

# Couplage de plaques en hautes fréquences : formulation intégrale et perspectives acoustiques

A. LE BOT, M.N. ICHCHOU, L. JEZEQUEL

École Centrale de Lyon, Dynamique des Systèmes et des Structures, URA CNRS 855, ECULLY.

**Résumé :** Ce papier fait suite au précédent décrivant l'équation de la chaleur pour l'étude des hautes fréquences. On propose ici une autre méthode. Elle repose sur l'application du principe de Huygens plutôt que la loi de Fourier et conduit à une forme intégrale des équations plutôt que différentielle. Deux simulations numériques sont présentées : une comparaison de ce modèle avec l'acoustique géométrique et une comparaison avec le modèle précédent de l'équation de la chaleur.

## 1 Introduction

L'idée d'utiliser une équation de diffusion pour la modélisation hautes fréquences des structures a suscité de nombreuses études [1, 2, 3, 4, 5]. Le gain numérique par rapport à un calcul classique par éléments finis est tout à fait considérable. De plus l'espoir est grand de pouvoir utiliser les codes de thermique existants.

Cependant, l'application de l'équation de la chaleur pour la dynamique hautes fréquences rencontre certaines difficultés. Langley [6, 7] remarque que le champ direct de cette équation est en contradiction avec celui des équation du mouvement pourtant valables même à hautes fréquences. Sur la base de cette remarque, nous avons développé une approche propagatoire et tenté d'apporter une explication à ce paradoxe [8].

L'objet de cette contribution est de proposer une alternative à l'équation de la chaleur. Il s'agit d'établir un modèle simplifié des vibrations à hautes fréquences. Ce modèle intègre correctement le champ direct. Ces équations conservent l'avantage numérique de l'équation de la chaleur d'être économe en temps de calcul.

## 2 Généralités

Les hypothèses dont nous aurons besoin pour élaborer le modèle énergétique sont les suivantes :

**Hypothèse 1 (H1)** *Le système est linéaire, isotrope en régime forcé établi, sur la bande d'excitation  $[\omega - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega + \frac{\Delta\omega}{2}]$ .*

**Hypothèse 2 (H2)** *Le coefficient d'amortissement est faible ( $\eta \ll 1$ ).*

**Hypothèse 3 (H3)** *Les ondes évanescentes et champs proches sont négligées.*

**Hypothèse 4 (H4)** *Les interférences entre les ondes propagatives ne sont pas prises en compte.*

L'hypothèse (H1) concerne des généralités. Elle précise en particulier que l'étude se place résolument dans le domaine de Fourier. Compte tenu des approximations qui seront effectuées dans la suite, il ne sera généralement pas possible de revenir à une description temporelle. L'hypothèse (H1) déclare donc un renoncement au mode de description temporelle. L'hypothèse (H2) est essentiellement technique. Elle autorise à effectuer, au besoin, des développements limités au premier ordre selon le coefficient d'amortissement. L'hypothèse (H3) est motivée par le fait que les ondes évanescentes restent confinées au voisinage des singularités qui les créent. Ce voisinage étant de plus en plus petit à mesure que la fréquence augmente, elles n'ont que peu d'intérêt pour les hautes fréquences. Enfin, l'hypothèse (H4) est la plus fondamentale. C'est grâce à elle que nous serons en mesure d'élaborer le modèle énergétique dans le cas le plus général. Nous reviendrons plus loin sur son interprétation.

Nous utilisons deux grandeurs énergétiques : la densité d'énergie totale  $W$  et l'intensité active  $I$  qui est une grandeur vectorielle. La densité d'énergie totale  $W$  est la somme des densités d'énergie cinétique et de déformation (ou énergie potentielle), elle est exprimée en  $J/m^n$  où  $n$  est la dimension de l'espace. L'intensité active  $I$  est la partie réelle de l'intensité complexe, elle est exprimée en  $W/m^{n-1}$

La première étape de la formulation énergétique est d'écrire le bilan local de puissance :

$$\operatorname{div}.I + p_{\text{diss}} = p_{\text{inj}} \quad (1)$$

où  $p_{\text{inj}}$  est la densité de puissance fournie au système et  $p_{\text{diss}}$  la densité de puissance dissipée au sein du système. On remarque qu'aucun terme d'accumulation d'énergie  $\partial W/\partial t$  n'apparaît dans ce bilan de puissance puisque le régime est supposé établi.

