $\mathbf{p}$ . Cette équation relie la luminance dans la direction  $\mathbf{u}$  (terme de gauche) au flux incident des sources primaires (première intégrale de droite) et des sources secondaires (deuxième intégrale de droite).

On définit la *réflectivité hémisphérique* ou l'*efficacité de réflexion*  $R(\mathbf{v})$  d'une frontière comme le flux total quittant la frontière pour une incidence  $\mathbf{v}$ ,

$$R(\mathbf{v}) = \int R(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \cos \theta du \quad (11)$$

où l'intégrale est évaluée sur la demi-sphère unitaire des directions intérieures et  $du$  est la mesure sur la demi-sphère.

Dans le cas d'une réflexion diffuse, on peut multiplier l'équation (10) par  $\cos \theta$  et intégrer. L'équation sur  $\sigma$  se simplifie alors,

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} \sigma(\mathbf{p}, t) = \left[ \int_{\Omega} R(\mathbf{u}_{\mathbf{s}\mathbf{p}}) \rho(\mathbf{s}, t - s/c) \mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) d\Omega_{\mathbf{s}} + \int_{\Gamma} R(\mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{p}}) \sigma(\mathbf{q}, t - r/c) \cos \theta' \mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\Gamma_{\mathbf{q}} \right] \cdot \mathbf{n} \quad (12)$$

où  $\gamma = \int \cos \theta du$  et  $\theta'$  est l'angle d'émission en  $\mathbf{q}$ . C'est une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce. Elle peut être résolue par les méthodes classiques de collocation ou de Galerkin.

Dans le cas d'une réflexion spéculaire, la réflectivité s'écrit,

$$R(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = R(\mathbf{u}') \delta(\mathbf{v} - \mathbf{u}') / \cos \theta \quad (13)$$

où  $\mathbf{u}'$  est la direction incidente de  $\mathbf{u}$ . L'équation sur  $\sigma$  devient alors,

$$\frac{\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}, t)}{\cos \theta} = R(\mathbf{u}') \left[ \frac{\sigma(\mathbf{p}', \mathbf{u}', t')}{\cos \theta'} e^{-mr} + \int_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} \rho(\mathbf{s}, t - s/c) e^{-ms} ds \right]. \quad (14)$$

où  $\mathbf{p}'$  est le point de la frontière en regard de  $\mathbf{p}$  dans la direction  $\mathbf{u}'$ ,  $\theta'$  l'angle d'émission en  $\mathbf{p}'$  et  $t' = t - r/c$  avec  $r = |\mathbf{p}' - \mathbf{p}|$ . L'intégrale de droite est évaluée sur le segment  $\mathbf{p}' - \mathbf{p}$ . C'est une équation fonctionnelle sur  $\sigma$ .

---

<sup>2</sup>puissance par unité d'angle solide et par unité de surface normale au rayon.

## 5 Transmission

Le problème de la transmission des ondes entre deux milieux de célérités différentes est une simple généralisation du problème de la réflexion. Considérons des milieux (deux ou plus) repérés par un indice  $i$ .  $R_{ji}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  est la *transmissibilité bi-directionnelle* du milieu  $j$  vers le milieu  $i$ . On la définit comme la luminance dans la direction  $\mathbf{u}$  du système  $i$  induite par un flux unitaire provenant de la direction  $\mathbf{v}$  du système  $j$ . Lorsque  $i = j$  cette notion se confond avec celle de réflectivité bi-directionnelle. L'équation la plus générale sur les inconnues  $\sigma_i$  est

$$\frac{\sigma_i(\mathbf{p}, \mathbf{u}, t)}{\gamma_0 \cos \theta} = \sum_j \left[ \int_{\Omega_j} R_{ji}(\mathbf{u}_{\mathbf{sp}}, \mathbf{u}) \rho_j(\mathbf{s}, t - s/c) \mathbf{H}_j(\mathbf{s}, \mathbf{p}) d\Omega_{\mathbf{s}} + \int_{\Gamma_j} R_{ji}(\mathbf{u}_{\mathbf{qp}}, \mathbf{u}) \sigma_j(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{\mathbf{qp}}, t - r/c) \mathbf{H}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\Gamma_{\mathbf{q}} \right] \cdot \mathbf{n}_j \quad (15)$$

où  $\mathbf{n}_j$  est la normale unitaire extérieure au système  $j$  en  $\mathbf{p}$ .

On définit aussi la *transmissibilité hémisphérique* ou *efficacité de transmission* entre les systèmes  $j$  et  $i$  par

$$R_{ji}(\mathbf{v}) = \int R_{ji}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \cos \theta du \quad (16)$$

où l'intégrale est évaluée sur toutes les directions d'émission.

Dans le cas où l'émission de l'énergie est diffuse, chaque source fictive  $\sigma_i$  suit une loi de Lambert et l'équation précédente se simplifie,

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} \sigma_i(\mathbf{p}, t) = \sum_j \left[ \int_{\Omega_j} R_{ji}(\mathbf{u}_{\mathbf{sp}}) \rho_j(\mathbf{s}, t - s/c) \mathbf{H}_j(\mathbf{s}, \mathbf{p}) d\Omega_{\mathbf{s}} + \int_{\Gamma_j} R_{ji}(\mathbf{u}_{\mathbf{qp}}) \sigma_j(\mathbf{q}, t - r/c) \cos \theta' \mathbf{H}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\Gamma_{\mathbf{q}} \right] \cdot \mathbf{n}_j \quad (17)$$

C'est un système d'équations intégrales de Fredholm de seconde espèce.

Dans le cas d'une transmission spéculaire, on introduit les vecteurs  $\mathbf{u}_i$  directions associées dans chaque milieu. Ils sont reliés par les relations de Snell-Descartes. L'angle entre  $\mathbf{u}_i$  et la normale est noté  $\theta_i$ . La transmissibilité bi-directionnelle prend alors la forme,

$$R_{ji}(\mathbf{v}, \mathbf{u}_i) = R_{ji}(\mathbf{u}_j) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{u}_j) / \cos \theta_j \quad (18)$$

L'équation sur  $\sigma$  se simplifie alors en,

$$\frac{\sigma_i(\mathbf{p}, \mathbf{u}_i, t)}{\cos \theta_i} = \sum_j \left( \frac{c'_j}{c'_i} \right)^{n-1} R_{ji}(\mathbf{u}'_j) \left[ \frac{\sigma_j(\mathbf{p}'_j, \mathbf{u}'_j, t'_j)}{\cos \theta'_j} e^{-m_j r_j} + \int_{\mathbf{p}'_j \mathbf{p}} \rho_j(\mathbf{s}, t - s/c_j) e^{-m_j s} ds \right] \quad (19)$$

où  $c'_i$  est la vitesse de phase du milieu  $i$ . On obtient un système d'équations fonctionnelles sur les inconnues  $\sigma_i$ .

## 6 Méthode diffusion de l'énergie vibratoire

Cette méthode est différente de la méthode des échanges radiatifs. Elle a été proposée dans les références [12, 3, 13, 14, 15] pour prédire la répartition macroscopique de l'énergie dans les structures vibrantes. Nous présentons ici les principes de cette méthode qui sera comparée et discutée dans la troisième partie de ce mémoire.

La méthode de diffusion de l'énergie vibratoire repose sur le bilan local de puissance en régime établi :

$$\mathbf{div} \mathbf{I} + p_{\text{diss}} = \rho \quad (20)$$

où  $\rho$  est la densité de puissance fournie au système et  $p_{\text{diss}}$  la densité de puissance dissipée au sein du système. La densité de puissance dissipée est proportionnelle à la densité d'énergie.

$$p_{\text{diss}} = \eta \omega W \quad (21)$$

où  $\eta$  est le coefficient d'amortissement.

Une relation inspirée de la loi de Fourier lie l'intensité locale  $\mathbf{I}$  au gradient de la densité d'énergie :

$$\mathbf{I} = \frac{-c^2}{\eta \omega} \mathbf{grad} W \quad (22)$$

En introduisant cette relation ainsi que le modèle de dissipation (21) dans le bilan local de puissance (20), on obtient une équation où n'apparaît plus que la densité d'énergie  $W$  :

$$\frac{-c^2}{\eta \omega} \Delta W + \eta \omega W = \rho \quad (23)$$

C'est l'équation de diffusion de l'énergie analogue à l'équation de conduction de la chaleur avec un terme convectif. Diverses conditions aux limites sont possibles pour  $W$ , la plus simple exprime que le flux de puissance sortante est nul sur une frontière non dissipative, soit  $\partial W / \partial \mathbf{n} = 0$  où  $\mathbf{n}$  est la normale à la frontière.



Deuxième partie

**LE CODE CeReS**



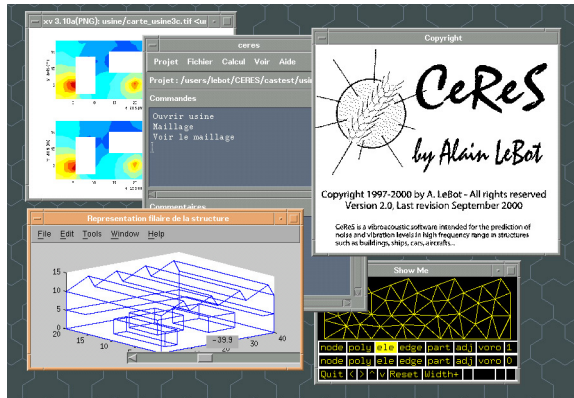


FIG. 4 – Présentation du code CeReS et de son interface graphique.

## 1 Présentation

L'objet de ce code est de calculer l'énergie vibratoire ou acoustique en tout point d'une structure constituée d'un assemblage de poutres, de plaques et de salles acoustiques en interaction. Les sources peuvent être de nature vibratoire ou acoustique (voir figure 4).

Les applications visées concernent l'industrie du transport (automobiles, avion, bateau, train...) et celles du bâtiment. Ce code est un outil prévisonnel pour l'évaluation et l'amélioration du confort vibroacoustique. Connaissant la puissance des sources, il s'agit de calculer l'énergie reçue en un point spécifié de la structure. Tous les chemins de propagation de l'énergie sont pris en compte, solidiens et aériens.

L'organigramme du code est présenté figure 5. La structure est définie par trois fichiers de données. Un pour la géométrie, un pour les matériaux et les caractéristiques physiques et un pour les systèmes (poutres, plaques ou salles) ainsi que l'assemblage (couplage des systèmes). Ces données sont lues par le mailleur qui crée un fichier contenant les éléments du maillage ainsi que les données physiques associées. Trois solveurs sont disponibles. L'un applique la méthode SEA bien connue par ailleurs (il existe des codes commerciaux qui réalisent ce calcul). Le deuxième applique simplement la formule de Sabine. Enfin le troisième utilise la méthode des échanges radiatifs que nous avons développée. C'est la raison d'être de ce code.

