

Couplage de plaques en hautes fréquences : méthode de l'équation de la chaleur.

M. N. ICHCHOU, A. LE BOT, L. JEZEQUEL

Ecole Centrale de Lyon, Dynamique des Systèmes et des Structures, URA CNRS 855. ECULLY.

Résumé L'analyse du comportement dynamique des systèmes dans le domaine non modal fait ici appel à une représentation énergétique du champ vibratoire. Cette représentation se base sur une loi énergétique locale analogue à la loi de Fourier. Cette loi conduit à une équation différentielle décrivant l'évolution macroscopique du champ vibratoire. Les propriétés de cette équation énergétique sont analysées. Finalement, le couplage énergétique des systèmes est traité à l'aide de la notion de matrice de diffusion des interfaces considérées. Le couplage de plaques en hautes fréquences est choisi comme exemple afin de valider la théorie.

1 Introduction

Du point de vue de la dynamique des structures et de l'acoustique, il est possible de connaître le comportement dynamique d'un système linéaire et déterministe à l'aide des méthodes classiques (éléments finis, éléments de frontière, ...). Dans la pratique cette démarche se heurte rapidement à de grandes difficultés. En effet, si ces outils permettent de prédire avec efficacité le comportement dynamique des systèmes dans le domaine des basses fréquences où le comportement modal apparaît clairement, ils ne peuvent être utilisés dans la gamme supérieure des spectres d'excitations qu'au prix d'un coût de calcul excessif. En particulier la gamme des fréquences audibles 20Hz-20kHz.

Depuis plusieurs années déjà l'équipe Dynamique des Systèmes et des Structures étudie une méthode qui correspond à une extension de la méthode statistique énergétique (SEA). Elle est intitulée méthode énergétique simplifiée (SEM). Par rapport à la (SEA), cette méthode présente les avantages suivants : elle fait appel à des hypothèses clairement établies, elle caractérise la répartition spatiale des variables énergétiques, elle permet de décrire finement le couplage entre les sous-systèmes.

Deux formes des équations de la (SEM) ont été proposées. La première forme est intégrale, elle fait appel au principe de Huygens pour la construction du champ énergétique. C'est une description globale du comportement énergétique. La seconde forme est différentielle. Elle se base sur l'hypothèse de champs diffus et sur une loi énergétique locale. Dans ce papier, quelques résultats concernant la forme différentielle sont fournis, l'étude de la forme intégrale est proposée dans le papier de synthèse qui suit.

2 Généralités

Les hypothèses dont nous aurons besoin pour élaborer les modèles énergétiques sont les suivantes :

Hypothèse 1 (H1) *le système est étudié en régime harmonique, forcé, établi, de pulsation ω ,*

Hypothèse 2 (H2) *le coefficient d'amortissement est faible $\eta \ll 1$,*

Hypothèse 3 (H3) *les ondes évanescentes sont négligées,*

Hypothèse 4 (H4) *les interférences entre les ondes propagatives ne sont pas prises en compte.*

Les deux premières hypothèses indiquent le cadre général de l'étude. L'hypothèse (H1) place l'analyse dans le domaine fréquentiel et écarte l'aspect temporel du comportement dynamique des systèmes analysés. L'hypothèse (H2) concerne le modèle de dissipation. Celui ci peut être aussi bien hystérétique que visqueux. Ces deux modèles sont en effet équivalents en vertu des hypothèses (H3) et (H4) que nous commenterons par la suite. Le coefficient de perte par dissipation que nous notons par la suite η est supposé faible. Ceci implique que la vitesse de groupe du système amortie est approximativement égale à la vitesse de groupe du système non amorti équivalent. L'hypothèse (H3) écarte la contribution du champ proche dans le modèle énergétique. En effet, l'étendue de celui ci est limitée aux voisinages des singularités (environ une longueur d'onde) et diminue considérablement lorsque la fréquence augmente. L'hypothèse (H4) est de loin la plus importante. Cette hypothèse a été proposée [1,2] par les auteurs dans le cadre de l'analyse des systèmes filaires. Dans le cas des milieux à plusieurs dimensions cette hypothèse traduit l'incohérence entre les ondes propagatives qui sont de natures et de directions différentes. Ainsi, si w_i et w_j désignent deux ondes propagatives de directions respectives ϑ_{ik} et ϑ_{jl} , l'hypothèse (H4) peut se mettre sous la forme :

$$E[w_i(\vartheta_{ik}) w_j^*(\vartheta_{jl})] = w_i(\vartheta_{ik}) w_i^*(\vartheta_{ik}) \delta_{ij} \delta(\vartheta_{ik} - \vartheta_{jl}) \quad (1)$$

C'est une notion de moyenne d'ensemble qui peut être interprétée de plusieurs manières. Pour une excitation aléatoire, cette moyenne couvre toutes les réalisations possibles de l'excitation, alors que pour une excitation déterministe, cette moyenne peut être interprétée comme une moyenne d'ensemble sur plusieurs réalisations du système. Cette hypothèse est analogue à l'hypothèse d'incohérence modale de la (SEA). Il faut noter, finalement, que l'une des conséquences des deux hypothèses

(H3) et (H4) est l'égalité de la densité d'énergie cinétique et de la densité d'énergie potentielle.