La densité de puissance dissipée est proportionnelle à une forme de l'énergie. Par exemple, si le frottement est visqueux, la densité de puissance dissipée est proportionnelle à la densité d'énergie cinétique. En revanche, si l'on considère une dissipation sous forme hystérétique, elle est proportionnelle à la densité d'énergie potentielle de déformation. Dans le cadre du modèle énergétique, aucune distinction n'est effectuée entre les différentes formes de l'énergie et seule la densité d'énergie totale  $W$  est considérée. En fait l'énergie a naturellement tendance à se répartir équitablement sous ses différentes formes et il n'est donc pas nécessaire de les distinguer. Ainsi, comme en SEA, on retiendra la relation suivante pour la densité de puissance dissipée :

$$p_{diss} = \eta\omega W \quad (2)$$

où  $\eta$  est le coefficient d'amortissement hystérétique.

Afin d'obtenir une équation sur la densité d'énergie totale  $W$  seule, il reste à rechercher une relation entre le vecteur intensité  $I$  et la densité d'énergie totale  $W$ .

### 3 Équation énergétique intégrale : cas d'un milieu isolé

Il s'agit maintenant d'exhiber une relation entre la densité d'énergie  $W$  et l'intensité  $I$ . On procède en deux temps. Premièrement, on étudie les ondes élémentaires créées par un point source et évoluant dans un espace isotrope infini. Ce sont les ondes planes en dimension un, les ondes cylindriques en dimension deux et les ondes sphériques en dimension trois. Elles jouent le rôle de solutions fondamentales des futures équations pour des champs d'ondes plus complets. Deuxièmement, les champs d'ondes complets sont construits par superposition d'ondes élémentaires conformément au principe de Huygens.

#### 3.1 Cas d'une onde élémentaire

*Une onde élémentaire est une onde engendrée par une source ponctuelle  $S$  et évoluant dans un milieu homogène, isotrope et infini.*

En vertu de l'isotropie du milieu considéré (hypothèse H1), le vecteur  $I$  doit respecter la symétrie polaire autour du point  $S$  pris pour origine du repère. Il ne possède donc qu'une composante radiale dont la valeur est notée  $I$ . En dimension  $n = 1, 2$  ou  $3$ , le bilan d'énergie (3) s'écrit alors :

$$\frac{dI}{dr} + (n - 1)\frac{I}{r} + \eta\omega W = 0 \quad (3)$$

en tout point  $M$  situé à une distance  $r$  de  $S$ . Dans le cas d'une onde élémentaire que nous considérons ici, la valeur algébrique de l'intensité  $I$  et la densité d'énergie  $W$  sont liées par une relation d'ailleurs vraie pour les ondes progressives en général :

$$I = c_g W \quad (4)$$

L'intensité est proportionnelle à la densité d'énergie et le coefficient de proportionnalité  $c_g$  est la vitesse de groupe de l'onde. Cette relation (4) montre que la vitesse de groupe est la vitesse de propagation de l'énergie. Cette relation dont on trouvera une justification dans [9], est valable en champ lointain pour une onde progressive (hypothèse (H3)) à condition de ne prendre en compte l'amortissement qu'au premier ordre (hypothèse (H2)). Cette équation d'état (4) n'est toutefois pas applicable aux ondes quelconques que nous construirons comme superposition d'ondes élémentaires.

Substituant l'équation d'état (4) dans le bilan d'énergie (3) en coordonnées polaires, on obtient l'équation énergétique suivante :

$$\frac{dW}{dr} + (n-1) \frac{W}{r} + \frac{\eta\omega}{c_g} W = 0 \quad (5)$$

C'est une équation différentielle dont la solution est facile à extraire. Nous la noterons  $G(S, M)$  pour rappeler que c'est la densité d'énergie au point  $M$  créée par une source ponctuelle située en  $S$ .

$$G(S, M) = \frac{1}{SM^{n-1}} e^{-\frac{\eta\omega}{c_g} SM} \quad (6)$$

Le champ d'intensité qui en résulte est noté  $\mathbf{H}(S, M)$  :

$$\mathbf{H}(S, M) = \frac{c_g}{SM^{n-1}} e^{-\frac{\eta\omega}{c_g} SM} \mathbf{u}_{SM} \quad (7)$$

où  $\mathbf{u}_{SM}$  est le vecteur directeur orienté de  $S$  vers  $M$ . Ces champs élémentaires sont utilisés dans toute la suite du texte.

