

Formulation énergétique pour l'étude moyennes et hautes fréquences des vibrations de structures.

A. LE BOT, M. N. ICHCHOU, L. JEZEQUEL

Ecole Centrale de Lyon, Dynamique des Systèmes et des Structures, ECULLY, FRANCE.

Résumé Depuis plusieurs années, diverses tentatives ont été menées en vue de généraliser la Statistical Energy Analysis (SEA) au-delà de ses hypothèses restrictives. En conservant les quantités énergétiques comme base de description des systèmes vibratoires, il s'agit d'obtenir une représentation continue des champs d'énergie contrairement à la SEA qui ne propose qu'une représentation discrète des systèmes. L'une de ces tentatives repose sur une équation différentielle de diffusion. Ce papier se propose de discuter cette équation.

1 Introduction

Le domaine des moyennes et hautes fréquences dispose de bien peu de moyens pour l'analyse vibratoire des structures. En effet, dans cette gamme de fréquences, les systèmes étudiés comportent un grand nombre de longueurs d'ondes. On convient dès lors, qu'un grand nombre de degrés de liberté est nécessaire pour modéliser correctement le comportement de la structure. Les méthodes numériques de résolution des équations classiques du mouvement (éléments finis, éléments de frontière, différences finies) sont alors trop onéreuses en temps de calculs. Plusieurs attitudes sont envisageables. On peut rechercher des méthodes numériques plus performantes et notamment s'intéresser à l'optimisation des algorithmes existants. On peut plus simplement attendre que l'informatique ait suffisamment progressé pour être en mesure d'effectuer ces calculs en un temps raisonnable à l'échelle humaine. Compte tenu de l'évolution rapide que connaît cette discipline, cette solution risque fort de s'imposer à moyen ou long terme. Enfin, pour ceux qui n'ont pas la patience d'attendre cette échéance ou dont la bourse est trop pauvre pour s'offrir ces machines très performantes, il reste la possibilité de rechercher de nouveaux modèles physiques, basés sur des approximations propres à ce domaine fréquentiel et dont les équations sont moins gourmandes en temps de calculs. C'est cette dernière solution qui nous intéresse ici. Dans cette étude, on développe un modèle énergétique (Smooth Energy Formulation SEF) [1] pour l'analyse vibratoire des systèmes en moyennes et hautes fréquences. Celui-ci est comparé avec un autre modèle plus connu (Energy Flow Analysis EFA) [2] reposant sur une équation de diffusion inspirée d'une analogie avec la loi de Fourier en thermique.

Les hypothèses dont nous aurons besoin pour élaborer les modèles énergétiques sont les suivantes :

- (H1) le système est étudié en régime harmonique, forcé, établi de pulsation ω ,
- (H2) le coefficient d'amortissement est faible ($\eta \ll 1$),
- (H3) les ondes évanescentes et champs proches sont négligées,
- (H4) les interférences entre les ondes propagatives ne sont pas prises en compte.

Deux grandeurs énergétiques sont utilisées : la densité d'énergie totale W et l'intensité active \mathbf{I} qui est une grandeur vectorielle. Comme le système est étudié en régime harmonique forcé, ces grandeurs sont les moyennes temporelles sur une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ des grandeurs instantanées. La densité d'énergie totale W est la somme des densités d'énergie cinétique et potentielle, elle est exprimée en Joule/mⁿ où n est la dimension de l'espace. L'intensité active \mathbf{I} est la partie réelle de l'intensité complexe, elle est exprimée en Watt/mⁿ⁻¹.

Le point de départ des modèles énergétiques est l'expression du bilan de puissance en régime stationnaire écrit pour une région non chargée :

$$\text{div. } \mathbf{I} + p_{diss} = 0, \quad (1)$$

où p_{diss} est la densité de puissance dissipée. Plusieurs lois d'amortissement sont envisageables. Dans la suite, nous utiliserons systématiquement un amortissement hystérétique modélisé à l'aide d'une partie imaginaire ajoutée au module d'Young : $E = E_0(1 + i\eta)$. Ce choix fixe la valeur de la densité de puissance dissipée : elle est proportionnelle à la densité d'énergie potentielle. Dans le cadre des modèles énergétiques tout comme en SEA, nous ne distinguerons pas les différentes formes d'énergie (cinétique et potentielle) d'un système. Nous retiendrons donc la relation suivante valable également en SEA : $p_{diss} = \eta\omega W$. Enfin, la dernière étape pour obtenir une équation sur W seul, consiste à écrire une 'loi de comportement' énergétique $\mathbf{I} = \mathbf{H}(W)$, où \mathbf{H} est un opérateur qu'il convient de déterminer. Cette loi est établie à l'aide d'une approche propagative dans le modèle SEF que nous proposons et est postulée pour l'équation de diffusion.