Par la suite, deux grandeurs énergétiques sont utilisées : la densité d'énergie totale W et l'intensité active I qui est une grandeur vectorielle. Comme le système est étudié en régime harmonique forcé, ces grandeurs sont les moyennes temporelles sur une période des grandeurs instantanées. La densité d'énergie totale W est la somme des densités d'énergie cinétique et potentielle, elle est exprimée en Joule/m^n où n est la dimension de l'espace. L'intensité active I est la partie réelle de l'intensité complexe, elle est exprimée en Watt/m^{n-1} .

Le point de départ des modèles énergétiques est l'expression du bilan de puissance en régime stationnaire écrit pour une région non chargée :

$$\text{div. } I + p_{diss} = 0, \quad (2)$$

où p_{diss} est la densité de puissance dissipée. Plusieurs lois d'amortissement sont envisageables. Dans la suite, nous utiliserons systématiquement un amortissement hystérétique modélisé à l'aide d'une partie imaginaire ajoutée au module d'Young : $E = E_0(1 + i\eta)$. Ce choix fixe la valeur de la densité de puissance dissipée : elle est proportionnelle à la densité d'énergie potentielle. Dans le cadre des modèles énergétiques tout comme en (SEA), nous ne distinguerons pas les différentes formes d'énergie (cinétique et potentielle) d'un système. Nous retiendrons donc la relation suivante valable également en (SEA) :

$$p_{diss} = \eta \omega W \quad (3)$$

Enfin, la dernière étape pour obtenir une équation sur W seul, consiste à écrire une 'loi de comportement' énergétique $I = H(W)$, où H est un opérateur qu'il convient de déterminer. Cette loi est établie à l'aide d'une approche propagative.

3 Equation énergétique différentielle : Cas d'un milieu isolé.

Soit une onde plane se propageant en trois dimensions. Par définition le mouvement de chaque particule dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation est le même.

Dans la figure 1 le vecteur n représente la normale au plan d'onde. Ainsi, avec les notations de la figure ci-dessus, le mouvement de toute particule est donné par :

$$n \cdot x - c t = \text{constante} \quad (4)$$

où \mathbf{x} est le vecteur position et c est la vitesse de propagation de l'onde. Une onde plane w s'écrit dans le cas général:

$$w(\mathbf{x}, t) = a e^{i\mathbf{k}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - ct)} \quad (5)$$

Cette relation implique également que:

$$\vec{\text{grad}}(w) \propto \mathbf{n} \quad (6)$$

Le gradient d'une onde plane est donc proportionnel au vecteur normal au front d'onde. Cette relation est employée ci-dessous dans un cadre énergétique.

3.1 Cas d'une onde plane

Pour trouver l'opérateur énergétique nous nous basons sur la loi constitutive partielle donnée par la relation (7) :

$$\mathbf{I} = c_g W \mathbf{n} \quad (7)$$

Toutes les ondes propagatives sont supposées être de même nature. Le comportement énergétique ne fait appel qu'à une vitesse de groupe. Les grandeurs énergétiques sont reliées par la loi de conservation énergétiques, qui s'écrit en l'absence de tout chargement:

$$\text{div}.\mathbf{I} + \eta \omega W = 0 \quad (8)$$

En introduisant (7) dans (8), il nous vient que:

$$\text{div}.(c_g W \mathbf{n}) + \eta \omega W = 0 \quad (9)$$

Or:

$$\text{div}(\mathcal{A} \mathbf{n}) = \mathcal{A} \text{div}.\mathbf{n} + \mathbf{n}.\vec{\text{grad}}(\mathcal{A}) \quad (10)$$

\mathcal{A} est une fonction scalaire représentant une densité d'énergie. Combinant maintenant les relations (9) et (10), on aboutit à l'expression:

$$c_g W \text{div}.\mathbf{n} + c_g \mathbf{n}.\vec{\text{grad}}(W) + \eta \omega W = 0 \quad (11)$$

$$\vec{\text{grad}}(W) = \frac{\partial W}{\partial n} \mathbf{n} \quad (12)$$

Des relations (11) et (12) découle l'expression importante:

$$c_g \frac{\partial W}{\partial n} + \eta \omega W = 0 \quad (13)$$

En multipliant l'expression (13) par le vecteur normal \mathbf{n} , nous obtenons une loi simple:

$$c_g \vec{\text{grad}}(W) + \eta \omega \frac{\mathbf{I}}{c_g} = 0 \quad (14)$$

Soit :

$$\mathbf{I} = -\frac{c_g^2}{\eta \omega} \vec{\text{grad}}(W) \quad (15)$$

On montre ainsi que l'intensité active et la densité d'énergie associées à une onde plane obéit à une loi de type transfert de la chaleur. Cette relation généralise le résultat que nous avons établi pour les systèmes à une dimension [1,2]. Cette relation prouve que le domaine de validité du modèle de transfert de la chaleur est lié à une description de type ondes planes de l'état dynamique du système analysé.