### 3.2 Cas général

Considérons un domaine  $\Omega$  de bord  $\partial\Omega$ , il s'agit de construire les champs d'énergie  $W$  et d'intensité  $\mathbf{I}$  générés dans ce domaine par une répartition de sources  $\rho$ . Deux principes sont mis en œuvre pour établir ces champs. Un principe de superposition linéaire et le principe de Huygens.

**Principe 1 (superposition linéaire)** *Les champs de densités d'énergie se superposent additivement.*

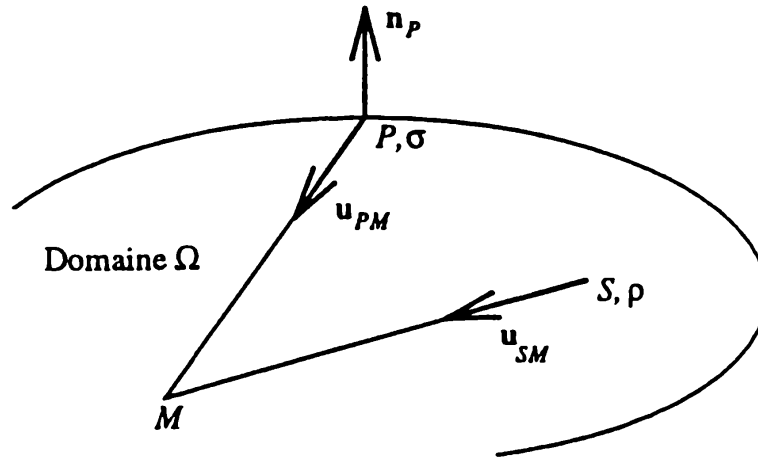


FIG. 1 - Principe de Huygens

Ce principe résulte de l'hypothèse (H4) selon laquelle les interférences entre les ondes élémentaires ne sont pas prises en compte. Sans cette hypothèse, les énergies ne peuvent pas s'ajouter simplement car c'est une grandeur quadratique.

**Principe 2 (Huygens)** *En tout point  $M$  de  $\Omega$ , les champs  $W$  et  $I$  résultent de la superposition :*

- de champs propagatifs primaires émanants des sources réelles  $\rho$  situées dans  $\Omega$  :  $\rho(S)G(S, M)$  et  $\rho(S)\mathbf{H}(S, M)$ ,
- de champs propagatifs secondaires émanants des sources fictives  $\sigma$  situées sur  $\partial\Omega$  :  $\sigma(P)f(\mathbf{u}_{MP}, \mathbf{n}_P)G(P, M)$  et  $\sigma(S)f(\mathbf{u}_{MP}, \mathbf{n}_P)\mathbf{H}(S, M)$ .

Les notations utilisées sont précisés sur la figure 1.

Les sources secondaires font apparaître une fonction  $f$  dépendant de l'angle entre la direction  $\mathbf{u}_{PM}$  et la normale extérieure  $\mathbf{n}_P$  au point  $P$ . Cette fonction est la directivité des sources fictives situées sur la frontière. Elle fait l'objet de l'hypothèse supplémentaire suivante :

**Hypothèse 5 (H5)** *Les sources fictives ont toutes le même diagramme de directivité  $f$  souvent choisit suivant la loi de Lambert  $f(\mathbf{u}, \mathbf{n}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ .*

Le choix de la loi de Lambert est à ce stade tout à fait arbitraire. C'est pourquoi nous continuerons d'utiliser la lettre  $f$  pour désigner la directivité en toute généralité.

La conjonction de ces deux principes et de l'hypothèse (H5) nous conduit à la détermination des champs. Dans le domaine  $\Omega$  de bord  $\partial\Omega$ , les champs  $W$  et

I sont construits par les relations :  $\forall M \in \Omega$

$$W(M) = \int_{\Omega} \rho(S)G(S, M)dS + \int_{\partial\Omega} \sigma(P)f(\mathbf{u}_{MP} \cdot \mathbf{n}_P)G(P, M)dP \quad (8)$$

$$\mathbf{I}(M) = \int_{\Omega} \rho(S)\mathbf{H}(S, M)dS + \int_{\partial\Omega} \sigma(P)f(\mathbf{u}_{MP} \cdot \mathbf{n}_P)\mathbf{H}(P, M)dP \quad (9)$$

Dans ces relations, les premières intégrales sont le champ direct tandis que les secondes sont le champ diffracté. Si le champ direct dépend des sources primaires  $\rho$  naturellement supposées connues, le champ diffracté fait apparaître une densité de sources fictives  $\sigma$  qui doit encore faire l'objet d'une équation pour être déterminée.