2 Equation de diffusion

Le modèle de l'équation de diffusion (Energy Flow Analysis EFA) a été proposé par Nefske & Sung [2] puis par Lasé [3], Bouthier [4] et Djimadoum [5]. Il repose sur une analogie avec la loi de Fourier en thermique : l'intensité est proportionnelle au gradient de la densité d'énergie

$$\mathbf{I} = \frac{-c^2}{\eta\omega} \text{grad}W. \quad (2)$$

Le coefficient de proportionnalité dépend de la vitesse de groupe c_g . Cette relation est démontrée pour les barres et les poutres dans [6], pour les ondes planes des plaques et membranes dans [4]. Dans le cas général, elle est postulée. Introduisons cette relation dans le bilan de puissance (1), il vient :

$$\text{div. grad}W - \left(\frac{\eta\omega}{c_g} \right)^2 W = 0 \quad (3)$$

L'équation (3) est l'analogie de l'équation de la chaleur en régime permanent avec un terme de convection. Cette équation est critiquée par Langley [6]. Ce dernier observe que dans le cas d'un système infini de dimension deux la décroissance en champ lointain de la solution de l'équation (3) est en $1/\sqrt{r}$ tandis que celle prévue par l'équation du mouvement d'une plaque ou d'une membrane est en $1/r$. Langley soulève ainsi un paradoxe dont nous proposerons une explication au paragraphe 4.

3 Équation SEF : systèmes à une dimension

Ces systèmes sont les plus simples à étudier. L'énergie se propage suivant une seule direction et ces systèmes se comportent comme des guides d'ondes. En chaque point la densité d'énergie et l'intensité active résultent de la superposition de d'ondes purement propagatives que nous appellerons champs partiels. Ces ondes se propagent le long du système dans les deux sens. Celle évoluant dans le sens croissant de l'abscisse curviligne est notée avec un indice + et celle évoluant dans le sens décroissant est notée avec un indice -. A chacun de ces champs partiels, associons une densité d'énergie W^+ et W^- et une intensité active dont les grandeurs algébriques sont I^+ et I^- (cette dernière est négative compte tenu de la convention de signe). Nous avons annoncé que les interférences entre les ondes propagatives ne sont pas prises en compte (hypothèse (H4)). Cette simplification est la clef de la modélisation en moyennes et hautes fréquences comme il apparaîtra dans la suite. Ainsi les grandeurs totales W et I sont les sommes des grandeurs partielles. Soit :

$$W = W^+ + W^-, \text{ et } I = I^+ + I^-. \quad (4,5)$$

Ecrivons maintenant les relations vérifiées par les champs partiels. Chaque champ partiel respecte isolément le bilan de puissance (1) :

$$\frac{dI^+}{ds} + p_{diss}^+ = 0, \quad \frac{dI^-}{ds} + p_{diss}^- = 0. \quad (6,7)$$

où s est l'abscisse curviligne le long du système.

Le modèle d'amortissement a déjà été précisé : la densité de puissance dissipée est proportionnelle à la densité d'énergie totale. Soit :

$$p_{diss}^+ = \eta\omega W^+, \text{ et } p_{diss}^- = \eta\omega W^-. \quad (8,9)$$

Dans la suite de ce paragraphe, plusieurs types de systèmes à une dimension sont étudiés.

3.1 Un seul mode de propagation symétrique

Le diagramme de dispersion nombre d'onde-fréquence de ces systèmes présente deux branches propagatives symétriques par rapport à l'axe des fréquences. Une seule vitesse de groupe c_g caractérise la propagation. Pour une onde purement propagative, l'intensité est proportionnelle à la densité d'énergie. Le coefficient de proportionnalité est la vitesse de groupe définie par : $c_g = d\omega/dk$ où k est la partie réelle du nombre d'onde. Ainsi compte tenu de la convention de signe :

$$I^+ = c_g W^+, \text{ et } I^- = -c_g W^-. \quad (10,11)$$

On peut vérifier directement cette relation de proportionnalité entre l'intensité active et la densité d'énergie d'une onde propagative à partir de la connaissance d'une solution analytique de l'équation du mouvement du système étudié. Il apparaît alors que cette égalité est vraie en champ lointain pour les ondes propagatives des systèmes non amortis mais fausse pour les ondes évanescentes, celles-ci n'ayant pas de vitesse de groupe puisque leur nombre d'onde est un nombre imaginaire pur. L'hypothèse (H3) s'avère donc nécessaire. Pour des systèmes amortis, la dissipation est prise en compte dans le bilan de puissance à travers le terme densité de puissance dissipée et non dans le calcul de la vitesse de groupe. Cette approximation est justifiée pour les petites valeurs du coefficient η : c'est l'objet de l'hypothèse (H2).