3.2 Cas général

Pour établir la forme de l'opérateur \mathbf{H} dans le cas général nous introduisons par la suite l'hypothèse suivante :

Hypothèse 5 (H5) *le champs est diffus*

Cette hypothèse stipule que dans le cas général le champs résultant est constitué d'ondes planes et qu'il est diffus. L'équation (15), est employée ci-dessous pour établir la forme de l'opérateur \mathbf{H} . En combinant la relation (15) et la loi de superposition énergétiques (H4) et (H5), on montre aisément, que le champ global est régit par la loi:

$$\mathbf{I} = -\frac{c_g^2}{\eta \omega} \vec{\text{grad}}(W) \quad (16)$$

Nous montrons ainsi, que sous l'hypothèse d'onde plane, la loi énergétique globale recherchée est une loi de type gradient. Cette relation est établit ici dans le cas général à l'aide des propriétés intrinsèques des

ondes planes. Cette relation a été souvent proposée [4,6,7,9]. Cependant, dans la plupart des études ce modèle était sous entendu. Les auteurs supposant d'entrée une proportionnalité entre l'intensité active et le gradient de la densité d'énergie. La loi de conservation de l'intensité active s'écrit dans le cas général :

$$\text{div.} \mathbf{I} + \eta \omega W = p_{inj} \quad (17)$$

En introduisant, finalement la loi constitutive (16) dans la loi de conservation rappelée ci-dessus, on aboutit à l'équation de la méthode énergétique simplifiée pour les systèmes à plusieurs dimensions. Soit:

$$-\frac{c_g^2}{\eta \omega} \Delta W + \eta \omega W = p_{inj} \quad (18)$$

L'équation (18) est la forme différentielle des équations de la (SEM) pour les systèmes à deux ou trois dimensions. Elle permet de décrire le comportement moyen de la densité d'énergie totale et de l'intensité active loin des singularités sous l'hypothèse d'ondes planes. Cette équation, présente les avantages numériques requise pour l'analyse du comportement des systèmes dans le domaine des moyennes et hautes fréquences.

3.3 Conditions aux limites énergétiques

Avant de résoudre l'équation différentielle énergétique (18), intéressons nous aux conditions aux limites qui lui sont appropriées. Une onde, w^+ , incidente propagative plane de direction φ , se réfléchie à la frontière pour donner naissance à une onde plane propagative réfléchie w^- , de direction d'angle φ et à une onde plane évanescence notée w_e^- . Ces ondes peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} w^+(x, y) &= a^+ e^{-ik \cos(\varphi)x - ik \sin(\varphi)y} \\ w^-(x, y) &= a^- e^{ik \cos(\varphi)x - ik \sin(\varphi)y} \\ w_e^-(x, y) &= a_e^- e^{k\sqrt{1+\sin^2(\varphi)}x - ik \sin(\varphi)y} \end{aligned} \quad (19)$$

Entre ces trois formes d'ondes, il existe des relations de proportionnalité traduisant la réflexion à la frontière. Ces relations dépendent des conditions aux limites cinématiques permettant de définir la frontière. Dans le cas de la plaque en flexion, deux relations cinématiques sont nécessaires pour définir une condition limite cinématique. Les coefficients de proportionnalité qui en découlent définissent la matrice de réflexion de la jonction. Soit :

$$\begin{aligned} w^-(x, y) &= r w^+(x, y) \\ w_e^-(x, y) &= r_e w^+(x, y) \end{aligned} \quad (20)$$

Or, le coefficient de réflexion r_e caractérise la part du champ évanescent qui a été généré par la jonction. Comme le champ évanescent ne transporte pas d'énergie, seule la première relation est employée. Nous obtenons alors la condition limite énergétique sous la forme :

$$I.n = \frac{1-R}{1+R} c_g W \quad (21)$$

Avec: $R = |r|^2$

Dans le cas particulier des frontières absorbantes des plaques en flexion, le module au carré du coefficient de réflexion vaut 1, $|r|^2 = 1$, soit.

$$I.n = 0 \quad (22)$$

C'est la condition classique d'une frontière non absorbante.