### 3.3 Conditions aux limites énergétiques

La densité de sources fictives  $\sigma$  réparties sur la frontière  $\partial\Omega$  est déterminée par les conditions aux limites appliquées sur le bord  $\partial\Omega$ . Pour une frontière non dissipatrice, la condition  $\mathbf{I} \cdot \mathbf{n} = 0$  s'impose naturellement. Pour une frontière absorbante, notons  $R$  son efficacité de réflexion. C'est la part de la puissance réfléchie sur la puissance incidente. Sa valeur est comprise entre 0 et 1. Cette efficacité peut dépendre ou non de l'angle d'incidence, suivant le modèle adopté. Par exemple, pour l'acoustique, chaque surface est caractérisée par un coefficient d'absorption  $\alpha$  et on a :  $R = 1 - \alpha$ . Il s'agit ensuite d'écrire le bilan des puissances incidentes, réfléchie et absorbée en tout point  $P$  de la frontière. La démonstration n'est pas rapportée ici, mais elle conduit à une équation de Fredholm de seconde espèce :  $\forall P \in \partial\Omega$

$$\gamma c_g \sigma(P) = \left\{ \int_{\Omega} R \rho(S)\mathbf{H}(S, P)dS + \int_{\partial\Omega} R \sigma(P')f(\mathbf{u}_{PP'} \cdot \mathbf{n}_{P'})\mathbf{H}(P', P)dP' \right\} \cdot \mathbf{n}_P \quad (10)$$

où  $\gamma$  est une constante qui dépend de la directivité  $f$  et de la dimension de l'espace. Sa définition est la suivante :

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\text{demi-sphère}} f(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})d\mathbf{u} \quad (11)$$

et ses valeurs sont consignées dans le tableau 1.

Nous n'avons pas encore précisé le domaine de validité de l'hypothèse (H4). Comme le déclare le principe de Huygens, les ondes progressives peuvent provenir soit des sources primaires, soit des sources secondaires. Négliger les interférences entre les ondes issues des sources primaires est valide si les forces d'excitation sont décorréliées. Par ailleurs, négliger les interférences naissant des ondes issues des sources fictives relève de la volonté de ne pas tenir compte du comportement modal de la structure. En effet, les modes propres d'une structure

TAB. 1 - Valeurs de  $\gamma$ 

	$f = 1$	$f = \mathbf{u.n}$	$f = (\mathbf{u.n})^2$
$n = 1$	2	2	2
$n = 2$	$\pi$	2	$\pi/2$
$n = 3$	$2\pi$	$\pi$	$2\pi$

sont engendrés par des interférences constructives entre ces ondes. Ce comportement modal disparaît naturellement à hautes fréquences tout spécialement lorsque les modes sont si denses qu'ils se recouvrent. Cette dernière notion est bien quantifiée par le recouvrement modal. On retiendra donc que l'hypothèse (H4) n'est applicable que dans des circonstances où les forces d'excitation sont décorréliées et où le recouvrement modal est élevé.

## 4 Équation énergétique intégrale : interface entre deux milieux

Dans le cas de deux systèmes 1 et 2 couplés par une frontière commune, les potentiels  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont disposés de part et d'autre de cette frontière. La figure 2 précise les notations de ce paragraphe.

La frontière commune est caractérisée par deux efficacités de réflexion  $R$  et de transmission  $T$  dont les valeurs dépendent de l'angle d'incidence. Ces coefficients ont été explicitement calculés dans [10] pour le cas de deux plaques excitées en flexion. Notons que c'est leurs valeurs moyennes  $R^m$  et  $T^m$  sur toutes les incidences, qui sont utilisées dans le cadre de l'équation de la chaleur (voir [10]).

En chaque point  $P$  de cette frontière commune, le bilan des puissances incidente, réfléchiée et transmise se traduit par deux conditions de couplage :  $\forall P \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$

$$\begin{aligned} \gamma c_{y_1} \sigma_1(P) = & \left\{ \int_{\Omega_1} R \rho(S) \mathbf{H}_1(S, P) dS + \int_{\partial\Omega_1} R \sigma_1(P'_1) f(\mathbf{u}_{PP'_1} \cdot \mathbf{n}_{1,P'_1}) \mathbf{H}_1(P'_1, P) dP'_1 \right\} \cdot \mathbf{n}_{1,P} + \\ & \left\{ \int_{\Omega_2} T \rho(S) \mathbf{H}_2(S, P) dS + \int_{\partial\Omega_2} T \sigma_2(P'_2) f(\mathbf{u}_{PP'_2} \cdot \mathbf{n}_{2,P'_2}) \mathbf{H}_2(P'_2, P) dP'_2 \right\} \cdot \mathbf{n}_{2,P} \end{aligned} \quad (12)$$