Tous les éléments sont maintenant à notre disposition pour déduire l'équation énergétique. Effectuons la différence des relations (6) et (7) et substituons les relations (8), (9), (10) et (11) dans le résultat, il vient :

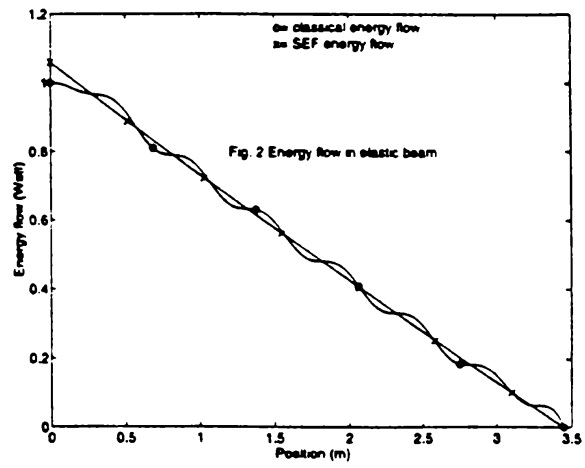
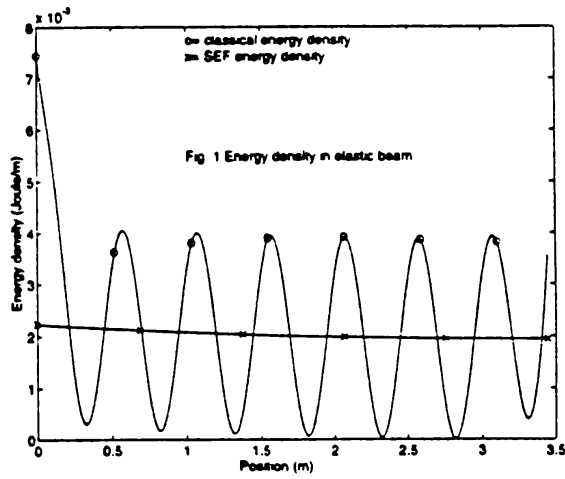
$$I = \frac{-c_g^2}{\eta\omega} \frac{dW}{ds}. \quad (12)$$

La somme des relations (6) et (7), exprime le bilan de puissance (1) sur les grandeurs totales. Substituons le résultat précédent, il vient :

$$\frac{d^2W}{ds^2} - \frac{\eta^2\omega^2}{c_g^2} W = 0. \quad (13)$$

La solution de cette équation associée à des conditions aux limites exprimées sur l'intensité I supposée connue aux extrémités du système est représentée sur les diagrammes 1 et 2 suivants. Cette solution est comparée avec l'évolution spatiale de la densité d'énergie et de l'intensité d'une poutre d'Euler-Bernoulli sur fondation élastique. La solution énergétique représente l'évolution spatiale moyenne de la densité d'énergie du système.

Ainsi l'information sur les fluctuations spatiales rapides de la densité



d'énergie est perdue. Seule l'évolution macroscopique subsiste dans les équations (12) et (13).

3.2 Un seul mode de propagation non symétrique

La particularité d'une propagation non symétrique est d'avoir des vitesses de groupes distinctes pour chaque sens de propagation. Nous les noterons c_g^+ et c_g^- . Ces valeurs sont par convention choisies positives. L'essentiel de l'analyse précédente reste valable. Cependant les 'lois de comportement' (10) et (11) sont changées. Elles deviennent :

$$I^+ = c_g^+ W^+, \text{ et } I^- = -c_g^- W^-. \quad (14,15)$$

Reprenant le calcul mené précédemment, la nouvelle relation liant l'intensité totale à la densité d'énergie totale est :

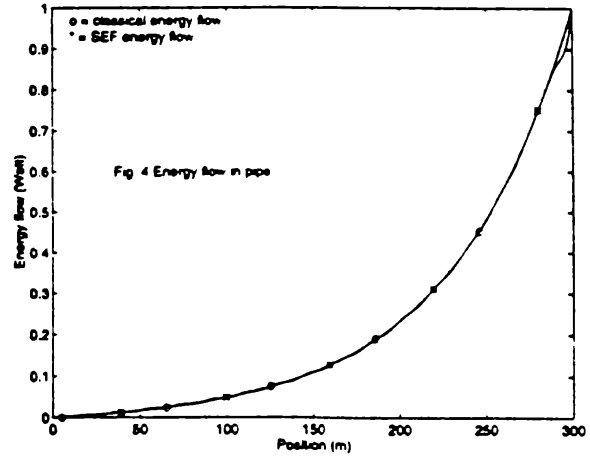
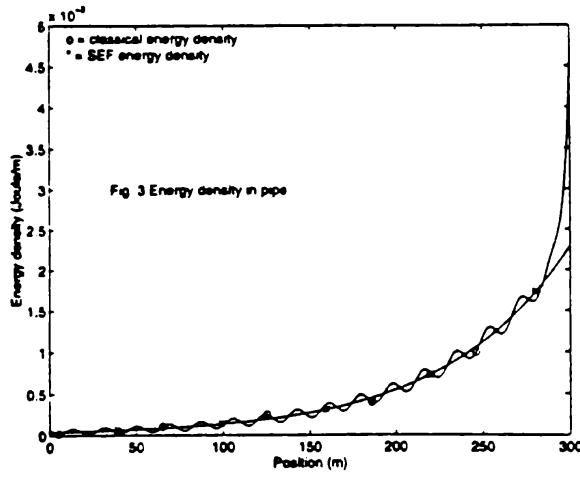
$$I = \frac{-c_g^+ c_g^-}{\eta \omega} \frac{dW}{ds} + (c_g^+ - c_g^-) W. \quad (16)$$