4 Equation énergétique différentielle : Interface entre deux milieux.

Les conditions de couplage que nous développons nécessitent la connaissance de la matrice de diffusion intrinsèque à l'interface analysée. Considérons les ondes propagatives entrantes dans la jonction w_e , et les ondes propagatives ou évanescentes sortantes de la jonction w_s . En écrivant les équations de compatibilité à l'aide des formes d'ondes en présence à l'interface, la relation suivante peut être obtenue:

$$[S]_{m \times m} \{w_s(\varphi_j)\}_{j=1,m} = [E]_{m \times n} \{w_e(\varphi_i)\}_{i=1,n} \quad (23)$$

$[S]$ et $[E]$ sont deux matrices directement liées aux caractéristiques des guides d'ondes et à la nature de la jonction. La matrice de diffusion $[D]$ est dans ce cas de dimension $m \times n$, se met sous la forme:

$$[D]_{m \times n} = [S]_{m \times m}^{(-1)} [E]_{m \times n} \quad (24)$$

Avec:

$$\{w_s(\varphi_j)\}_{j=1,m} = [D(\varphi_j, \varphi_i)]_{m \times n} \{w_e(\varphi_i)\}_{i=1,n} \quad (25)$$

Les ondes sortantes de l'interface peuvent être aussi bien des ondes évanescentes que propagatives. La matrice de diffusion $[D]$ renferme donc les deux types de coefficients de réflexion et de transmission (propagative-propagative et évanescentes-propagatives). Pour l'écriture des conditions de couplages seules les composantes propagatives (au nombre de n) du vecteurs $[S]$ seront considérées. De ce fait, si w_{s_i} désigne une onde propagative sortantes (de type flexion, cisaillement ou longitudinale ...), alors la relation (25) se reformule comme suite :

$$w_{s_i}(\varphi_i) = \sum_{j=1,n} D_{ij}(\varphi_i, \varphi_j) w_{e_j}(\varphi_j) \quad (26)$$

Evaluons maintenant le module au carré de l'expression ci-dessus. Celui ci se met sous la forme:

$$w_{s_i} w_{s_i}^*(\varphi_i) = \sum_{j=1,n} |D_{ij}(\varphi_i, \varphi_j)|^2 w_{e_j} w_{e_j}^*(\varphi_j) + \sum_{j=1,n} \sum_{\substack{l=1,n \\ l \neq j}} D_{il}(\varphi_i, \varphi_l) D_{ij}^*(\varphi_i, \varphi_j) w_{e_j}(\varphi_j) w_{e_l}^*(\varphi_l) \quad (27)$$

L'énergie associée à l'onde w_{s_i} , est combinaison linéaire des énergies associées à toutes les ondes entrantes à l'interface, et des termes d'interférences entre les ondes entrantes. En supposant que les ondes entrantes sont décorrelées, l'expression (27) devient.

$$I_{s_i} \cdot n = \sum_{j=1,n} \left(|D_{ij}|^2 Z_{s_i} n \cdot n_{si} / Z_{e_j} n \cdot n_{ej} \right) I_{e_j} \cdot n \quad (28)$$

Z désigne l'impédance caractéristique de l'onde. Après moyenne sur l'étendu de l'angle d'incidence, nous obtenons en vertu de (H5) :

$$I_{s_i} \cdot n = \sum_{j=1,n} \left(\int_{\varphi_{e_j}} |D_{ij}|^2 Z_{s_i} n \cdot n_{si} / \int_{\varphi_{e_j}} Z_{e_j} n \cdot n_{ej} \right) I_{e_j} \cdot n \quad (29)$$

Des relations similaires à (29), peuvent être écrites pour toutes les ondes propagatives sortantes de la jonction.

5 Application à une plaque isolée

	$L_x (m)$	$L_y (m)$	$h (m)$	$\eta (\%)$	densité	$E_0 (\mathcal{N}/m^2)$
Plaque	2	2	$3.25 \cdot 10^{-3}$	{0.1;1;10}	7800	$2 \cdot 10^{11}$

Table 1. caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque testée.

Une simulation numérique comparant les résultats de la procédure cinématique à la solution de l'équation énergétique simplifiée a été réalisée dans le cas d'une plaque simplement supportée à la fréquence $f=1000 \text{ Hz}$. Le calcul cinématique est effectué en prenant 100 modes par direction. Alors que pour le calcul (SEM) seul 20 modes par direction ont été pris en compte.

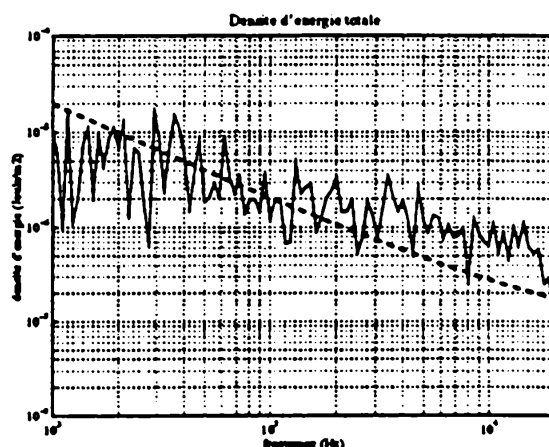


fig 1 Evolution en fréquence de la densité d'énergie totale pour un facteur d'amortissement de 1%. (—) calcul cinématique classique et (-----) calcul par la méthode (SEM). Simulation au point d'abscisse (0.6m;0.6m) .