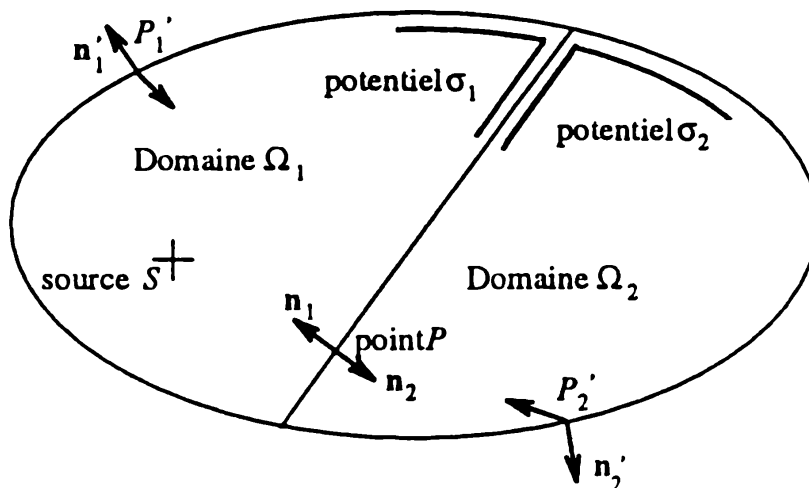


FIG. 2 - Répartition des potentiels sur la frontière commune

$$\begin{aligned} \gamma c_{g_2} \sigma_2(P) = & \\ & \left\{ \int_{\Omega_1} T \rho(S) \mathbf{H}_1(S, P) dS + \int_{\partial\Omega_1} T \sigma_1(P_1') f(\mathbf{u}_{PP_1'} \cdot \mathbf{n}_{1,P_1'}) \mathbf{H}_1(P_1', P) dP_1' \right\} \cdot \mathbf{n}_{1,P} + \\ & \left\{ \int_{\Omega_2} R \rho(S) \mathbf{H}_2(S, P) dS + \int_{\partial\Omega_2} R \sigma_2(P_2') f(\mathbf{u}_{PP_2'} \cdot \mathbf{n}_{2,P_2'}) \mathbf{H}_2(P_2', P) dP_2' \right\} \cdot \mathbf{n}_{2,P} \end{aligned} \quad (13)$$

où les efficacités  $R$  et  $T$  dépendent de l'angle d'incidence en  $P$  du rayon issu de la source  $P_i'$  (ou  $S$ ).

La résolution des équations (8), (9), (10), (12) et (13) est obtenue en discrétisant la frontière  $\partial\Omega$ . Le schéma numérique retenu est une méthode de collocation. La frontière  $\partial\Omega$  est séparée en  $n$  éléments plats. La surface brisée ainsi définie est supposée être une bonne approximation de la frontière  $\partial\Omega$ . Les points  $P_i$ , définis comme les milieux des éléments, sont les points de collocation en lesquelles l'équation intégrale est écrite. Sur chaque segment, la densité de source  $\sigma$  est constante et vaut  $\sigma_i$ .

## 5 Application à l'acoustique intérieure

Le premier exemple concerne une cavité acoustique. La pièce étudiée mesure 30 m par 30 m par 5 m. Les coefficients d'absorption des parois sont fixés à 0,5. Une source acoustique est située à  $x = 10$  m,  $y = 10$  m et  $z = 0,8$  m avec une puissance de 1 W. L'absorption atmosphérique vaut  $0,00261 \text{ m}^{-1}$  ce qui est une valeur classique à 1000 Hz. Deux calculs ont été menés. Le premier est réalisé avec le code d'acoustique géométrique RAYON développé par EDF. Le second est basé sur la formulation exposée ci-dessus (équations 8, 9, 10, 12 et 13). La figure 3 montre deux cartes des niveaux de pression acoustique en dB sur le plan  $z = 1,5$  m, issus des deux calculs et une coupe comparant ces niveaux sur