L'environnement du code CeReS est constitué d'une interface graphique, d'un pré-processeur de visualisation de la structure maillée et de post-processeurs pour visualiser les résultats de calcul. L'ensemble représente 35000 lignes de programmation en Fortran et C. Une documentation associée a été rédigée

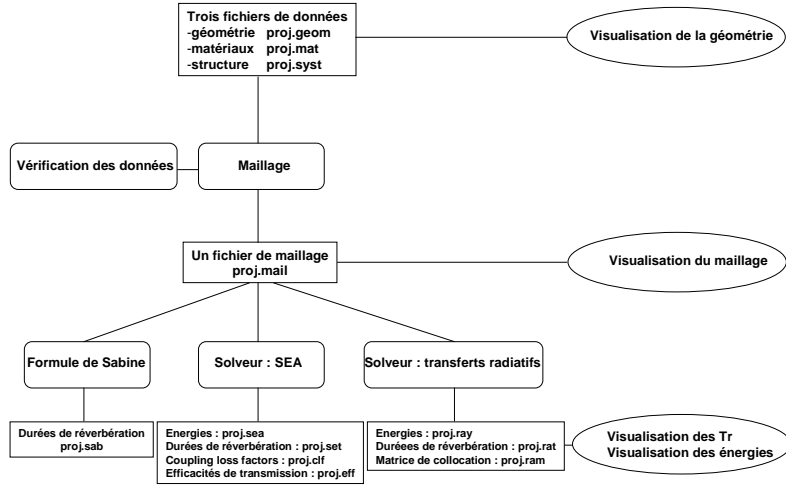


FIG. 5 – Organigramme du code CeReS

[16].

## 2 Schéma numérique

### 2.1 Régime stationnaire

Les équations intégrales (12,17) sont résolues avec une méthode de collocation. Le principe est le suivant. Les sources sont ponctuelles et en nombre fini, on les repère par un indice  $s$ , ainsi, la puissance de la source  $\mathbf{s}_s$  est notée  $\rho^s$ . La frontière de chaque système est constituée d'arêtes (cas des plaques) ou de faces planes (cas des salles acoustiques). On la subdivise en éléments droits notés  $\Gamma_k$  (segments ou triangles) repérés par un indice  $k$ . Les inconnues  $\sigma(\mathbf{p})$  sont supposées constantes sur chacun de ces éléments. On note  $\sigma^k$  cette valeur ou  $\sigma_i^k$  dans le cas où plusieurs systèmes ( $i = 1, 2, \dots$ ) sont couplés. L'équation intégrale est écrite en chaque point de collocation  $\mathbf{p}^k$  choisi sur l'élément  $\Gamma_k$  (le centre ou le barycentre). Il vient,

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} \sigma^k = \sum_s \rho^s RH(\mathbf{s}_s, \mathbf{p}_k) \cos \varphi_k + \sum_l \sigma^l \int_{\Gamma_l} RH(\mathbf{q}, \mathbf{p}_k) \cos \theta' \cos \varphi_k d\Gamma_{\mathbf{q}} \quad (24)$$

où  $\theta'$  est l'angle d'émission en  $\mathbf{q}$ ,  $\varphi_k$  l'angle d'incidence en  $\mathbf{p}_k$  du rayon venant respectivement de  $\mathbf{s}_s$  (premier terme de droite) et de  $\mathbf{q}$  (deuxième terme de droite). L'efficacité de réflexion  $R$  est évaluée pour la direction d'incidence.

En second lieu, pour un élément situé à l'interface de deux milieux, on écrit une équation par milieu. Soit,

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} \sigma_i^k = \sum_{j,s} \rho_j^s R_{ji} H_j(\mathbf{s}_s, \mathbf{p}_k) \cos \varphi_k + \sum_{j,l} \sigma^l \int_{\Gamma_l} R_{ji} H_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}_k) \cos \theta^l \cos \varphi_k d\Gamma_{\mathbf{q}} \quad (25)$$

où les termes sont sommés pour tous les systèmes en présence. On forme ainsi un système d'équations linéaires,

$$[K][\sigma] = [B] \quad (26)$$

sur les inconnues  $\sigma_i^k$  dont les coefficients sont des intégrales,

$$K_{ij}^{kl} = \frac{\gamma_0}{\gamma} \int_{\Gamma_l} R_{ji} H_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}_k) \cos \theta^l \cos \varphi_k d\Gamma_{\mathbf{q}} \quad (27)$$

$$B_i^k = \frac{\gamma_0}{\gamma} \sum_{j,s} \rho_j^s R_{ji} H_j(\mathbf{s}_s, \mathbf{p}_k) \cos \varphi_k \quad (28)$$

Celles-ci sont évaluées numériquement par un algorithme d'intégration de Gauss.

Le système est résolu par n'importe quelle méthode standard. Notons que la matrice est réelle et pleine, et qu'elle n'est pas symétrique. Lorsque les sources fictives  $\sigma_i^k$  sont connues, on peut calculer les champs  $W$  et  $\mathbf{H}$  en n'importe quel point de la structure.

$$W(\mathbf{r}) = \sum_s \rho^s G(\mathbf{s}_s, \mathbf{r}) + \sum_k \sigma^k \int_{\Gamma_k} G(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \cos \theta d\Gamma_{\mathbf{p}} \quad (29)$$

où  $\theta$  est l'angle d'émission en  $\mathbf{p}$ . Pour l'intensité vibratoire,

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}) = \sum_s \rho^s \mathbf{H}(\mathbf{s}_s, \mathbf{r}) + \sum_k \sigma^k \int_{\Gamma_k} \mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \cos \theta d\Gamma_{\mathbf{p}} \quad (30)$$

Là encore, les intégrales sont évaluées par la méthode de Gauss.

## 2.2 Régime transitoire

Le cas du régime transitoire est différent. On peut distinguer deux problèmes bien distincts. L'étude de la décroissance précoce et celle de la durée de réverbération. La première nécessite une résolution pas à pas des équations temporelles, par exemple avec un algorithme aux différences finies. Notons que c'est le problème le plus complet puisque la connaissance de la réponse impulsionnelle permet par convolution de connaître la réponse à n'importe quel signal d'excitation.

Le second problème, le plus utile en pratique, est de déterminer la durée de réverbération (durée en s pour que l'énergie vibratoire décroisse de 60 dB).

Raisonnons sur un seul système. On cherche les solutions de la forme  $W(t) = We^{-t/\tau}$ ,  $\sigma(t) = \sigma^k e^{-t/\tau}$  qui existent après extinction des sources. Il s'agit donc de trouver le nombre  $\tau$  qui permette au système,

$$[K(\tau)][\sigma] = [0] \quad (31)$$

avec,

$$K^{kl}(\tau) = \frac{\gamma_0}{\gamma} \int_{\Gamma_l} R_{ji} H_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}_k) \cos \theta' \cos \varphi_k e^{s/c\tau} d\Gamma_{\mathbf{q}} \quad (32)$$

où  $s = |\mathbf{q} - \mathbf{p}_k|$ , d'admettre des solutions non triviales. On recherche donc la valeur de  $\tau$  qui annule le déterminant de  $[K(\tau)]$ .

Il est facile de montrer que  $\tau$  est unique. Pour  $[\sigma]$  fixé et positif, la fonction,

$$\tau \rightarrow \sigma^k - \frac{\gamma_0}{\gamma} \sum_l \sigma^l \int_{\Gamma_l} R H(\mathbf{q}, \mathbf{p}_k) \cos \theta' \cos \varphi_k e^{s/c\tau} d\Gamma_{\mathbf{q}} \quad (33)$$

est croissante puisque sa dérivée,

$$\tau \rightarrow \frac{\gamma_0}{\gamma} \sum_l \sigma^l \int_{\Gamma_l} R H(\mathbf{q}, \mathbf{p}_k) \cos \theta' \cos \varphi_k e^{s/c\tau} \frac{s}{c\tau^2} d\Gamma_{\mathbf{q}} \quad (34)$$

est positive. Elle ne peut donc s'annuler qu'une fois. Cependant, il existe en général plusieurs valeurs de  $\tau$  qui annulent le déterminant de  $[K(\tau)]$ . Mais il n'existe qu'une seule valeur de  $\tau$  qui annule le déterminant de  $[K(\tau)]$  et telle que le système  $[K(\tau)][\sigma] = [0]$  admette une solution positive  $[\sigma] > 0$ .

Pour ne pas avoir à calculer la matrice  $[K(\tau)]$  à chaque itération, on peut admettre l'approximation suivante,

$$K^{kl}(\tau) = K^{kl}(0) e^{s_{kl}/c\tau} \quad (35)$$

où  $s_{kl} = |\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_l|$ . Cette approximation est raisonnable lorsque les éléments sont suffisamment petits. La recherche de  $\tau$  est effectuée par un algorithme de recherche de zéros des fonctions.

## 3 Constitution de la structure

### 3.1 Géométrie

Certaines règles et conventions doivent être respectées pour la constitution des fichiers de données associés à une structure. Une structure est formée d'un assemblage de systèmes pouvant être :

- des poutres,
- des plaques,

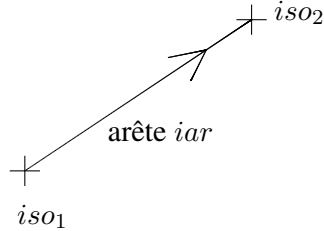


FIG. 6 – Convention d’orientation des arêtes.

– des salles acoustiques.

Chaque système est une association d’un élément géométrique, des caractéristiques physiques du domaine, de sa frontière, des points d’observation (ou de calcul) et d’excitation ainsi que des puissances injectées par chacun d’entre eux. La structure est ainsi entièrement définie par trois fichiers de données : le fichier **proj.geom** contenant les éléments géométriques, le fichier **proj.mat** contenant les fréquences, les caractéristiques des matériaux, les puissances injectées et le fichier **proj.syst** contenant la définition des systèmes par association des données des deux premiers fichiers.

Les éléments géométriques sont au nombre de quatre : les sommets, les arêtes, les faces et les cavités.

Le sommet est un point qui peut servir d’extrémité d’une arête, de point d’excitation ou d’observation d’un système. Il est défini par un numéro **iso** et ses coordonnées **x, y, z** dans un trièdre absolu à trois dimensions. Ce repère est commun pour l’ensemble de la structure. Dans le fichier **proj.geom**, un sommet est une ligne de la forme :

**iso x y z**

**Attention** : les sommets doivent être tous distincts.

Une arête **iar** est un segment orienté dont les extrémités sont des sommets. *L’arête est conventionnellement orientée du premier sommet vers le second* (voir figure 6). On lui associe aussi la longueur maximale **lomax** des éléments de frontière définis par le mailleur. Dans le fichier **proj.geom**, une arête est une ligne de la forme :

**iar lomax iso<sub>1</sub> iso<sub>2</sub>**

Une face **ifa** est un ensemble borné d’un plan affine et un vecteur normal. Sa frontière est composée de **nar** arêtes consécutives (la deuxième extrémité d’une arête est la première extrémité de l’arête suivante). Cependant, elle peut contenir plusieurs lacets. C’est le cas d’une plaque trouée par exemple. *Par convention, la matière est située à gauche de la frontière lorsqu’on regarde*

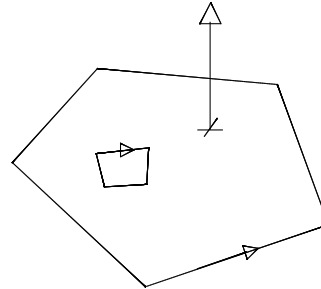


FIG. 7 – Convention de positionnement de la matière, elle est située à gauche des arêtes lorsque l'on regarde dans le sens de celle-ci, la normale indiquant le haut. Ici, un pentagone avec un trou.

dans la direction de l'arête, la normale indiquant le haut (voir figure 7). Il s'agit donc de bien orienter le lacet extérieur et d'orienter dans le sens contraire les lacets intérieurs délimitant les trous. On associe aux faces une surface maximale **sumax** pour les éléments de frontière créés par le mailleur. Dans le fichier **proj.geom**, une face est une ligne de la forme :

```
ifa sumax nar iar1 ... iarn
```

où **ifa** est l'indice de la face, **sumax** la surface maximale des éléments de frontière, **nar** le nombre d'arêtes formant la frontière et **iar<sub>i</sub>** la liste des indices des arêtes ordonnées consécutivement.