Il est clair que si les deux vitesses de groupe sont égales, cette égalité se réduit à la relation (12) du cas symétrique. Substituons-la dans le bilan de puissance (1) sur les grandeurs totales :

$$\frac{d^2 W}{ds^2} + \eta \omega \left(\frac{1}{c_g^+} - \frac{1}{c_g^-} \right) \frac{dW}{ds} - \frac{\eta^2 \omega^2}{c_g^+ c_g^-} W = 0. \quad (17)$$

Les figures 3 et 4 suivantes comparent les solutions des équations (16) et (17) avec les résultats d'un calcul classique pour les vibrations transversales d'une tuyauterie parcourue d'un fluide animé d'une vitesse. Le fluide porte l'onde dans le sens de sa vitesse et la freine dans le sens opposé. Ainsi, les vitesses de groupes sont distinctes dans chaque sens de propagation. L'équation du mouvement retenue pour ce système est détaillée dans [8].

Ces figures montrent de nouveau que la méthode SEF prévoit les moyennes spatiales des densités d'énergie et intensités du système considéré.



3.3 Deux modes de propagation symétrique

Considérons maintenant un système présentant un diagramme de dispersion avec plusieurs branches propagatives (deux pour fixer les idées). Chaque vitesse de propagation est supposée symétrique. Les grandeurs partielles intervenant dans ce problème sont au nombre de huit. Nous les notons $W_i^{+/-}$ avec $i=1,2$ pour les densités d'énergie et $I_i^{+/-}$ pour les intensités. On notera aussi $W_i = W_i^+ + W_i^-$ et $I_i = I_i^+ + I_i^-$. Enfin les grandeurs totales W et P sont toujours la somme des grandeurs partielles $W = \sum_i W_i^+ + W_i^-$ et $I = \sum_i I_i^+ + I_i^-$. Les champs partiels vérifient le bilan de puissance avec la loi d'amortissement hystérétique. Les 'lois de comportement' sont les suivantes :

$$I_i^+ = c_g^i W_i^+ \text{ et } I_i^- = -c_g^i W_i^- \text{ où } i=1,2. \quad (18,19)$$

Chaque onde d'indice i se comporte comme un système à un mode de propagation symétrique. Elle vérifie donc les équations (12) et (13).

$$I_i = \frac{-c_g^{i2}}{\eta\omega} \frac{dW_i}{ds}, \text{ et } \frac{d^2W_i}{ds^2} - \left(\frac{\eta\omega}{c_g^i} \right)^2 W_i = 0 \text{ avec } i=1,2. \quad (20,21)$$

Ces relations se synthétisent en deux relations sur les grandeurs totales :

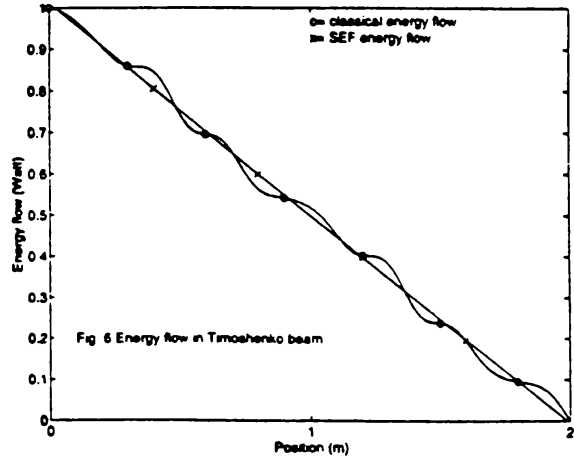
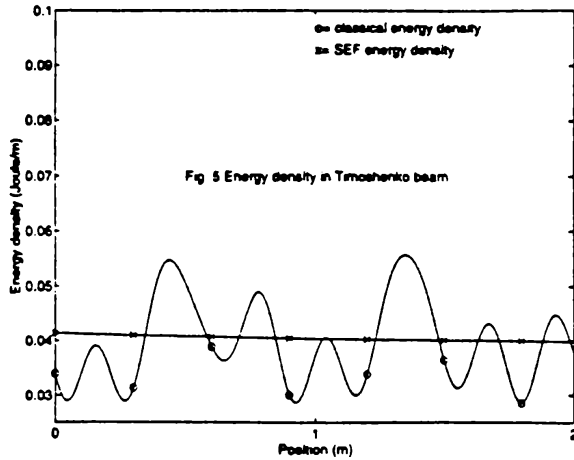
$$I = \frac{(c_g^1 c_g^2)^2}{\eta^3 \omega^3} \frac{d^3W}{ds^3} - \left(\frac{c_g^{12}}{\eta\omega} + \frac{c_g^{12}}{\eta\omega} \right) \frac{dW}{ds} = 0, \quad (22)$$

pour l'intensité, et

$$\frac{(c_g^1 c_g^2)^2}{\eta^3 \omega^3} \frac{d^4W}{ds^4} - \left(\frac{c_g^{12}}{\eta\omega} + \frac{c_g^{12}}{\eta\omega} \right) \frac{d^2W}{ds^2} + \eta\omega W = 0, \quad (23)$$

pour la densité d'énergie.