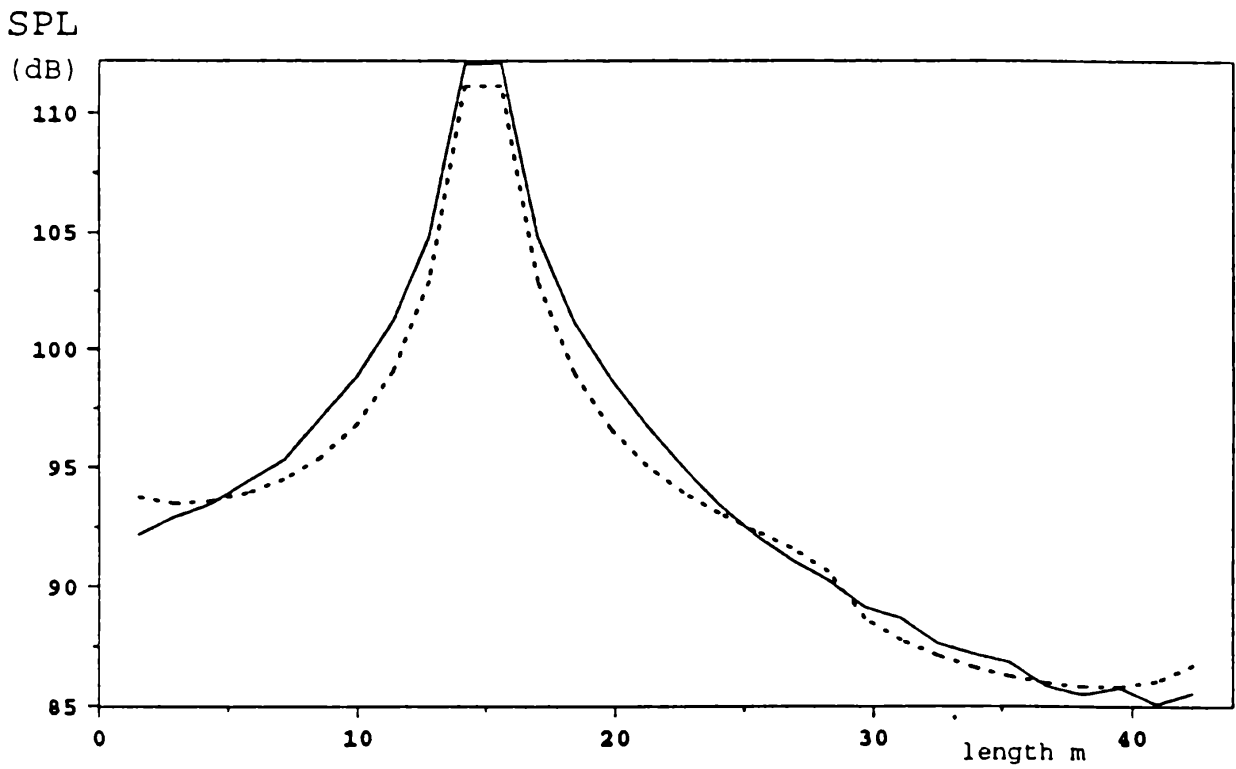
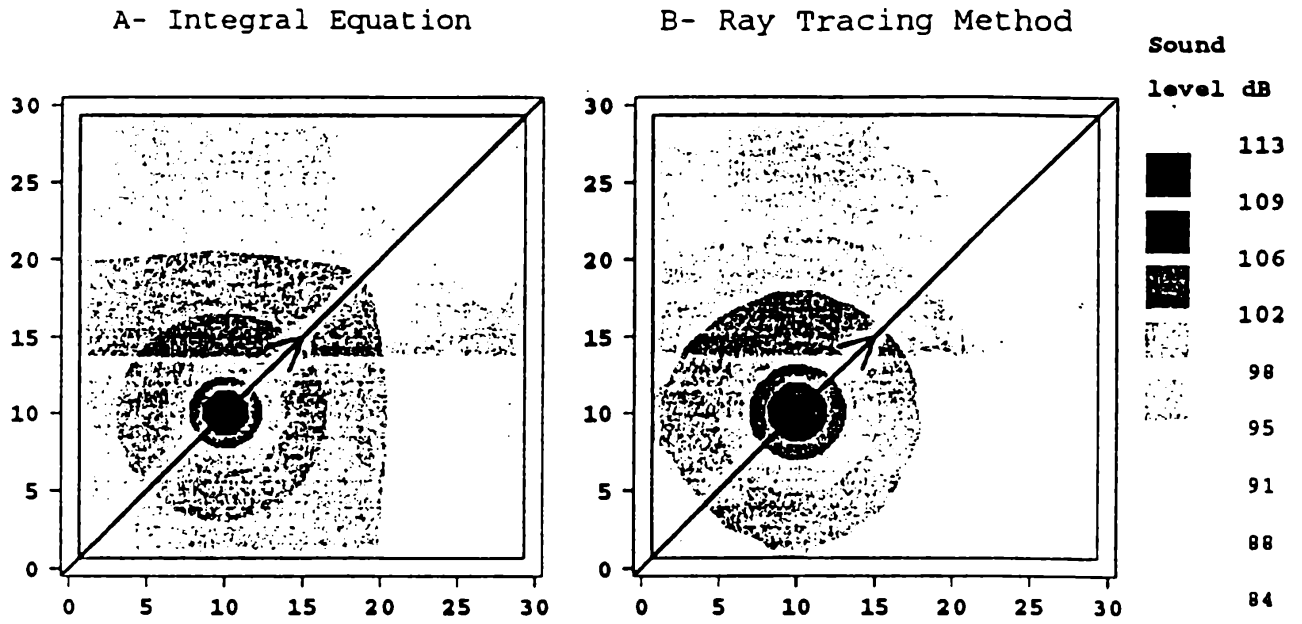
la diagonale. La constante acoustique d'un tel local vaut  $R = 2400$  de sorte que la distance critique est de l'ordre de  $D_c = 7$  m. À l'intérieur d'une sphère de rayon  $D_c$  centrée sur la source, le champ direct domine. Celui-ci a la même expression analytique  $G(S, M)$  pour les deux modèles. À l'extérieur de cette sphère, le champ diffracté domine. Les résultats restent cependant voisins. Les irrégularités du calcul RAYON sont dues au manque de rayons dans certaines zones. Enfin, précisons que les temps de calcul sont tout à fait comparables alors que les méthodes numériques sont très différentes (simulation géométrique pour RAYON et méthode de collocation pour l'équation intégrale).