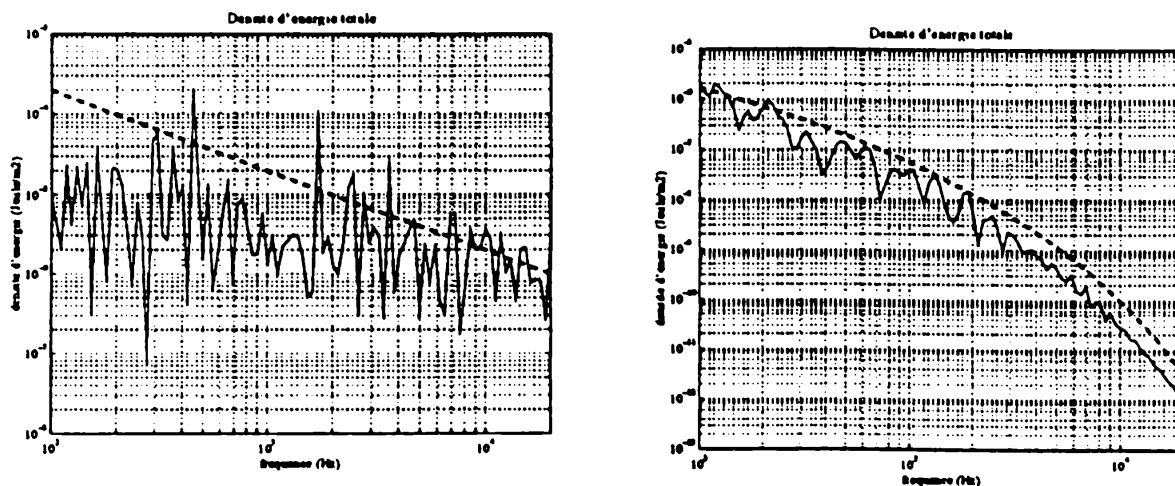


fig. 2. Evolution spatiale de la densité d'énergie totale (a) amortissement 0.1% et (b) amortissement 10%. (—) calcul cinématique classique et (-----) calcul par la méthode (SEM). Simulation au point d'abscisse (1.5m;1.5m) .

La figure 1 montre l'évolution en fréquence de la densité d'énergie totale proche du point source lorsque le facteur d'amortissement est égal à 1%. Le voisinage du point source est une région principalement de champ

directe, ceci explique la perte d'efficacité du modèle (SEM) au point $(0.6m;0.6m)$. La figure 2 présente un cas à forte réverbération et un autre à faible réverbération. On constate ainsi que les résultats de la (SEM) ne présentent pas d'anomalie apparente pour un facteur de perte de 0.1%, alors que la méthode surestime sensiblement lorsque l'amortissement vaut 10%.

6 Application au couplage de plaques en flexion

6.1 Conditions de couplage énergétiques

Le couplage se fait toujours suivant une ligne droite parallèle à l'axe des y . Nous notons alors respectivement w_1^+ , w_1^- , w_{1e}^- , w_2^+ et w_{2e}^+ , l'onde incidente, l'onde réfléchie progressive, l'onde réfléchie évanescente, l'onde transmise progressive et l'onde transmise évanescente qui coexistent à l'interface. L'onde incidente d'angle φ_1 rencontre la frontière en donnant naissance simultanément à une onde réfléchie propagative de même angle de réflexion φ_1 , et une onde réfléchie évanescente mais également à une onde transmise propagative d'angle de transmission φ_2 et une onde évanescente transmise. En prenant, pour l'onde incidente une onde plane, celle ci se met sous la forme:

$$w_1^+(x, y) = a^+ e^{-ik_1 \cos(\varphi_1)x - ik_1 \sin(\varphi_1)y} \quad (30)$$

Les ondes réfléchies et transmises se mettent aussi sous la forme:

$$\begin{aligned} w_1^-(x, y) &= a^- e^{ik_1 \cos(\varphi_1)x - ik_1 \sin(\varphi_1)y} & w_{1e}^-(x, y) &= a_e^- e^{k_1 \sqrt{1 + \sin^2(\varphi_1)}x - ik_1 \sin(\varphi_1)y} \\ w_2^+(x, y) &= b^+ e^{-ik_2 \cos(\varphi_2)x + ik_2 \sin(\varphi_2)y} & w_{2e}^+(x, y) &= b_e^+ e^{-k_2 \sqrt{1 + \sin^2(\varphi_2)}x + ik_2 \sin(\varphi_2)y} \end{aligned} \quad (31)$$