Une cavité est un ensemble borné de l'espace dont la frontière est constituée de faces. Cette frontière peut contenir plusieurs surfaces fermées. C'est le cas d'une salle contenant un objet encombrant. *Par convention, les normales des faces sont les normales extérieures à la cavité*

(voir figure 8). Là aussi, il convient d'orienter correctement la surface externe et les surfaces des objets encombrants. Dans le fichier **proj.geom**, une cavité est une ligne de la forme :

```
ica nfa ifa1 ... ifan
```

où **ica** est l'indice de la cavité, **nfa** le nombre de faces formant la frontière et **ifa<sub>i</sub>** la liste des indices des faces.



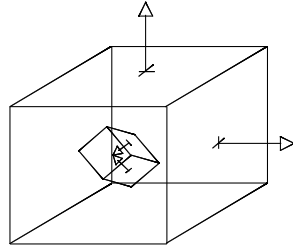


FIG. 8 – Convention de positionnement du fluide, les normales aux faces indiquent l'extérieur de la cavité. Ici, un cube évidé par un autre cube.

### 3.2 Caractéristiques physiques

Les caractéristiques physiques dépendent de la nature du système considéré. Mais on peut distinguer deux catégories pour chaque système. Tout d'abord les caractéristiques de l'intérieur du système, lieu de propagation des ondes, puis les caractéristiques de la frontière du système, lieu de réflexion des ondes.

Le fichier **proj.mat** commence par deux lignes indiquant les fréquences de calcul.

```
nfr
freq1 ... freqnfr
```

où **nfr** est le nombre de fréquences et **freq<sub>i</sub>** les valeurs des fréquences.

Les poutres sont calculées suivant le modèle d'Euler-Bernoulli. Chaque poutre est définie par la donnée de la masse volumique du matériau  $\rho$  en  $\text{kg/m}^3$ , le module d'Young  $E_0$  en Pa, sa section  $S$  en  $\text{m}^2$  et son inertie  $I$  en  $\text{m}^4$ . Le coefficient d'amortissement  $\eta$  est donné pour chaque valeur de la fréquence. Chaque poutre est donc définie dans **proj.mat** par deux lignes

```
ima  $\rho$   $E_0$   $S$   $I$ 
 $\eta_1$  ...  $\eta_{nfr}$ 
```

où **ima** est l'indice du matériau,  $\eta_i$  les coefficients d'amortissement aux **nfr** fréquences.

En ce qui concerne les plaques, les constantes de propagation sont calculées suivant le modèle de Love : l'inertie de rotation des sections est négligée ainsi que l'énergie de déformation due à l'effort tranchant. Les caractéristiques du domaine sont la masse volumique  $\rho$  en  $\text{kg/m}^3$ , le module d'Young  $E_0$  en Pa,

l'épaisseur de la plaque  $h$  en m, le coefficient de Poisson  $\nu$  sans unité et le coefficient d'amortissement hystérétique  $\eta$  sans unité. Ce dernier dépend de la fréquence (il serait constant pour un véritable amortissement hystérétique). L'amortissement ajoute une partie imaginaire au module d'élasticité  $E = E_0(1 + j\eta)$  avec la convention de temps  $e^{j\omega t}$ . Un matériau pour une plaque est introduit dans le fichier **proj.mat** par deux lignes suivant le type :

$$\begin{array}{l} \mathbf{ima} \ \rho \ E_0 \ h \ \nu \\ \eta_1 \ \dots \ \eta_{nfr} \end{array}$$

où **ima** est l'indice du matériau,  $\eta_i$  les coefficients d'amortissement aux **nfr** fréquences. Les vitesses de phase  $c'$  et de groupe  $c$  sont données par les relations suivantes :

$$c' = \sqrt[4]{\frac{\rho h}{D}} \omega^2 \quad c = 2 \sqrt[4]{\frac{\rho h}{D}} \omega^2 \quad (36)$$

avec  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  rigidité de la plaque.

En ce qui concerne les salles acoustiques, les lois de l'acoustique linéaire sont appliquées. La propagation des ondes de pression est ainsi entièrement caractérisée par la donnée de la vitesse du son  $c$  en m/s (le milieu est non dispersif, il n'y a donc pas lieu de distinguer les vitesses de phase et de groupe) et la masse volumique  $\rho$  du milieu en  $\text{kg/m}^3$ . L'absorption atmosphérique qui résulte de phénomènes complexes et variés (viscosité de l'air, échanges thermiques...) est synthétisée par un coefficient d'atténuation  $m$  exprimé en  $\text{m}^{-1}$ . Il dépend de la fréquence mais est souvent donné en dB/m dans les tables et abaques. La relation de changement d'unité est :

$$m [\text{dB/m}] = 4,34 m [\text{m}^{-1}] \text{ avec } 4,34 = 10 \log_{10} e \quad (37)$$

La donnée d'un fluide pour une salle acoustique s'effectue donc au moyen de deux lignes dans le fichier **proj.mat** :

$$\begin{array}{l} \mathbf{ima} \ \rho \ c \\ \mathbf{m}_1 \ \dots \ \mathbf{m}_{nfr} \end{array}$$

où **ima** est l'indice du fluide,  $\mathbf{m}_i$  les coefficients d'atténuation aux **nfr** fréquences.

La frontière des systèmes ; il s'agit d'extrémités pour les poutres, d'arêtes pour les plaques et de faces pour les salles acoustiques, est susceptible d'absorber une partie de la puissance incidente. On lui attache un coefficient  $\alpha$  sans dimension dont la valeur est comprise entre 0 et 1 et qui exprime le ratio entre la puissance incidente et la puissance réfléchiée. Ce coefficient, bien connu en

acoustique des salles, dépend *a priori* de la direction d'incidence. Cependant, les valeurs en fonction de l'incidence sont rarement disponibles et le code ne prend pas en compte cette nuance. Toujours en acoustique des salles, ce coefficient est souvent mesuré en plaçant un échantillon du matériau dans une chambre réverbérante et en appliquant la formule de Sabine. Il ne s'agit alors pas du même coefficient puisque les valeurs de ce dernier peuvent dépasser 1. La relation de passage de l'absorption énergétique à l'absorption Sabine est :

$$\alpha [\text{énergétique}] = 1 - e^{-\alpha [\text{Sabine}]} \quad (38)$$

Les coefficients d'absorption sont introduits dans le fichier **proj.mat** par des lignes du type :

```
iab  $\alpha_1$  ...  $\alpha_{nfr}$ 
```

où **iab** est l'indice de l'absorbant et  $\alpha_i$  les coefficients d'absorption aux **nfr** fréquences.

Enfin, le fichier matériau doit aussi préciser quelles sont les puissances injectées dans la structure par chacune des excitations. Celles-ci sont données en watt et dépendent de la fréquence. On introduit ainsi dans le fichier **proj.mat**, des tableaux de puissances injectées :

```
ipi pinj1 ... pinjnfr
```

où **ipi** est l'indice du tableau et **pinj<sub>i</sub>** les puissances en watt aux **nfr** fréquences. Ces tableaux seront ultérieurement affectés aux points d'excitation.

### 3.3 Systèmes et couplage entre systèmes

Un système est constitué par l'association d'un élément géométrique, de caractéristiques physiques et de sommets précisant le lieu des excitations et des points d'observation. Les couplages entre systèmes doivent aussi être spécifiés.

L'organisation des données est identique pour chacun de ces systèmes. On donne successivement l'indice du système **isy**, l'indice du matériau du domaine **ima**, l'indice **iar**, **ifa** ou **ica** de l'élément géométrique, les indices **iab<sub>1</sub> ... iab<sub>n</sub>** des lois d'absorption associées aux frontières dans l'ordre où elles sont définies dans **proj.geom** pour l'élément géométrique. Une première ligne apparaît donc dans le fichier **proj.syst** sous la forme, ici pour une plaque :

```
isy ima ifa iab1 ... iabn
```

Chaque système possède des excitations. On donne l'indice du sommet afférent immédiatement suivi des indices des puissances injectées qui lui sont affectées.

Par point d'excitation, il faut donner autant de fonctions  $P_{in_j} = f(\text{fréquence})$  qu'il y a de formes d'ondes pouvant se propager dans le système à savoir :

- trois pour les poutres : flexion, traction-compression, torsion,
- trois pour les plaques : flexion, longitudinale, transverse,
- une pour les cavités acoustiques : pression.

On veillera à bien respecter l'ordre de ces ondes. Ainsi, par système, doit figurer dans le fichier **proj.syst** une ligne du type :

```
nex iex1 ipi1 ... ipin ... iexnex ipi1 ... ipin
```

où **n** est le nombre de types d'ondes pouvant se propager dans le système.

Les points d'observation sont les points du système où seront évaluées les densités d'énergie. Ils figurent dans le fichier **proj.syst** comme une liste de sommets :

```
npt ipt1 ... iptnpt
```

où **npt** est le nombre de points d'excitation et **ipt<sub>i</sub>** les indices des sommets.

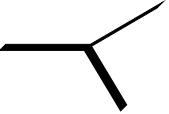
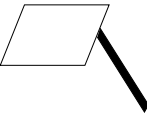

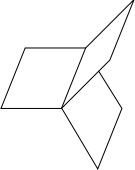
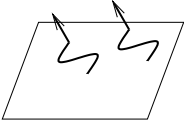
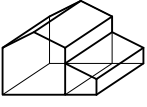
À ce stade, les systèmes sont entièrement définis. Il s'agit maintenant de définir la structure en associant ces systèmes, c'est à dire en précisant quels sont les couplages entre ces systèmes. Commençons par passer en revue tous les types de couplage pris en compte dans ce code. Le couplage poutre-poutre associe des poutres jointes par leurs extrémités. Le couplage poutre-plaque peut être de deux natures selon que la poutre est connectée par son extrémité où qu'elle est en contact avec la plaque sur toute sa longueur (rigidificateur). Le couplage plaque-plaque associe deux ou plusieurs plaques par un bord commun. Le couplage plaque-salle concerne le rayonnement de surface des plaques. Enfin, le couplage salle-salle associe deux salles séparées par une cloison commune (transparence). Les couplages sont définis de la manière suivante :

```
ico iar ind nsy isy1 ... isynsy
```

où **ico** est l'indice du couplage, **iar** est l'indice de l'élément géométrique par lequel le couplage a lieu (une arête pour un couplage de plaques, une face pour un couplage de salles). **ind** est un indice indiquant la nature du couplage, **nsy** le nombre de systèmes couplés et **isy<sub>1</sub> ... isy<sub>nsy</sub>** la liste de ces systèmes.

### 3.4 Maillage de la structure

La méthode des transferts radiatifs mise en œuvre dans ce code repose sur des équations intégrales de frontière. Celles-ci sont résolues par une méthode

	poutre	plaque	salle
poutre			
plaque			
salle			

TAB. 2 – Tableau des types de couplage pris en compte dans CeReS.

numérique dite de collocation qui nécessite un maillage de la frontière des systèmes. Pour les plaques il s'agit de mailler une courbe et pour les cavités acoustiques une surface.