## 6 Application au couplage de plaques en flexion

Le second exemple est repris de la communication précédente *Couplage de plaques en hautes fréquences : méthode de l'équation de la chaleur* [10]. Les valeurs numériques sont les suivantes : deux plaques en acier de 2 m par 2 m ; la plaque 1 est excitée par une force ponctuelle de 1 N de 100 Hz à 20 kHz située à  $x = 0,6$  m et  $y = 0,5$  m dans un repère dont l'origine est un coin de la plaque 1 éloigné de la plaque 2 ; le rapport des célérités de groupe est de 2 (la plaque 2 est la plus rigide) ; l'amortissement structural est de 5 %. Trois calculs ont été réalisés : un calcul de référence basé sur une décomposition semi-modale de la solution des équations du mouvement, un calcul avec l'équation de la chaleur et un autre avec l'équation intégrale. Les diagrammes de la figure 4 représentent la densité d'énergie en fonction de la fréquence en deux points : le premier est situé au voisinage de l'excitation sur la plaque 1 et le second est situé sur la plaque 2. Les comparaisons numériques avec l'équation de la chaleur révèlent deux différences importantes. Tout d'abord, l'équation intégrale représente correctement la densité d'énergie au point 1, là où le champ direct est dominant. L'équation de la chaleur sous-estime les niveaux au voisinage de l'excitation. Dans le cadre du modèle intégrale, la décroissance du champ direct est en  $1/r$  où  $r = SM$ , contrairement à l'équation de la chaleur pour laquelle la décroissance est en  $1/\sqrt{r}$  (voir [8]). En second lieu, l'équation de la chaleur repose sur l'hypothèse que le champ est diffus. L'équation intégrale s'affranchit de cette hypothèse et prévoit bien les champs possédant une forte directivité. Au point 2, le niveau prédit par l'équation de la chaleur sur-estime le niveau de référence.

## 7 Conclusions

Dans cette étude, nous avons présenté un modèle théorique original du comportement vibratoire des structures à hautes fréquences. Ce modèle repose sur une approximation propre à ce domaine fréquentiel : *les interférences entre les ondes propagatives ne sont pas prises en compte*. Partant d'une représentation