La loi classique de Snell-Descartes s'exprime par:

$$k_1 \sin(\varphi_1) = k_2 \sin(\varphi_2). \quad (32)$$

En introduisant l'expression (32), dans la relation (31), on obtient les formes suivantes pour les ondes transmises:

$$\begin{aligned} w_2^+(x, y) &= b^+ e^{-ik_1 \sqrt{x^2 - \sin^2(\varphi_1)}x + ik_1 \sin(\varphi_1)y} \\ w_{2e}^+(x, y) &= b_e^+ e^{-k_1 \sqrt{x^2 + \sin^2(\varphi_1)}x + ik_1 \sin(\varphi_1)y} \end{aligned} \quad (33)$$

avec: $\chi \stackrel{def}{=} k_2/k_1 = c_{\varphi 2}/c_{\varphi 1}$. Finalement, à l'interface entre les deux plaques, la réponse cinématique est la superposition des ondes qui y sont présentes :

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= w_1^+(x, y) + w_1^-(x, y) + w_{1e}^-(x, y) \\ w_2(x, y) &= w_2^+(x, y) + w_{2e}^+(x, y) \end{aligned} \quad (34)$$

A ce stade, il nous faut déterminer les coefficients de réflexion et de transmission cinématiques. Pour ce faire, on introduit les relations (34) dans les équations de compatibilités. Celles-ci s'écrivent ici:

$$\begin{aligned} w_1 &= w_2 & \frac{\partial w_1}{\partial x} &= \frac{\partial w_2}{\partial x} \\ D_1 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) &= D_2 \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right) \\ -D_1 \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y^2} \right) &= -D_2 \left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w_2}{\partial x \partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (35)$$

En combinant (34) et (35), on se ramène à la résolution du système matriciel reliant les champs réfléchis, les champs transmis, et le champ incident w_1^+ :

$$[S]_{4 \times 4} \begin{bmatrix} w_1^- \\ w_{1e}^- \\ w_2^+ \\ w_{2e}^+ \end{bmatrix} = [E]_{4 \times 1} [w_1^+] \quad (36)$$

Les matrices $[S]_{4 \times 4}$ et $[E]_{4 \times 1}$ sont respectivement les matrices de sortie et d'entrée à la jonction. A partir de la relation (36), on définit les coefficients de réflexion et de transmission à la jonction par:

$$\begin{bmatrix} r(\varphi_1) \\ r_e(\varphi_1) \\ t(\varphi_1) \\ t_e(\varphi_1) \end{bmatrix} = [S]_{4 \times 4}^{(-1)} [E]_{4 \times 1} \quad (37)$$

Les paramètres $r(\varphi_1)$ et $t(\varphi_1)$ (respectivement, $r_e(\varphi_1)$ et $t_e(\varphi_1)$) désignent les coefficients de réflexion et de transmission cinématiques reliant la composante propagative (respectivement, évanescente) des champs

réfléchis et transmis à l'onde incidente. Par la suite, seules les composantes propagatives seront retenues:

$$t(\varphi_1) = ([S]_{4 \times 4}^{(-1)} [E]_{4 \times 1})(3, 1) \quad r(\varphi_1) = ([S]_{4 \times 4}^{(-1)} [E]_{4 \times 1})(1, 1) \quad (38)$$

Les relations sur les paramètres énergétiques associées et correspondant à la projection du vecteur intensité sur la normale sortante à la jonction se ramènent finalement aux expressions suivantes:

$$I_1 \cdot n = -R I_1^* \cdot n \quad I_2^* \cdot n = T I_1^* \cdot n \quad (39)$$

Avec :

$$R = |r(\varphi_1)|^2 \quad T = \frac{D_{o2} k_{o2}^2 \sqrt{\chi^2 - \sin^2(\varphi_1)}}{D_{o1} k_{o1}^2 \cos(\varphi_1)} |t(\varphi_1)|^2 \quad (40)$$

Les relations (40), font apparaître les coefficients de couplage énergétiques en fonction de l'angle d'incidence φ_1 . En adoptant l'hypothèse de champs diffus (H5) on obtient les coefficients de réflexion et de transmission énergétiques moyens suivants:

$$R^m = \int_{\varphi_c} -|r(\varphi_1)|^2 d\varphi_1 \quad (41)$$

$$T^m = \int_{\varphi_c} \frac{D_{o2} k_{o2}^2}{D_{o1} k_{o1}^2} \sqrt{\chi^2 - \sin^2(\varphi_1)} |t(\varphi_1)|^2 d\varphi_1 \bigg/ \int_{\varphi_c} \cos(\varphi_1) d\varphi_1$$

Ces deux paramètres décrivent le couplage au sens de l'équation énergétique différentielle. En supposant que les ondes propagatives entrantes à l'interface sont décorréelées, les conditions de couplages s'écrivent:

$$I_1 \cdot n = -R^m I_1^* \cdot n + T^m I_2 \cdot n \quad (42)$$

$$I_2^* \cdot n = T^m I_1^* \cdot n - R^m I_2 \cdot n$$

Notons ici la réciprocité des efficacités de réflexion et de transmission. Les relations (42) se mettent également sous la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} I_1 \cdot n \\ -I_2 \cdot n \end{bmatrix} = -\frac{T^m}{2R^m} \begin{bmatrix} -c_{g1} & c_{g2} \\ c_{g2} & -c_{g1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

L'expression (43) permet de définir la matrice d'interface pour le couplage de deux plaques minces en flexion pure.