Les poutres de Timoshenko en vibrations forcées au-delà de leur fréquence de coupure, possèdent deux vitesses de groupe. C'est l'exemple retenu pour la simulation numérique dont les résultats sont présentés sur les figures 5 et 6.



Par comparaison avec les figures 1 et 2, on observe l'influence des deux vitesses de groupe. Même dans ce cas, la méthode SEF prédit une valeur moyenne des quantités énergétiques.

4 Équation SEF : systèmes à plusieurs dimensions

La formulation énergétique introduite au paragraphe 3, ne se généralise pas sans difficultés aux problèmes à plusieurs dimensions. En effet, il est difficile d'écrire directement une 'loi de comportement' locale entre les grandeurs totales \mathbf{I} et W du type $\mathbf{I}=\mathbf{H}(W)$. Pour contourner cette difficulté, on se propose de rechercher les équations énergétiques le long des lignes de champ du vecteur intensité active \mathbf{I} . Définissons tout d'abord le repère local. Le champ des vecteurs \mathbf{I} définit un réseau de courbes en tout point tangentes aux vecteurs \mathbf{I} . En dimension deux la forme différentielle associée à ces lignes de champ est $\det(\mathbf{I}, d\mathbf{l})=0$ et en dimension trois $\mathbf{I} \wedge d\mathbf{l}=0$. Notons s l'abscisse curviligne le long d'une ligne de champ et \mathbf{u} le vecteur directeur tangent à cette ligne et orienté suivant le sens croissant de s . \mathbf{u} est le premier vecteur d'un repère local. En tout point M de la structure le vecteur \mathbf{I} s'écrit $\mathbf{I}=I\mathbf{u}$ où I est une grandeur algébrique. Les autres vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{w} du repère local ne sont pas précisés car ils n'interviennent pas dans la démonstration comme nous allons le voir. Dans ce repère R défini par son origine M et les vecteurs \mathbf{u} , \mathbf{v} et \mathbf{w} , la divergence du vecteur \mathbf{I} s'écrit :

$$\operatorname{div}.\mathbf{I} = \frac{\partial I}{\partial s} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial s} I, \quad (24)$$

où g est le déterminant du tenseur métrique. Notons $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial s}$, la relation ci-dessus devient :

$$\operatorname{div}.\mathbf{I} = \frac{\partial I}{\partial s} + \Gamma I. \quad (25)$$

Ce terme Γ ne dépend pas du choix de \mathbf{v} puisque $\text{div.}\mathbf{I}$, I et $\frac{\partial I}{\partial s}$ n'en dépendent pas. Donnons une interprétation géométrique de ce terme. Il est égal à la divergence de \mathbf{u} : $\Gamma = \text{div.}\mathbf{u}$. En vertu du théorème d'Ostrograski, pour tout volume V entouré par une surface fermée S $\int_V \text{div.}\mathbf{u} d\tau = \oint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$, où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à S orienté vers l'extérieur de V . Choisissons un volume infinitésimal V , alors $\text{div.}\mathbf{u}$ est constant sur V . Donc Γ est le flux sortant du vecteur \mathbf{u} par la surface S fermée entourant le point et rapporté au volume considéré V :

$$\Gamma = \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (26)$$

Si cette surface est un tronc de tube de champ (voir figure 7) Γ est l'accroissement relatif de section du tube de champ autour du point considéré.

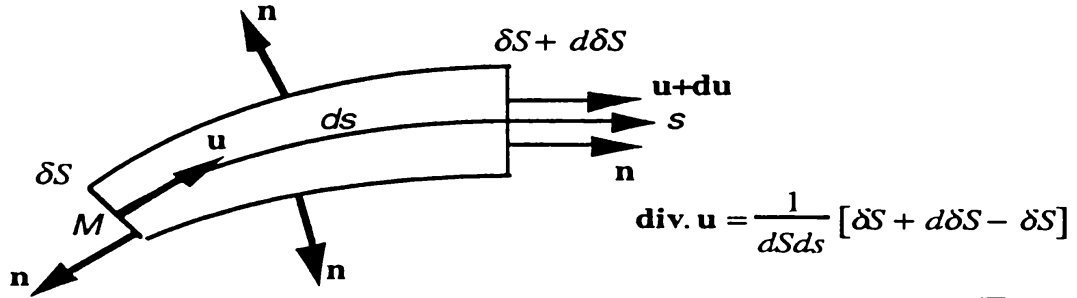


fig. 7 Interprétation géométrique de Γ

Dans la suite du texte, toutes les relations seront écrites le long d'une ligne de champ fixée d'abscisse curviligne s et les dérivées partielles selon s seront remplacées par des dérivées totales.