Le maillage des arêtes est le plus simple des maillages qu'on puisse imaginer! À chaque arête est associée, dans le fichier **proj.geom**, une longueur maximale des éléments. L'arête est donc subdivisée en autant de segments de longueur égale.

Le maillage des faces repose sur la technique de triangulation conforme de Delaunay. Une triangulation de Delaunay d'un ensemble de points est une triangulation dont les sommets des triangles sont les points de l'ensemble et qui vérifie la propriété qu'*aucun cercle circonscrit à un triangle ne contient de sommet des autres triangles*. Lorsqu'elle est contrainte et c'est le cas dans ce code, la triangulation respecte la frontière des faces c'est à dire d'une part que chaque élément d'arête apparaît une seule fois comme coté d'un triangle et d'autre part que tous les triangles sont à l'intérieur de la face. Une triangulation contrainte de Delaunay n'est donc pas une triangulation de Delaunay à proprement parler puisque la propriété de Delaunay peut être violée. Pour qu'elle soit respectée il peut être nécessaire d'ajouter des éléments à la frontière. C'est la triangulation conforme de Delaunay. De plus, des points peuvent être ajoutés dans le domaine pour qu'aucun triangle ne présente un angle inférieur à 20,7 degrés.

### 3.5 Les solveurs

#### Le programme **verif**

Le programme **verif** a pour fonction de vérifier la cohérence des fichiers de données. Précisons que celui-ci *ne garantit pas que les fichiers de données soient parfaitement conformes aux souhaits de l'utilisateur, mais garantit seulement que ces données respectent certains critères géométriques assurant leur cohérence*. Et encore, il ne s'agit que d'une série de tests qui ne prétend pas être exhaustive!

#### Le programme **sabine**

Le programme **sabine** applique simplement la formule de Sabine pour les salles acoustiques. Il s'agit d'un calcul rapide et fiable dans des circonstances largement décrites dans la littérature, champ diffus (homogène et isotrope), absorption faible... Ce calcul ne s'applique qu'aux salles fermées et sans tenir compte du couplage entre les salles.

#### Le programme **sea**

Le programme **sea** calcule les énergies totales de chaque sous-système que sont les poutres, plaques et cavités acoustiques, selon la méthode SEA. Ce calcul est relativement standard. Il repose sur les hypothèses de champ diffus, absorption faible, couplage faible entre les sous-structures, excitations décorréélées... Les coefficients de perte par couplages sont calculés suivant la méthode ondulatoire. L'intérêt principal de ce calcul réside dans sa rapidité. Une structure contient rarement plus de quelques dizaines d'éléments, donnant lieu à la résolution d'un système linéaire de même taille.

#### Le programme **ray\_diffus**

Le programme **ray\_diffus** calcule l'énergie en tout point de la structure, en régime stationnaire, selon la méthode des échanges radiatifs.

Le champ vibratoire et/ou acoustique n'a pas besoin d'être supposé diffus. Cependant, on adopte la loi de réflexion lambertienne. Ce programme est basé sur l'algorithme de collocation. Le calcul nécessite l'inversion d'un système de grande taille. Mais le maillage ne dépend pas de la fréquence.

### Le programme `tr_ray`

Le programme `tr_ray` calcule les durées de réverbération de la structure, selon la méthode des échanges radiatifs. Dans le cas d'une salle isolée, il existe une seule durée de réverbération. Mais dans le cas d'une structure composée, plusieurs durées de réverbération existent, une par sous-système. La décroissance de l'énergie en un point est une combinaison linéaire des différentes décroissances. Les durées de réverbération sont calculées en recherchant les pôles réels de la transformée de Laplace de la courbe de décroissance de l'énergie.





Troisième partie

# APPLICATIONS



## 1 Méthode de diffusion de l'énergie vibratoire

Le modèle de diffusion de l'énergie vibratoire basé sur une analogie avec la diffusion thermique est rencontré dans les références [12, 3, 13, 14, 15]. Il repose sur l'hypothèse que l'intensité vibratoire (flux de chaleur) et la densité d'énergie (température) sont liés par la loi de Fourier (Eq. 22). Cette méthode a été discutée par plusieurs auteurs [11, 4, 5, 6].

L'argument principal est le suivant. La solution analytique de l'équation de vibration transverse d'une plaque de Love infinie et excitée ponctuellement est en  $v \propto H_0^{(2)}(kr) + H_0^{(2)}(ikr)$  où  $H_0^{(2)}$  est la fonction de Hankel d'ordre zéro de seconde espèce (convention  $e^{i\omega t}$ ),  $k$  le nombre d'onde et  $r$  la distance radiale. En champ lointain, seul le premier terme domine et peut être développé en  $v \propto e^{i\pi/4}/\sqrt{r}$ . Ainsi la densité d'énergie  $W \propto |v|^2 \propto 1/r$ . Or la solution de l'équation de diffusion vibratoire est en  $W_{diff} \propto Y_0^{(2)} \propto 1/\sqrt{r}$ . *A contrario* dans le modèle des échanges radiatifs le champ direct  $G(r)$  est bien en  $1/r$ .

Pour illustrer les conséquences de cette difficulté, nous présentons deux simulations numériques. La première concerne une plaque circulaire sur appui simple et excitée en son centre. L'équation des plaques de Love nous apprend que la déflexion a la forme  $aH_0^{(1)}(kr) + bH_0^{(2)}(kr) + cI_0(kr) + dK_0(kr)$  où  $H_0^{(1)}$ ,  $H_0^{(2)}$ ,  $I_0$ ,  $K_0$  sont des fonctions de Hankel et de Bessel modifiées et  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  sont des coefficients déterminés en écrivant les conditions aux limites appropriées. La densité d'énergie qui en résulte est oscillante (voir figure 9). Cette solution est constituée de deux ondes évanescentes et de deux autres ondes, l'une propagative, l'autre rétro-propagative. La solution de l'équation de diffusion est  $AK_0(mr) + BI_0(mr)$  où  $m = \eta\omega/c$ . Enfin, la solution du modèle des échanges radiatifs avec réflexion spéculaire est  $Ae^{-mr}/r + Be^{mr}/r$ . Elle traduit bien l'évolution moyenne (sans les termes interférentiels) la densité d'énergie d'une plaque de Love. Cette simulation numérique montre clairement les insuffisances de l'équation de diffusion vibratoire. Ces résultats ont été publiés dans la référence [4].

Dans le deuxième exemple, deux plaques rectangulaires d'épaisseurs différentes sont assemblées dans le même plan. Celle de gauche est excitée ponctuellement et l'on observe la réponse fréquentielle sur chaque plaque (figure 10). La solution de référence est établie suivant une méthode semi-analytique. Le champ vibratoire est développé en série de Fourier (selon  $y$ ),  $v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \sin(n\pi y/b)$ , où  $b$  est la largeur de la plaque et  $0 < x < a$  l'abscisse dans le sens de la longueur. Les conditions aux limites d'appui simple sont respectées en  $y = 0$  et  $y = b$ . L'équation des plaques de Love fournit  $v_n(x) = a_n e^{-\nu_n x} + b_n e^{\nu_n x} + c_n e^{-\mu_n x} + d_n e^{\mu_n x}$  où  $\pm\nu_n$ ,  $\pm\mu_n$  sont les racines de l'équation caractéristique. Les coefficients  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$ ,  $d_n$ , *a priori* différents pour chaque plaque, sont déterminés en appliquant les conditions de couplage à l'interface et au point d'excitation. L'équation de diffusion est résolue par une méthode similaire. L'énergie est développée suivant

$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \cos(n\pi y/b)$  qui vérifie les conditions de flux de puissance nulle en  $y = 0$  et  $y = b$ . L'équation de diffusion donne  $W_n(x) = A_n e^{-\xi_n x} + B_n e^{\xi_n x}$ , où  $\pm \xi_n$  sont solutions de l'équation caractéristique. Enfin, le modèle CeReS est basé sur une solution numérique. La frontière de chaque plaque est discrétisée avec 50 segments de droite. Les résultats de cette simulation montrent que l'équation de diffusion vibratoire sous estime l'énergie au voisinage de l'excitation et sur-estime la transmission entre les deux plaques. Cette étude a été réalisée pour EDF [17].

## 2 Expérimentations sur des structures

Nous avons réalisé plusieurs expérimentations sur des structures assemblées afin d'éprouver notre modèle des échanges radiatifs. Chaque fois, un modèle numérique est développé sous le code CeReS et ses prévisions sont comparées aux résultats de mesures (valeurs RMS par bandes d'octave).

La première expérience est réalisée sur une plaque en U (figure 11). Cette plaque d'aluminium de 1,5 mm d'épaisseur est recouverte d'un matériau visco-élastique. Le taux d'amortissement est de 15%. La structure est excitée avec deux pots vibrants et la vitesse vibratoire en valeur RMS par tiers de bandes d'octaves est mesurée à l'aide d'un vélocimètre. Le modèle CeReS comporte 70 degrés de liberté. La puissance injectée dans la structure est mesurée par deux têtes d'impédance localisées entre le pot exciteur et la structure. Cette donnée est introduite dans le modèle numérique. Les résultats de la figure 11 montrent que la dynamique est très importante d'un point à un autre. Ces résultats ont été publiés dans la référence [18].

La seconde expérience est réalisée sur une maquette constituée de sept plaques. La maquette est en acier de 8/10 mm et est aussi recouverte d'un matériau visco-élastique (figure 12). Son taux d'amortissement est de 2%. Le protocole expérimental est le même que précédemment. Le modèle numérique CeReS comporte 200 éléments de frontière. On observe que le saut d'énergie au passage des interfaces est bien prédit par le modèle CeReS. Par ailleurs, la SEA donne les valeurs globales des énergies pour chaque plaque. Ce calcul nécessite juste l'inversion d'une matrice 7x7. Cette étude a bénéficié du soutien de la région Rhône-Alpes<sup>3</sup> et ses résultats ont été publiés dans la référence [18].

La troisième expérience concerne une maquette mécano-soudée représentative des modes d'assemblage utilisés dans l'industrie automobile (figure 13). La maquette réalisée en acier nu de 8/10 mm présente un taux d'amortissement faible de 0,5%. Le modèle CeReS comporte 22 plaques assemblées, 39 interfaces et 428 éléments de frontière. Les résultats sont montrés figure 13. Cette étude a permis de juger de l'applicabilité de la méthode des échanges ra-

---

<sup>3</sup>Dans le cadre d'un programme *Emergence* achevé en 1998.

diatifs aux structures complexes. Elle a mis en évidence la difficulté de prévoir les efficacités de réflexion et de transmission aux interfaces. Elle montre par ailleurs les limites de la méthode en basses fréquences. Cette étude a bénéficié du soutien du ministère<sup>4</sup>.

Ces résultats expérimentaux confortent la validité de la méthode des échanges radiatifs pour des structures métalliques assemblées. Les limites de celles-ci sont bien mises en évidence. Chaque plaque doit contenir plusieurs longueurs d'ondes, la présence de pièces massives et rigides est donc défavorable. Le recouvrement modal doit être important pour qu'aucun mode particulier ne domine la dynamique d'une octave. Bien que ce ne soit pas indispensable, un fort taux d'amortissement aide à remplir cette condition. Par ailleurs, ces expériences montrent aussi les difficultés à mettre en œuvre cette méthode. Par exemple le taux d'amortissement structural est difficile à prévoir alors qu'il est essentiel pour le modèle, une mesure complémentaire s'impose. De même, les efficacités de réflexion et transmission aux interfaces sont difficiles à estimer, surtout lorsque celles-ci sont dissipatrices.