5.1 Résultats de la confrontation numérique

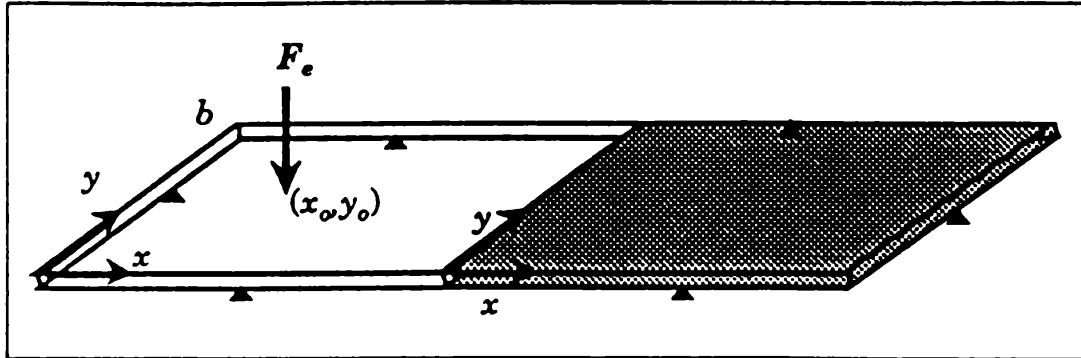


fig 3 Couplage de deux plaques en flexion

Nous présentons ici les résultats de la simulation numérique pour deux plaques couplées. La bande d'excitation est fixée a priori à 100 Hz-20 kHz. A la fréquence la plus élevée (20 kHz), la plaque excitée possède 50 longueurs d'onde par direction.

	$L_x (m)$	$L_y (m)$	épaisseur	$\eta (\%)$	densité (Kg/m^3)	$E_o (N/m^2)$
Plaque '1'	2	2	$3.25 \cdot 10^{-3}$	{0.1;1;10}	7800	$2 \cdot 10^{11}$
Plaque '2'	2	2	$13 \cdot 10^{-3}$	{0.1;1;10}	7800	$2 \cdot 10^{11}$

Table.2 caractéristiques mécaniques et géométriques des plaques analysées.

Un rapport 4 existe entre les épaisseurs des deux plaques. Ce qui induit également un rapport des vitesses de groupes c_{g1}/c_{g2} de 1/2. Soit un angle critique de 30°.

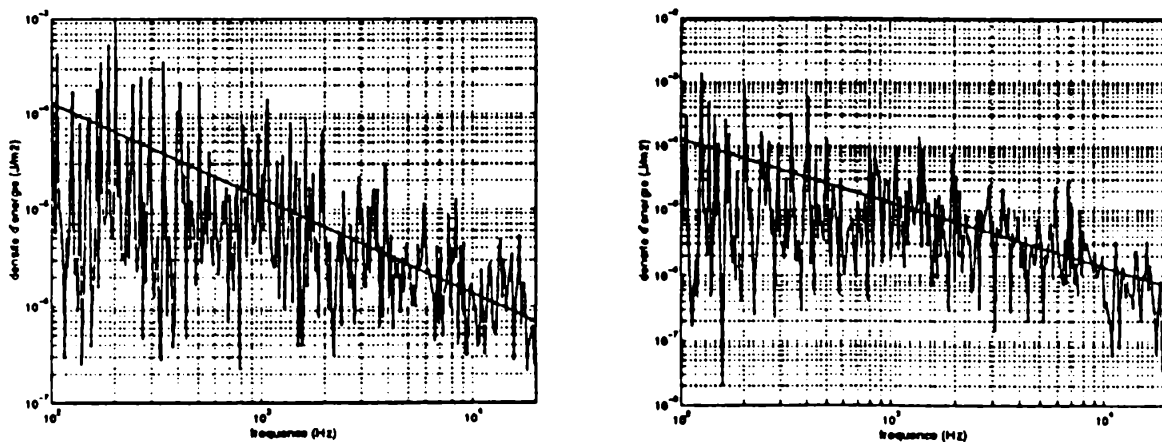


fig.4. Evolution en fréquence de la densité d'énergie totale. (a) point de la plaque 1 (0.6m;1.5m). (b) point de la plaque 2 (0.6m;1.5m)

Les simulations numériques sont effectuées en supposant que les deux plaques possèdent le même amortissement structural. La plaque

désignée par plaque "1" est excitée. Le point source se situe au point de coordonnées (0.6m;0.5m). La force d'excitation est égale à 1N. Lorsque l'amortissement vaut 0.1% nous constatons que la méthode énergétique différentielle fournit un bon niveau moyen du calcul de référence.