Reprenons la démonstration du paragraphe 3. Pour chaque onde propagative, compte tenu de (25) le bilan de puissance s'écrit dans le repère R :

$$\frac{dI^+}{ds} + \Gamma I^+ + p_{diss}^+ = 0, \quad \frac{dI^-}{ds} + \Gamma I^- + p_{diss}^- = 0. \quad (27,28)$$

Le modèle d'amortissement reste celui des relations (8) et (9). Les 'lois de comportement' sont celles des relations (10,11).

Effectuons la différence des relations (27) et (28) et substituons les relations (8), (9), (10) et (11) dans le résultat, il vient :

$$I = \frac{-c_g^2}{\eta \omega} \left(\frac{dW}{ds} + \Gamma W \right). \quad (29)$$

Effectuons maintenant la somme des relations (27) et (28) et substituons la relation (29) :

$$\frac{d^2 W}{ds^2} + 2\Gamma \frac{dW}{ds} + \left(\frac{d\Gamma}{ds} + \Gamma^2 - \frac{\eta^2 \omega^2}{c_g^2} \right) W = 0. \quad (30)$$

Cette équation constitue la forme la plus générale de l'équation énergétique.

A ce stade, nous devons remarquer que les équations énergétiques (29) et (30) dépendent du terme Γ qui est lié à la géométrie des lignes de champ. Ainsi, on ne peut pas envisager une résolution de (29) et (30) si l'on ne connaît pas la valeur de ce terme. De sorte que ces équations supposent que l'on connaisse *a priori* la géométrie des lignes de champ. Les équations (29) et (30) contiennent l'information concernant le niveau de la densité d'énergie et de l'intensité mais pas la direction de cette dernière. Toutefois, dans un certain nombre de cas de géométries simples, le terme Γ peut être préjugé. C'est seulement dans ces cas que nous serons en mesure de résoudre (29) et (30). Cette situation se retrouve en mécanique des fluides avec l'équation de Bernoulli. Cette dernière formule le principe de conservation de l'énergie en une équation sur la densité d'énergie totale seule. Cependant l'équation de Bernoulli est essentiellement écrite le long d'une ligne de courant. Chaque fois que ces lignes sont connues (écoulement d'un réservoir, tuyauteries...) l'équation de Bernoulli apporte une solution au problème. Mais, sauf quelques rares cas comme celui des écoulements irrotationnels, l'équation de Bernoulli ne peut pas être généralisée en une équation sur tout le domaine de l'écoulement.

4.1 Ondes planes

On retrouve ici le cas des systèmes à une seule dimension. Les lignes de propagation de l'énergie sont des courbes parallèles. Le terme Γ est donc nul et les équations énergétiques (29) et (30) se réduisent simplement aux équations (12) et (13) du système à une dimension et un mode de propagation symétrique.

4.2 Ondes axisymétriques

Explicitons tout d'abord les équations de diffusion (2) et (3) dans le cas particulier d'un système axisymétrique de dimension deux :

$$I = \frac{-c_g^2}{\eta\omega} \frac{dW}{dr}, \quad \frac{d^2W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} - \frac{\eta^2\omega^2}{c_g^2} W = 0. \quad (31,32)$$

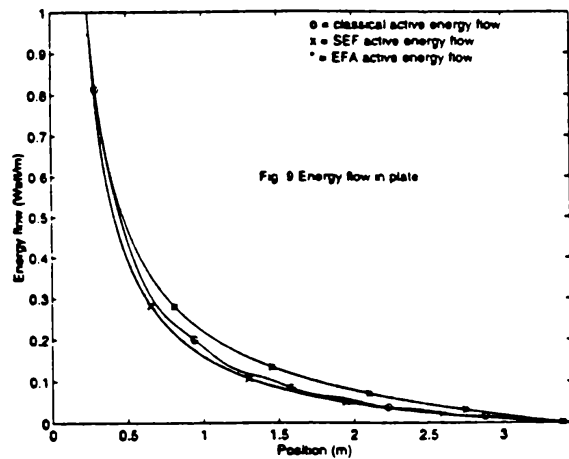
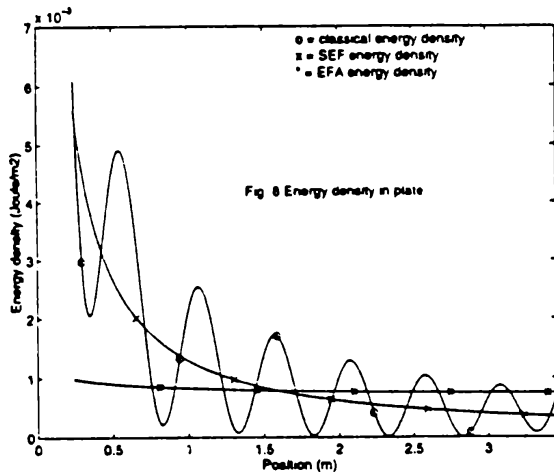
où r est la distance entre l'origine et le point courant.