— Ray Tracing Method  
 ..... Integral Equation

FIG. 3 - Comparaison méthode des rayons - méthode intégrale

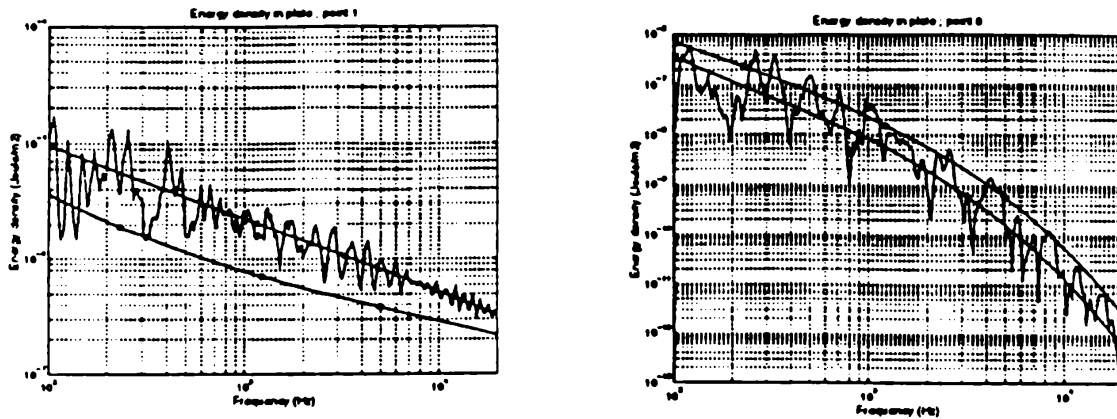


FIG. 4 – *Comparaison : o, méthode différentielle - x, méthode intégrale*

énergétique des champs vibratoires et appliquant le principe de Huygens et un principe de superposition linéaire des énergies, nous avons obtenu une formule intégrale de représentation de ces champs. Celle-ci fait apparaître une densité de sources fictives qui vérifie une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce.

Cette équation est résolue par voie numérique sur la base d'une méthode de collocation. Les temps de calculs de l'algorithme résultant sont très largement inférieurs à ce que nécessiterait un calcul par éléments finis. Des calculs jusqu'aux hautes fréquences deviennent alors accessibles.

Les comparaisons numériques avec l'acoustique géométrique montrent que les deux méthodes sont très proches, tant au niveau des résultats que des temps de calculs. L'équation intégrale présentée ici se propose donc une alternative pour les calculs d'acoustique intérieure. Il reste cependant à dégager clairement les spécificités de chaque méthode.

Les comparaisons avec l'équation de la chaleur révèlent deux différences notables : l'équation intégrale représente correctement le champ direct contrairement à l'équation de la chaleur et l'équation intégrale s'affranchit de l'hypothèse de champ diffus de sorte qu'elle prévoit mieux les champs possédant une forte directivité.

## Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier M. Aquilina (CERDAN, Toulon) et M. Ricol (EDF-DER, Clamart) pour leur collaboration active.

## Références

- [1] D.J. Nefske and S.H. Sung. Power flow finite element analysis of dynamic systems: Basic theory and application to beams. *NCA Publication*, Vol.3, 1987.
- [2] J.C. Wohlever and R.J. Bernhard. Mechanical energy flow models of rods and beams. *Journal of Sound and Vibration*, Vol.153:pp. 1–19, 1992.
- [3] O.M. Bouthier and R.J. Bernhard. Simple models of energy flow in vibrating membranes. *Journal of Sound and Vibration*, Vol.182:pp. 129–147, 1995.
- [4] O.M. Bouthier and R.J. Bernhard. Simple models of energy flow in vibrating plates. *Journal of Sound and Vibration*, Vol.182:pp. 149–164, 1995.
- [5] M. Djimadoum and J.L. Guyader. Possibilities to generalize the heat transfer approach to vibration of plates problems. In *Inter-Noise '95, Newport Beach CA*, 1995.
- [6] R.S. Langley. Analysis of beam and plate vibrations by using the wave equation. *Journal of Sound and Vibration*, Vol.150:pp. 47–65, 1991.
- [7] R.S. Langley. On the vibrational conductivity approach to high frequency dynamics for two-dimensional structural components. *Journal of Sound and Vibration*, Vol.182:pp. 637–657, 1995.
- [8] M.N. Ichchou A. Le Bot and L. Jezequel. Formulation Énergétique pour l'Étude moyennes et hautes fréquences des structures. In *Premier Colloque du Groupement de Recherche Vibroacoustique, Marseille France*, pages pp. 1–12, 1994.
- [9] M. Heckl L. Cremer and E.E. Ungar. *Structure-borne Sound*. Springer-Verlag, 1988.
- [10] A. Le Bot M.N. Ichchou and L. Jezequel. Couplage de plaques en hautes fréquences : Méthode de l'Équation de la chaleur. In *Second Colloque du Groupement de Recherche Vibroacoustique, Marseille France*, 1996.