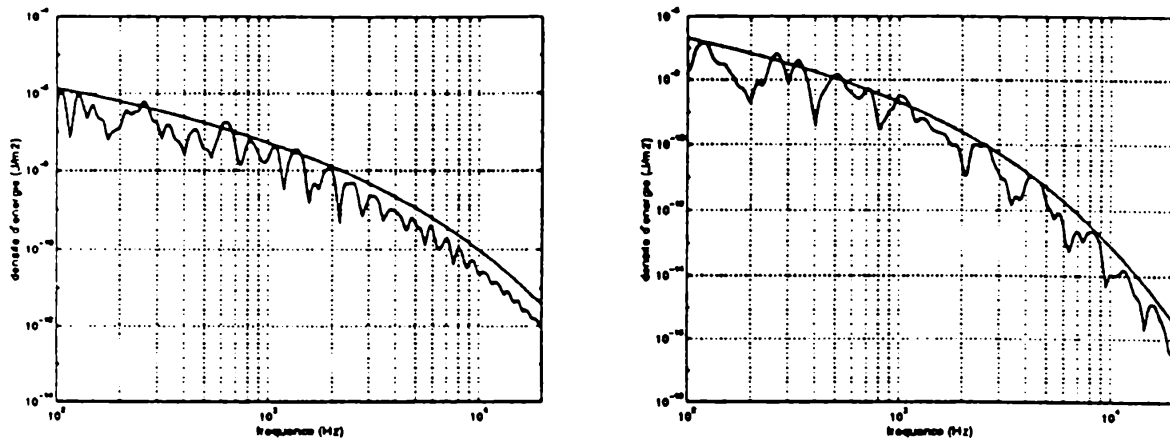


fig .5. Evolution en fréquence de la densité d'énergie totale. (a) point de la plaque 1 (0.6m;1.5m). (b) point de la plaque 2 (0.6m;1.5m)

Dans le cas où l'amortissement est élevé (10%) on atteint rapidement le comportement asymptotique des réponses dynamiques. le modèle énergétique surestime légèrement le niveau moyen tout en donnant la bonne tendance asymptotique.

6 Conclusion

Dans ce papier nous avons établi la forme différentielle des équations de la (SEM) en faisant appel à l'hypothèse d'ondes planes. Nous avons alors proposé une démonstration simple et générale permettant d'aboutir à ces équations. En effet, cette démonstration ne fait appel qu'à la vitesse de groupe du système étudié. Il ressort de cette démonstration que l'hypothèse d'onde plane implique des équations différentielles de la (SEM) analogue à la loi de transfert de la chaleur. Nous avons ensuite établi l'expression générale donnant la condition limite énergétique à partir du coefficient de réflexion de la frontière. La mise en oeuvre numérique de cette méthode fait appel à un schéma de discrétisation de type éléments finis énergétique.

Une confrontation numérique de la description énergétique différentielle avec un calcul classique en déplacement a été réalisée. Elle a permis de montrer que la méthode différentielle caractérise l'évolution macroscopique des énergies. En revanche, elle sous-estime les niveaux vibratoires au voisinage de la source. En champ lointain, la méthode différentielle fournit le bon comportement moyen pour des structures réverbérantes ou faiblement amortis. Elle surestime cependant légèrement le niveau moyen pour des systèmes fortement amortis.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier M. Aquilina (CERDAN, Toulon) et M. Ricol (EDF-DER, Clamart) pour leur collaboration active.

Bibliographie

- [1] Ichchou M.N., Formulation énergétiques pour l'étude moyennes et hautes fréquences des systèmes : Théorie et applications, Thèse Ecole Centrale de Lyon, 1996.
- [2] Le Bot A, Ichchou M.N., Jezequel L. Formulation énergétique pour l'étude moyennes et hautes fréquences des vibrations de structures, 1er colloque du GDR 1138 vibroacoustique, Marseille, page 1-12.
- [3] Le Bot A., Equations énergétiques en mécanique vibratoire. Application au domaine des moyennes et hautes fréquences, Thèse Ecole Centrale de Lyon, 1994.
- [4] Lasé Y., Description des réponses structurales dans le domaine des moyennes fréquences à l'aide d'une formulation énergétique, Thèse Ecole Centrale de Lyon, 1990.
- [5] Nefske D.J., Sung S.H., Power flow finite element analysis of dynamic systems: basic theory and application to beams, N.C.A. publication vol.3, 1987.
- [6] Bouthier O., Energetics of vibrating systems. M Sc Thesis, Purdue University, 1992.
- [7] Djimadoum M., Préviation des vibrations stationnaires et instationnaires aux moyennes fréquences : approche en énergie moyenne et approche par admittances impulsionnelles, Thèse INSA Lyon, 1993.
- [8] Langley R.S., Analysis of beam and plate vibrations, Journal of Sound and Vibrations, vol.150 n°1, 1991.
- [9] Langley R.S., On the vibrational conductivity approach to high frequency dynamics for two-dimensional structural components, Journal of Sound and Vibrations, vol.182 n°4, 1995.
- [10] Ichchou M.N., Jezequel L. "Comments on the energy flow models of plates and membranes", Journal of Sound and Vibration, 1996 (à paraître).