Voyons maintenant ce que devient le système d'équations (29) et (30) dans les mêmes circonstances. Les lignes de champ sont des droites émanant toutes de l'origine. La divergence de \mathbf{u} est facile à calculer et le terme Γ vaut $1/r$. Les équations sont alors :

$$I = \frac{-c_g^2}{\eta\omega} \left(\frac{dW}{dr} + \frac{1}{r} W \right), \quad \frac{d^2W}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dW}{dr} - \frac{\eta^2\omega^2}{c_g^2} W = 0. \quad (33,34)$$

L'équation (34) diffère de l'équation (32) par la présence du coefficient 2 à la place de 1. Cette distinction trouve son origine dans la relation (33). Elle montre clairement que l'intensité active n'est pas proportionnelle à la densité d'énergie. Ainsi l'analogie avec la loi de Fourier est mise en défaut.

Illustrons maintenant notre propos par une simulation numérique. Il s'agit d'une plaque circulaire de rayon r_{\max} . Nous effectuons trois calculs. Le premier est un calcul classique. L'équation du mouvement est résolue avec une excitation au centre de la plaque en appui en r_{\max} . Puis la densité d'énergie et l'intensité active sont déduites de cette solution. Ce calcul sert de référence dans ce qui suit. Le second calcul est basé sur l'équation de la chaleur (32). Les conditions aux limites sont appliquées sur l'intensité supposée nulle en r_{\max} : $I(r_{\max}) = 0$ et supposée connue en r_{\min} : $I(r_{\min}) = I_{inj}$. Enfin le troisième calcul est basé sur les équations énergétiques (33) et (34). Les conditions aux limites sont les mêmes que pour l'équation de diffusion. Observons le résultat sur les figures 8 et 9. La densité d'énergie prédite par l'équation de diffusion est sous-estimée au voisinage de l'excitation et sur-estimée en champ lointain. La décroissance de cette solution est manifestement trop faible. En revanche, la densité d'énergie prédite par les équations énergétiques SEF donnent une représentation lissée de la solution classique.



Donnons maintenant des développements asymptotiques de ces trois solutions. Dans le cas d'une plaque infinie, une solution analytique de l'équation du mouvement en champ lointain est la fonction de Hankel d'ordre zéro de seconde espèce. Pour les grands arguments, la densité d'énergie qui en résulte est proportionnelle à $e^{-\frac{\eta\omega}{c_s}r} / r$. La décroissance est en $1/r$. Une solution analytique de l'équation de la chaleur (32) pour un système infini est la fonction de Bessel modifiée d'ordre zéro de seconde espèce $K_0\left(\frac{\eta\omega}{c_s}r\right)$ dont un développement asymptotique pour les grands arguments est proportionnel à $e^{-\frac{\eta\omega}{c_s}r} / \sqrt{r}$. La décroissance est en $1/\sqrt{r}$. Enfin, une solution analytique de l'équation énergétique (34) pour un système infini est $e^{-\frac{\eta\omega}{c_s}r} / r$. Elle redonne bien la décroissance souhaitée en $1/r$. C'est en cela que l'équation énergétique (34) représente une amélioration sur l'équation de diffusion (32).

4.3 Ondes sphériques

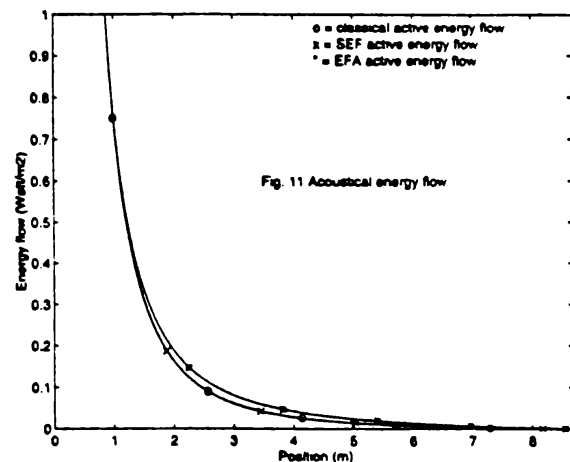
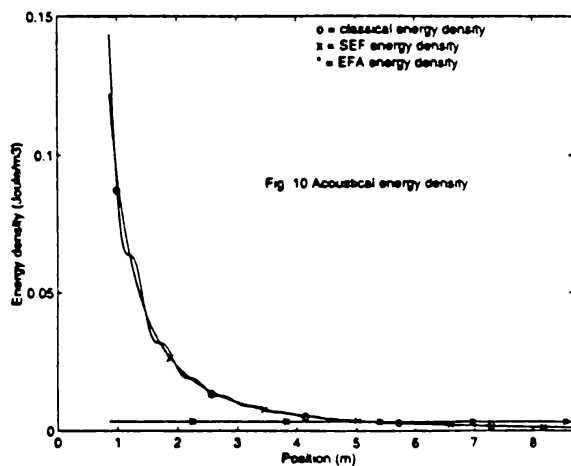
L'argumentation que nous venons d'exposer peut être reprise dans le cas des ondes sphériques de l'acoustique par exemple. Les équations de diffusion (2) et (3) prennent la forme particulière suivante :

$$I = \frac{-c_g^2}{\eta\omega} \frac{dW}{dr}, \quad \frac{d^2W}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dW}{dr} - \frac{\eta^2\omega^2}{c_g^2} W = 0. \quad (35,36)$$