### 3 Méthode du tir de rayons

Le second domaine de validation du code CeReS concerne l'acoustique des salles. L'acoustique architecturale utilise les méthodes asymptotiques hautes fréquences depuis déjà bien longtemps. Citons la formule de Sabine et ses dérivées, la méthode des sources-images, les tirs de rayons *etc.* La densité modale pour les salles de taille moyenne et dans la gamme audio est souvent très élevée et la résolution directe de l'équation de Helmholtz peut s'avérer difficile. Par ailleurs, les champs acoustiques usuellement rencontrés ne sont pas totalement diffus et la loi de Sabine peut être insuffisante. La méthode des échanges radiatifs propose alors une alternative aux méthodes standard.

Nous avons entrepris de comparer la méthode des échanges radiatifs avec l'acoustique géométrique basée sur la théorie des rayons. À cette fin, nous avons observé systématiquement les résultats du code CeReS et ceux d'un code d'acoustique intérieure basé sur les tirs de rayons<sup>5</sup> (*ray-tracing*). Pour quelques salles de diverses géométries et aires d'absorption équivalentes, des cartes d'énergie sont calculées par les codes CeReS et RAYON2.0. Les calculs sont toujours effectués sous les mêmes

hypothèses, source omnidirectionnelle, réflexion diffuse sur les parois, air légèrement absorbant, pas de couplage avec d'autres salles. La figure 14 montre un exemple de résultat pour un hall industriel contenant trois obstacles et trois sources de bruit. Les données numériques sont les suivantes, absorption

---

<sup>4</sup>Dans le cadre du programme *Predit II 97T0222 Moyennes fréquences* auquel ont participé l'École normale supérieure de Cachan, PSA, Metravib, Intespace et l'ECL.

<sup>5</sup>Code RAYON2.0 aimablement prêté par EDF.

octave	125 Hz	250 Hz	500 Hz	1000 Hz
sol	0,02	0,02	0,03	0,03
fauteuils	0,42	0,46	0,49	0,5
plafond	0,01	0,01	0,02	0,02
murs latéraux	0,33	0,26	0,18	0,10
murs du fond	0,12	0,52	0,57	0,51

TAB. 3 – Valeur des coefficients d’absorption utilisés dans le modèle numérique de l’auditorium.

atmosphérique  $m = 0,0007 \text{ m}^{-1}$  (valeur typique à 1000 Hz), volume  $V = 8509 \text{ m}^3$ , surface  $S = 2305 \text{ m}^2$ , absorption moyenne  $\bar{\alpha} = 0,12$ . Le calcul RAYON est effectué avec 64000 rayons pouvant subir jusqu’à 100 réflexions. Le modèle CeReS est réalisé avec 586 éléments de frontière. Les niveaux de bruit obtenus sont extrêmement voisins pour des temps de calculs comparables et montrent que nous sommes en présence de deux méthodes équivalentes du point de vue des résultats bien que reposant sur des schémas numériques très différents. Ces résultats ont été publiés dans [19].

## 4 Auditorium Maurice Ravel de Lyon

En collaboration avec l’équipe technique de l’auditorium Maurice Ravel de Lyon, nous avons réalisé une étude visant à améliorer l’acoustique de cette salle. À partir des plans, nous avons élaboré un modèle géométrique de l’auditorium. Ce modèle est constitué de 220 faces chacune possédant un coefficient d’absorption. Le tableau 3 récapitule les différents coefficients d’absorption utilisés dans le modèle numérique.

À l’aide du code CeReS, nous avons réalisé des simulations numériques du comportement de l’auditorium. Deux types de calcul sont effectués par la méthode des échanges radiatifs. Le calcul instationnaire permet de prédire la durée de réverbération, en principe plus finement qu’avec la formule de Sabine qui ne tient pas compte de la géométrie. Le calcul stationnaire fournit des cartes de répartition du son (figure 16).

Ces résultats ont été comparés avec les résultats d’une campagne de mesures.<sup>6</sup> Le tableau 4 donne les durées de réverbération simulées et mesurées.

Cette étude met en valeur l’intérêt du code CeReS pour des études d’acoustique architecturale dans les grandes salles.

---

<sup>6</sup>Mesures effectuées les 6 et 7 mai 2002 dans l’auditorium avec l’aimable autorisation de la direction technique.

octave	125 Hz	250 Hz	500 Hz	1000 Hz
mesure	3,0 s	2,5 s	2,3 s	2,1 s
calcul CeReS	2,5 s	2,2	2,0 s	2,1 s

TAB. 4 – Comparaison des durées de réverbération prédites et mesurées dans l’auditorium Maurice Ravel de Lyon, salle vide et source unique. La durée de réverbération est déterminée en mesurant la décroissance du son après extinction de la source stationnaire (norme NF S 31-012).

## 5 Rayonnement des structures

La méthode des échanges radiatifs ne s’applique pas qu’aux structures mécaniques et à l’acoustique mais aussi, et c’est là tout l’intérêt de cette méthode, aux échanges vibroacoustiques. On peut classer ces échanges en deux catégories : le rayonnement et la transparence acoustique. Dans une vision propagatoire de ces phénomènes, le rayonnement a lieu de deux manières possibles. Le rayonnement supersonique qui n’apparaît qu’au dessus de la fréquence de coïncidence, met en jeu l’ensemble de la surface rayonnante (mode de surface). Puis le rayonnement de bord ou de coin (modes de bord et de coin) qui est présent sur tout le spectre, ne concerne que la frontière de la structure rayonnante. Il s’agit d’un phénomène de diffraction de l’onde structurale dans le milieu acoustique. De façon similaire, il convient de distinguer la transparence non résonante (loi d’action de masse et de raideur) où la paroi ne propage pas d’onde, seul un champ vibratoire forcé est créé, et la transparence résonante qui se décompose en trois temps, absorption par un bord ou coin, propagation dans la structure puis rayonnement vers le deuxième milieu fluide.

Pour illustrer ces phénomènes, nous avons effectué une simulation numérique du rayonnement d’une structure dans un fluide léger (calcul 2D) (figure 17). L’équation de Helmholtz couplée à l’équation de la corde vibrante est résolue par une méthode d’éléments de frontières. La fonction de Green choisie vérifie la condition aux limites au-delà de la structure de sorte qu’il n’est nécessaire de mailler que la structure. La structure (corde vibrante) est placée entre  $x = 0$  et  $x = 1$  et est prolongée par un baffle parfaitement réfléchissant. Elle est excitée ponctuellement par une force transverse située en  $x = 0,3$  (discontinuité de l’intensité structurale). La fréquence d’excitation est telle que la structure contient 100 longueurs d’onde. Le ratio entre la vitesse structurale et la vitesse dans le fluide est de 2 (onde structurale supersonique). Ce modèle a nécessité 1400 éléments de frontière et est assez coûteux en temps CPU. La méthode des échanges radiatifs est relativement plus simple. La structure contient trois sources, la source d’excitation et deux sources réfléchissant l’énergie aux extrémités. Vu depuis le fluide, le rayonnement supersonique domine. La structure est couverte de sources acoustiques équivalentes dont la puissance et la directivité sont connues analytiquement

à partir des équations qui régissent le couplage énergétique. Les résultats des deux simulations, présentés figure 17, montrent que la méthode des échanges radiatifs rend bien compte des sauts d'énergie et aussi de la décroissance moyenne de l'énergie dans chaque zone. Le calcul des références présente des irrégularités dues aux interférences entre les ondes rayonnées par la structure, celles-ci sont ignorées par la méthode des échanges radiatifs. Ces résultats, obtenus dans le cadre d'une thèse<sup>7</sup>, ainsi que d'autres concernant la transparence ont été publiés dans les références [20, 21, 22, 23].

## 6 Billard circulaire

La théorie des billards offre un cadre d'étude très intéressant. Un billard est une géométrie plane fermée dans laquelle se propage des rayons. Les propriétés de certains billards sont très bien connues, comme les billards rectangulaires, d'autres un peu moins, comme les billards triangulaires [24].

Le cas du billard circulaire est représentatif des différences induites par les hypothèses de réflexion spéculaire et lambertienne. La figure 18 montre les cartes de densité d'énergie obtenues dans un billard circulaire

dont le bord est légèrement absorbant ( $\alpha = 0,01$ ) et comportant une source de rayons excentrée. Le cas lambertien montre que, outre le champ direct qui domine localement, le champ réverbéré est totalement diffus. Le cas spéculaire fait apparaître un cercle caustique contenant le point source, où l'énergie se concentre. Idéalement ( $\alpha = 0$ ) elle est infinie sur cette caustique. Le champ d'énergie respecte la symétrie polaire alors que le problème posé ne la respecte pas, puisque la source est excentrée!

L'analyse des trajectoires des rayons est très instructive. Sur une longue période, un rayon subissant des réflexions lambertiennes fini par remplir l'espace des phases, le billard est ergodique, créant les conditions d'un champ diffus. Le cas d'un rayon subissant des réflexions spéculaires est singulièrement différent. L'enveloppe du rayon forme un cercle (caustique). Le rayon est confiné à l'extérieur de ce cercle. Il ne remplit donc pas l'espace des phases. Cette propriété s'observe très bien. Par exemple dans la section d'une fibre optique où se propage un rayon, on observe que seule la partie extérieure au cercle caustique est éclairée, le centre restant sombre [25]. Il se peut aussi que les trajectoires soient cycliques (voir figure 19). Les trajectoires cycliques peuvent être classées à l'aide d'un double indice  $(p, q)$  indiquant le nombre de réflexions  $p$  subies par cycle et le nombre de tours  $q$  parcourus par cycle [26]. Ces trajectoires peuvent être visualisées à l'aide d'un dispositif expérimental optique [27].

---

<sup>7</sup>Thèse de V. Cotoni soutenue le 31 janvier 2001 à l'ECL.



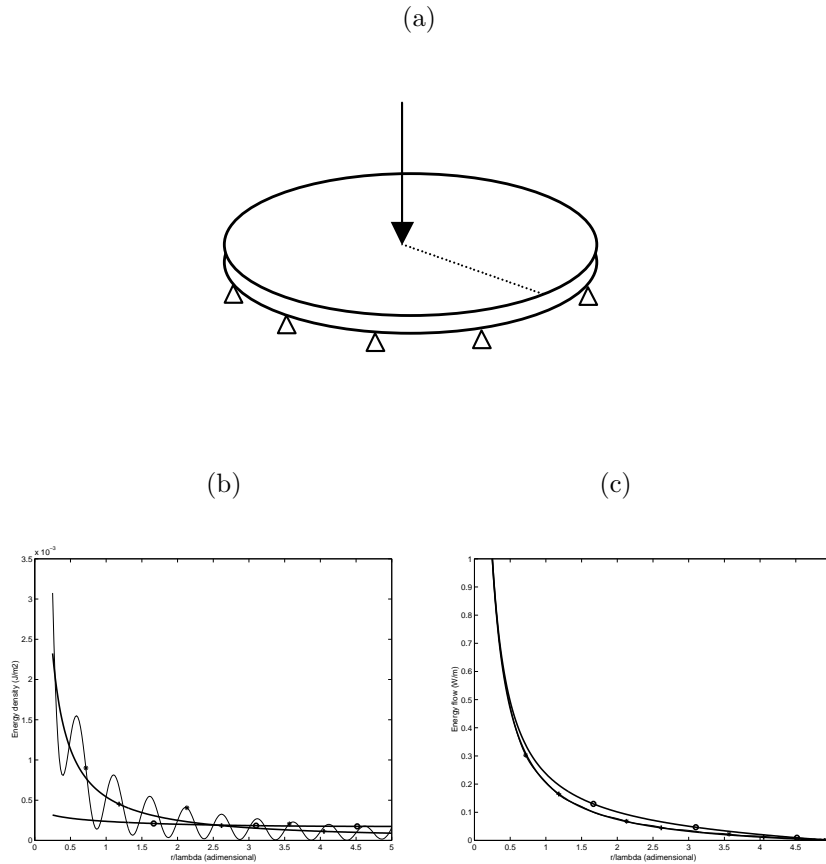


FIG. 9 – Comparaison méthode de diffusion thermique - méthode des échanges radiatifs sur une plaque circulaire excitée en son centre. (a) Vue de la plaque en appui simple et du point d'excitation. Les points de calcul sont situés sur un rayon. (b) Densité d'énergie simulée le long d'un rayon : \* (trait fin), équation du mouvement - o, équation de diffusion vibratoire - +, code CeReS (échanges radiatifs avec réflexion spéculaire). (c) Intensité radiale simulée. Les ondulations ne sont pas prédites par les deux méthodes simplifiées. Elles sont dues aux interférences entre l'onde propagative et l'onde rétro-propagative. La méthode des échanges radiatifs rend bien compte de l'évolution moyenne de l'énergie tandis que l'équation de diffusion vibratoire ne prédit pas la bonne décroissance de l'énergie.

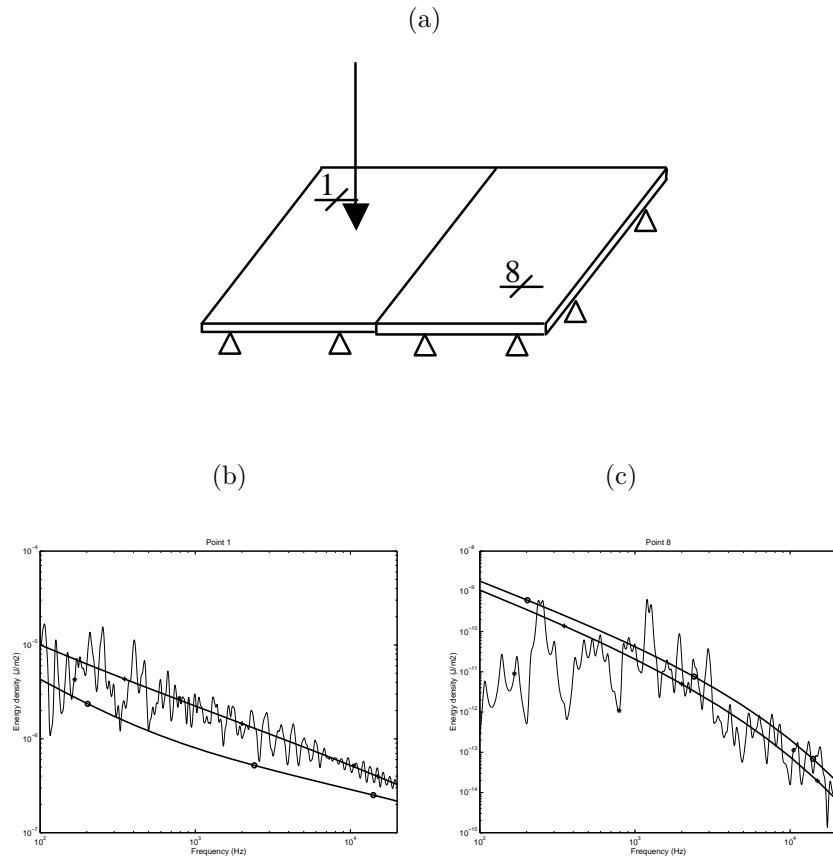


FIG. 10 – Comparaison méthode de diffusion thermique - méthode des échanges radiatifs sur un cas test constitué de deux plaques. (a) Vue des deux plaques et du point d'excitation. La plaque excitée est la plus souple. Le rapport des vitesses de groupe est de 10. Le point 1 est situé au voisinage de l'excitation sur la première plaque et le point 8 est situé sur la deuxième plaque. (b) Densité d'énergie simulée au point 1 en fonction de la fréquence : \* (trait fin), équation du mouvement - o, méthode de diffusion vibratoire - +, code CeReS (échanges radiatifs avec réflexion diffuse). (c) Densité d'énergie simulée au point 8 en fonction de la fréquence. Les méthodes simplifiées ne prédisent pas correctement le niveau vibratoire moyen avant la première fréquence propre de la plaque la plus raide (hypothèse hautes fréquences). Au-delà, la méthode de diffusion vibratoire sous-estime le niveau vibratoire au voisinage du point 1 (zone de champ direct) et, en contre-partie, le sur-estime sur la deuxième plaque (point 8).

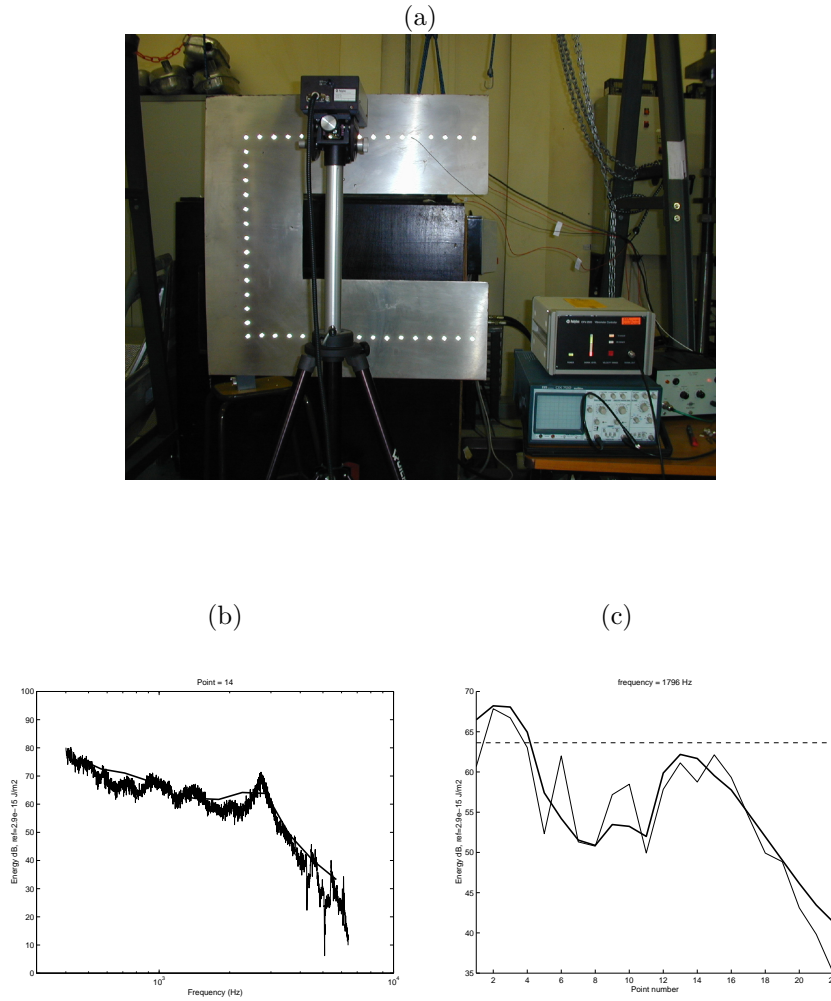


FIG. 11 – Confrontation calcul CeReS - expérimentation sur une plaque en forme de U et recouverte d'un matériau visco-élastique pour augmenter son amortissement structural. (a), La vitesse vibratoire est mesurée sur les points blancs à l'aide d'un vélocimètre laser. (b), Comparaison de l'évolution fréquentielle de cette énergie en un point. (c), Comparaison entre l'énergie vibratoire mesurée et simulée le long de la ligne. Trait fin, mesures - trait épais, prédiction CeReS - pointillé, prédiction moyenne SEA.

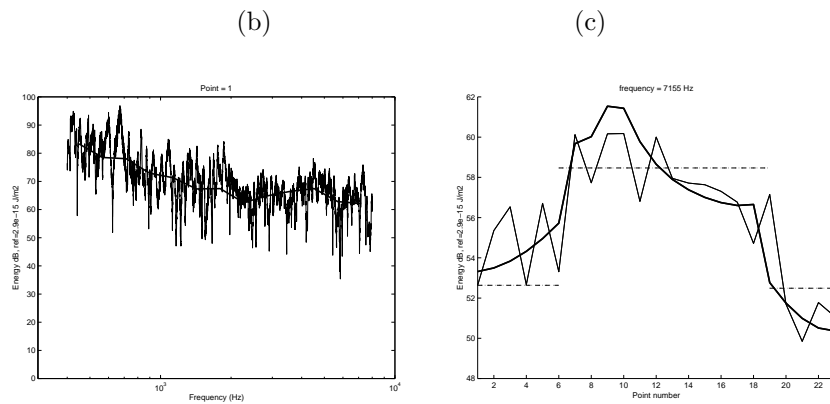
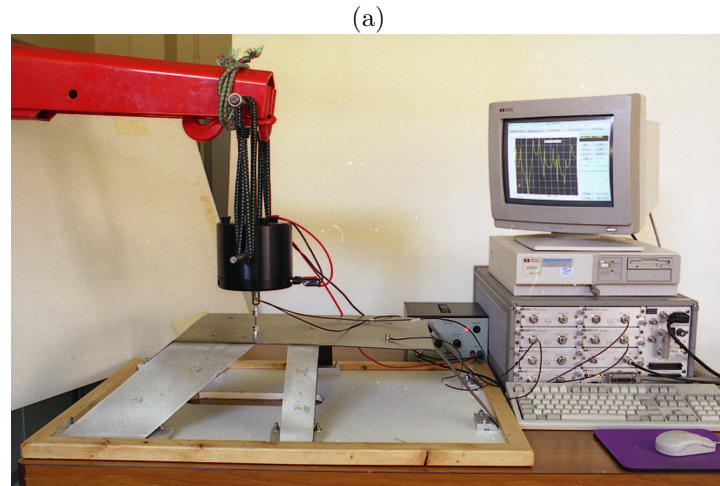


FIG. 12 – Confrontation calcul CeReS - expérimentation sur un assemblage de sept plaques. (a), Vue du dispositif expérimental. (b), Le point 1 est situé sur le dessus de la maquette. (c), La ligne de mesure part du côté gauche, traverse le dessus puis descend sur la droite. Trait fin, mesures - trait épais, prédiction CeReS - pointillé, prédiction moyenne SEA.