Evaluons les équations énergétiques SEF (29) et (30). Le terme Γ a la valeur $2/r$:

$$I = \frac{-c_g^2}{\eta\omega} \left(\frac{dW}{dr} + \frac{2}{r} W \right), \quad \frac{d^2W}{dr^2} + \frac{4}{r} \frac{dW}{dr} + \left(\frac{2}{r^2} - \frac{\eta^2\omega^2}{c_g^2} \right) W = 0. \quad (37,38)$$

Il est clair que les deux dernières équations sont distinctes de l'équation de diffusion. En particulier, l'intensité n'est pas proportionnelle au gradient de la densité d'énergie. Les figures 10 et 11 comparent les résultats d'un calcul classique avec ceux des deux groupes d'équations ci-dessus. Les conclusions sont les mêmes que pour les plaques circulaires.



5 Conclusion

Dans cette étude, nous avons présenté une démonstration d'équations énergétiques modélisant le comportement vibratoire des systèmes dans le domaine des moyennes et hautes fréquences. Cette démonstration a été proposée par Nefske & Sung [2] dans le cas particulier de la dimension un à un mode de propagation symétrique. Cependant Nefske & Sung et d'autres auteurs suggèrent de généraliser les équations énergétiques aux systèmes à plusieurs dimensions spatiales en opérant une simple traduction des dérivées premières en gradients. On obtient alors une équation de diffusion analogue à celle des transferts thermiques avec convection. Cette équation repose sur l'hypothèse que l'intensité structurale active est proportionnelle au gradient de la densité d'énergie. Dans un article de Journal of Sound and Vibrations [7], Langley soulève une objection à l'encontre de cette équation. Il remarque que la décroissance de sa solution fondamentale est en contradiction avec celle prévue par les équations du mouvement.

L'approche propagative développée dans cette étude permet de cerner les limites de valider de l'analogie avec la loi de Fourier. Pour les systèmes à une dimension, l'étude des cas de propagation non symétrique ou à plusieurs modes de propagation généralise l'étude de Nefske & Sung. Pour les systèmes à plusieurs dimensions, la généralisation que nous proposons est basée sur des équations différentielles exprimée le long des lignes de champ du vecteur intensité active. Nous avons généralisé les équations énergétiques en un sens affaibli. Les équations obtenues peuvent prévoir le niveau de la densité d'énergie totale mais pas leur direction de propagation. Ainsi, la direction et la géométrie des lignes de champ doivent être supposées connues *a priori*. C'est une limitation importante. Pourtant, il est un cas de figure au moins où l'on connaît la direction et la forme des lignes de propagation de l'énergie : c'est celui d'un système infini. Nous montrons alors que l'équation énergétique obtenue est différente de l'équation de diffusion et qu'en particulier l'intensité active n'est pas proportionnelle au gradient de l'énergie. La décroissance de la solution de cette équation est en parfait accord avec celle prévue par les équations du mouvement : c'est l'explication que nous proposons du paradoxe de Langley.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier M. Luzzato (EDF-DER département AMV, Clamart) et M. Aquilina (CERDAN, Toulon) pour leur soutien.

Bibliographie

- [1] Le Bot A., Equations énergétiques en mécanique vibratoire. Application au domaine des moyennes et hautes fréquences, Thèse Ecole Centrale de Lyon, 1994.
- [2] Nefske D.J., Sung S.H., Power flow finite element analysis of dynamic systems: basic theory and application to beams, N.C.A. publication vol.3, 1987.
- [3] Lasé Y., Description des réponses structurales dans le domaine des moyennes fréquences à l'aide d'une formulation énergétique, Thèse Ecole Centrale de Lyon, 1990.
- [4] Bouthier O., Energetics of vibrating systems. M Sc Thesis, Purdue University, 1992.
- [5] Djimadoum M., Prévision des vibrations stationnaires et instationnaires aux moyennes fréquences : approche en énergie moyenne et approche par admittances impulsionnelles, Thèse INSA Lyon, 1993.
- [6] Wohlever J.C., Vibrational power flow analysis of rods and beams, M Sc Thesis, Purdue University, 1988.
- [7] Langley R.S., Analysis of beam and plate vibrations, Journal of Sound and Vibrations, vol.150 n°1, 1991.
- [8] M. P. Païdoussis & G. X. Li, Pipes conveying fluid: a model dynamical problem, Journal of Fluids and Structures vol.7, 1993