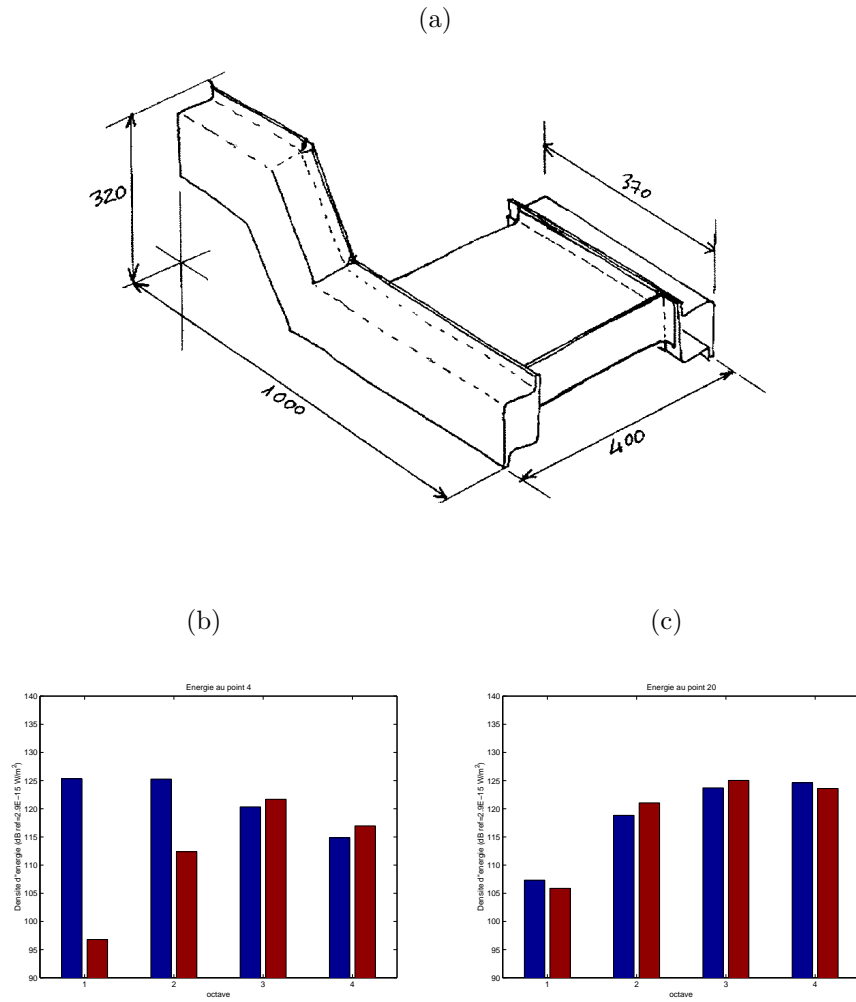


FIG. 13 – Maquette Predit. (a) Croquis de la maquette. Elle est réalisée en acier plié et soudé par points. Elle est excitée en bruit blanc par un pot vibrant à l'avant du brancard. Les mesures sont effectuées un peu partout sur la maquette. (b, c) Résultats obtenus par octaves de 125 Hz à 2 kHz; bleu : mesures, rouge : simulation.

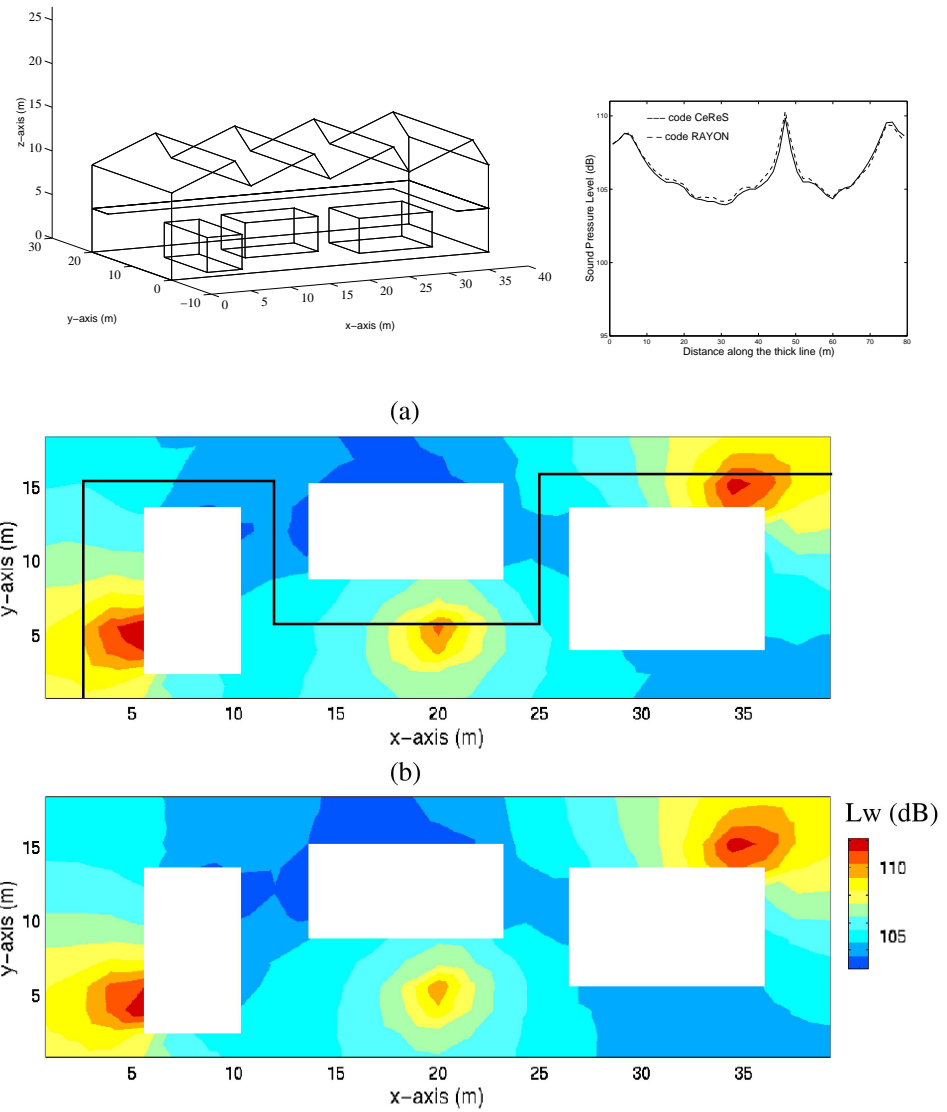


FIG. 14 – Comparaison entre les résultats de la méthode énergétique (code CeReS) et ceux de l’acoustique géométrique (code RAYON2.0 réalisé par EDF-DER). L’usine contenant trois obstacles et trois sources de bruit est représentée en vue filaire en haut à gauche. Deux cartes de pressions acoustiques ( $L_p$ -dB sur un plan horizontal 2m au dessus du sol) sont tracées : (a) est issue de RAYON et (b) de CeReS. L’évolution comparée de la pression acoustique le long de la courbe en gras est tracée en haut à droite.



FIG. 15 – Photographie de l'auditorium Maurice Ravel de Lyon.

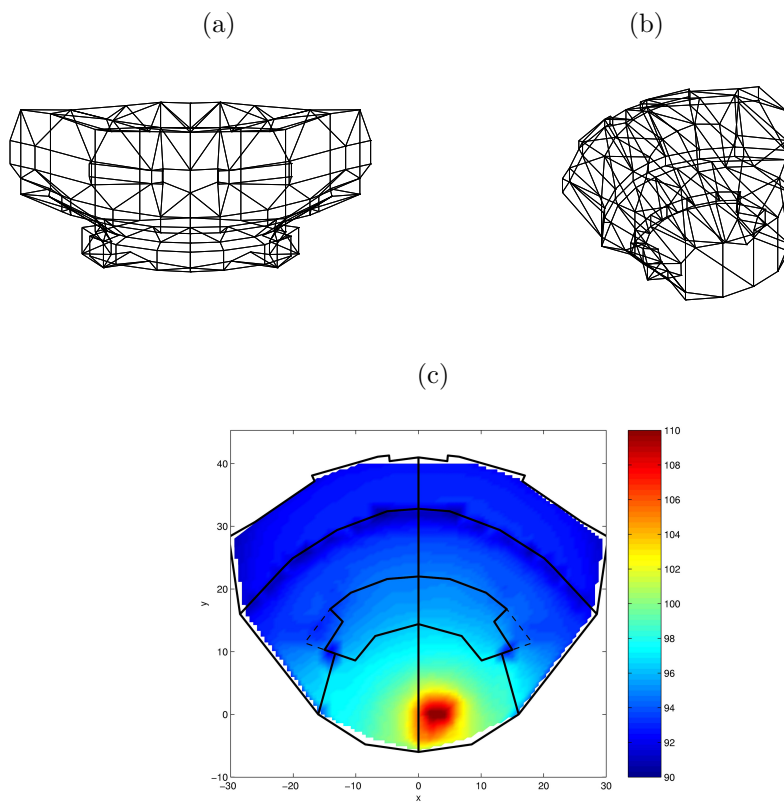


FIG. 16 – Modèle acoustique de l'auditorium Maurice Ravel de Lyon. (a), Vue arrière de la salle; (b), vue en perspective; (c) exemple de carte sonore calculée par le code CeReS.

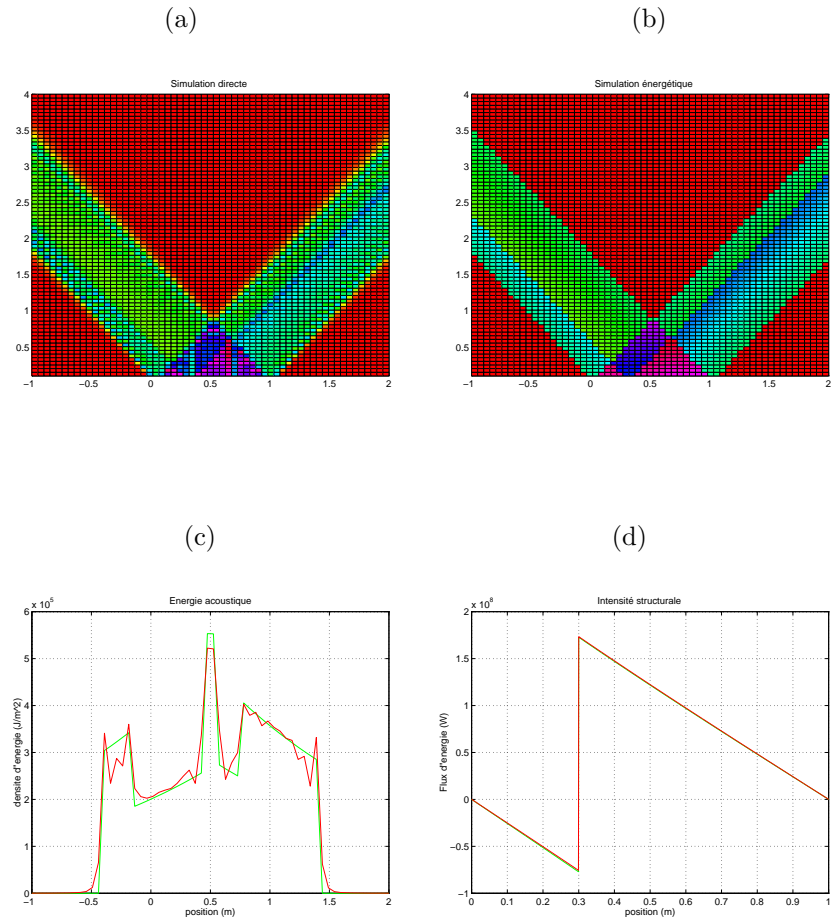


FIG. 17 – Rayonnement acoustique d’une structure dans l’air (calcul 2D). (a), Carte de bruit simulée par l’équation de Helmholtz. (b), Carte de bruit simulée par CeReS. (c), Niveau acoustique le long d’une ligne horizontale ; vert, CeReS - rouge, simulation directe (Helmholtz). (d), Intensité structurale.



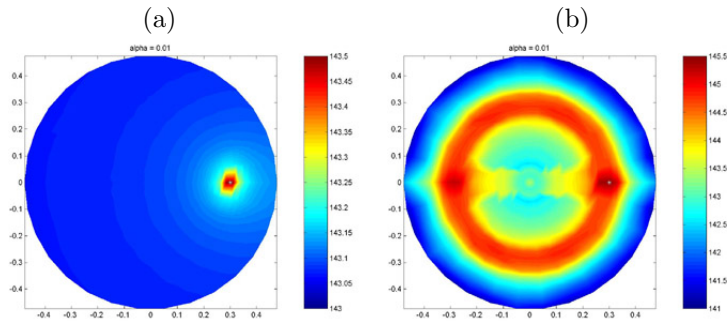


FIG. 18 – Cartes de densité d'énergie dans un billard circulaire. (a), cas de la réflexion lambertienne, (b), cas de la réflexion spéculaire.

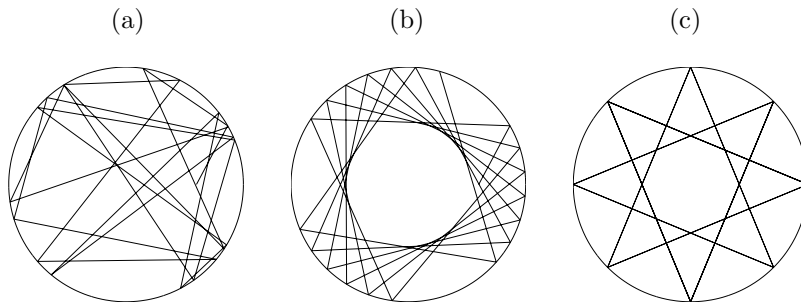


FIG. 19 – Trajectoires des rayons dans un billard circulaire. (a), Cas d'une réflexion lambertienne, (b), cas d'une réflexion spéculaire avec trajectoire non fermée, (c) réflexion spéculaire avec trajectoire fermée (8,3).



# CONCLUSION



La théorie des échanges radiatifs appliquée à la vibroacoustique répond bien au problème posé dans l'introduction de ce mémoire. Elle propose des équations régissant le transfert d'énergie entre chaque point de la structure. Ces équations sont bien adaptées aux hautes fréquences puisque leur résolution numérique nécessite un maillage indépendant de la fréquence. Le temps de calcul ne croît pas avec la fréquence.

Ce gain en temps de calcul n'est pas réalisé sans contre-partie. Les interférences entre les ondes ont été négligées, de sorte que, par exemple, ce modèle est incapable de prédire la position des fréquences propres. En fait, on peut interpréter les résultats du modèle des échanges radiatifs comme les valeurs moyennes sur une large bande spectrale (tiers de bande d'octave ou bande d'octave). La figure 20 illustre bien ce phénomène. Elle représente les lignes d'écoulement de l'énergie associées au champ acoustique d'une source rayonnant dans un quart d'espace (deux murs parfaitement rigides). On sait que la solution de l'équation de Helmholtz est donnée par la superposition du champ direct et des champs réfléchis issus de trois sources images. Ces sources sont naturellement corrélées. Les lignes d'écoulement présentent des fluctuations « microscopiques » autour d'une ligne moyenne. Ces fluctuations sont difficiles à prévoir car elles sont très sensibles à la fréquence. En revanche, en supposant que les sources sont incohérentes, les lignes obtenues sont lisses et stables en fréquence, ce sont les lignes moyennes (sur une bande fréquentielle) correspondant au comportement « macroscopique » des lignes précédentes. Ce n'est bien qu'en

acceptant de renoncer à une partie de l'information que le gain en temps de calcul est possible.

Cette théorie s'appuie sur de nombreuses simulations numériques et expérimentations. Les comparaisons avec des simulations numériques directes (résolution des équations du mouvement par les méthodes standard) poussées aussi loin que possible, montrent plusieurs faits. Tout d'abord, la diffusion vibratoire ne modélise pas correctement la propagation des rayons. En second lieu, la méthode des échanges radiatifs prédit le comportement macroscopique du système sans les fluctuations locales (spatiales ou fréquentielles) qui relèvent de phénomènes interférentiels. Les comparaisons avec les programmes de tir de rayons mettent en évidence l'équivalence des deux méthodes. Bien que basés sur des algorithmes très différents, les tirs de rayons ou les échanges radiatifs donnent des résultats semblables.

Les résultats des expérimentations confortent le modèle des échanges radiatifs en vibroacoustique. Sur des éléments simples, les résultats sont très concluants. Toutefois, les expérimentations sur des structures complexes mettent en évidence la difficulté de prédire certaines données du modèle, comme les amortissements, efficacités de réflexion et transmission... Cette difficulté que l'on rencontre aussi en SEA montre l'importance de développer des techniques de mesure spécifiques aux méthodes énergétiques hautes fréquences.

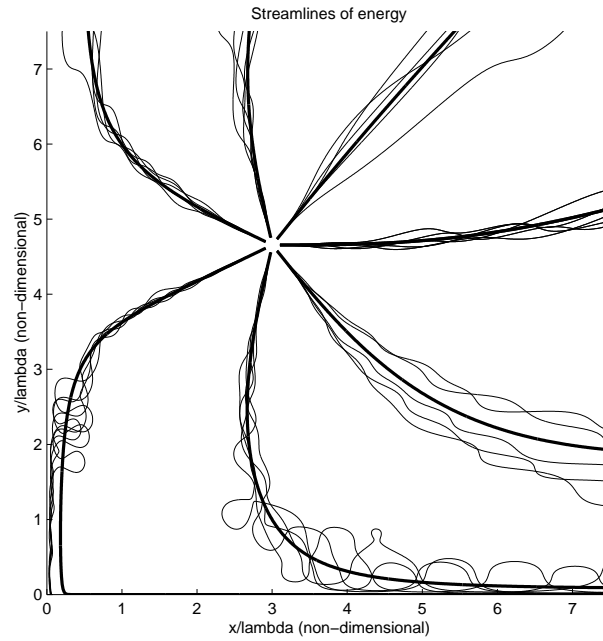


FIG. 20 – Lignes d’écoulement de l’énergie d’une source rayonnant dans un quart d’espace. Les lignes en trait fin correspondent à la superposition des champs issus de la source réelle et des trois sources images (solution de l’équation de Helmholtz) à diverses fréquences voisines (de 400 Hz à 600 Hz). Les lignes en trait épais correspondent à la superposition des champs de ces mêmes sources supposées décorrélées. Elles donnent la propagation moyenne sans les fluctuations fortement dépendantes de la fréquence.

Les données disponibles dans la littérature sont bien peu nombreuses...

# Bibliographie

- [1] J.P. Bardon. étude acoustique d'une cabine de véhicule industriel. *Acoustique Techniques*, 25 :9–12, 2001.
- [2] R.H. Lyon. *Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems : Theory and Application*. Cambridge, Massachusetts, MIT Press, 1975.
- [3] D.J. Nefske and S.H. Sung. Power flow finite element analysis of dynamic systems : Basic theory and application to beams. *NCA Publication*, 3, 1987.
- [4] A. Le Bot. Geometric diffusion of vibrational energy and comparison with the vibrational conductivity approach. *Journal of Sound and Vibration*, 212(4) :637–647, 1998.
- [5] R.S. Langley. Analysis of beam and plate vibrations by using the wave equation. *Journal of Sound and Vibration*, 150 :47–65, 1991.
- [6] A. Carcaterra and L. Adamo. Thermal analogy in wace energy transfer : theoretical and experimental analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 226(2) :253–284, 1999.
- [7] A. Le Bot, M.N. Ichchou, and L. Jezequel. Energy flow analysis for curved beams. *Journal of Acoustical Society of America*, 102(2) :943–954, 1997.
- [8] M.N. Ichchou, A. Le Bot, and L. Jezequel. Energy models of one-dimensional, multi-propagative systems. *Journal of Sound and Vibration*, 201(5) :535–554, 1997.
- [9] A. Le Bot. A vibroacoustic model for high frequency analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 211(4) :537–554, 1998.
- [10] A. Le Bot. A functional equation for the specular reflection of rays. *Submitted to Journal of Acoustical Society of America*, in review.
- [11] A. Le Bot. *Équations énergétiques en mécanique vibratoire, application au domaine des moyennes et hautes fréquences*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 1994. numéro 94-20.
- [12] S.A. Rybak V.D. Belov and B.D. Tartakovskii. Propagation of vibrational energy in absorbing structures. *Soviet Physic Acoustic*, 23 :115–119, 1977.
- [13] J.C. Wohlever and R.J. Bernhard. Mechanical energy flow models of rods and beams. *Journal of Sound and Vibration*, 153 :1–19, 1992.

- [14] O.M. Bouthier and R.J. Bernhard. Simple models of energy flow in vibrating membranes. *Journal of Sound and Vibration*, 182 :129–147, 1995.
- [15] O.M. Bouthier and R.J. Bernhard. Simple models of energy flow in vibrating plates. *Journal of Sound and Vibration*, 182 :149–164, 1995.
- [16] A. Le Bot. Documentation du code ceres. Rapport interne ltds, École Centrale de Lyon, 2000.
- [17] A. Le Bot. Couplage structure-structure en moyennes et hautes fréquences. Rapport d'étude pour edf, École Centrale de Lyon, 1995.
- [18] A. Le Bot. Energy transfer for high frequencies in built-up structures. *Journal of Sound and Vibration*, 250(2) :247–275, 2002.
- [19] A. Le Bot and A. Bocquillet. Comparison of an integral equation on energy and the ray-tracing technique for room acoustics. *Journal of Acoustical Society of America*, 108(4) :1732–1740, 2000.
- [20] V. Cotoni, A. Le Bot, and L. Jezequel. Radiation of plane structures at high frequency using a power flow method. *Submitted to Journal of Acoustical Society of America*, in review.
- [21] V. Cotoni, A. Le Bot, and L. Jezequel. High frequency radiation of L-shaped plate by a local energy flow approach. *Journal of Sound and Vibration*, 250(3) :431–444, 2002.
- [22] V. Cotoni and A. Le Bot. Radiation of plane structures at high frequency using an energy method. *International Journal of Acoustics and Vibration*, 6(4) :209–214, 2001.
- [23] V. Cotoni, A. Le Bot, and L. Jezequel. Sound transmission through a plate by an energy flow approach. *Submitted to Acustica with Acta Acustica*, accepted.
- [24] M. Berger. La mathématique du billard. *Pour la Science*, 163 :76–85, 1991.
- [25] K. Etourneau. *Étude de l'interface cœur/gaine des fibres optiques polymères par excitation de modes de galerie*. PhD thesis, Université de Limoges, 1996.
- [26] R.W. Robinett. Visualizing classical periodic orbits from the quantum energy spectrum via the fourier transform : Simple infinite examples. *American Journal of Physics*, 65(12) :1167–1175, 1997.
- [27] J. Passaneau R.W. Robinett, C.E. Mulfinger. Optical realization of a circular billiard. *The Physics Teacher*, 36(9), 1998.