

## Simulation numérique du bruit de frottement lors du contact entre deux surfaces rugueuses

Viet Hung Dang<sup>1</sup>, Alain Le Bot

<sup>1</sup> Laboratoire de tribologie et Dynamique des Systèmes, CNRS, UMR 5513

École centrale de Lyon, 36 avenue Guy de Collongue, 69134 Écully Cedex, viet-hung.dang2@ec-lyon.fr

**RÉSUMÉ.** Le bruit généré lors du frottement de deux surfaces l'une contre l'autre révèle des régimes et des propriétés très étonnantes. Cependant les expérimentations, bien que fondamentales, ne donnent pas accès aux grandeurs mécaniques locales comme les chocs inter-aspérités, les déformations, et les pressions locales...Cet étude propose une approche numérique pour des modèles 1D basée sur la résolution des équations du mouvement par la technique de décomposition modale. Après calcul des forces de contact grâce à la méthode de pénalisation, on utilise différents schémas d'intégration temporelle pour résoudre les équations. Les résultats de calcul se présentent sous forme de figures qui nous aident à observer l'évolution des quantités locales en fonction du temps.

**MOT-CLÉS :** Bruit de frottement, contact dynamique, surface rugueuse, simulation numérique

### 1 Introduction

Lorsque deux objets sont frottés l'un contre l'autre, ils engendrent du bruit de frottement. Ces bruits se rencontrent très souvent dans la vie quotidienne comme : le brossage, le bruit entre les mains, le freinage de voiture, le crissement de porte. Du point de vue physique, on peut les classer en au moins deux grandes familles selon les pressions de contact : les bruits d'instabilités mécaniques de type stick-slip avec de grandes pressions et le bruit de rugosité avec de faibles pressions de contact.

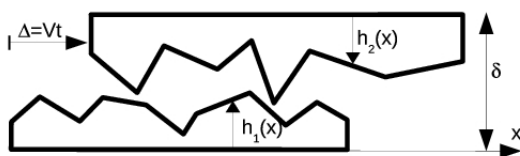


FIGURE 1 – Glissement de deux profils rugueux. Les altitudes  $h_i$  sont comptées de manière opposée. L'écart entre les deux profils est  $\delta$ . À l'instant  $t$ , le décalage horizontal est imposé  $\Delta = Vt$ .

Dans ce dernier cas, le mécanisme générateur du bruit est intimement lié à la rugosité des surfaces. Lors du frottement des solides, les surfaces rugueuses engendrent des impacts inter-aspérités qui provoquent des vibrations. Ces vibrations rayonnent ensuite du bruit dans l'environnement acoustique.

Jusqu'à présent, plusieurs expérimentations (Takahashi-1973, Yokoi et al-1982, Othman et al-1990, Jibiki et al-2001, Boyko et al-2005, Ben Abdelounis et al-2006...) ont été réalisées pour trouver les relations empiriques entre le niveau sonore et les paramètres macroscopiques que sont la vitesse de

glissement et la rugosité de la surface. Elles peuvent se résumer par la relation,

$$Lp(dB) = 20 \log_{10} Ra^n V^m + cste \quad (1)$$

Mais, ces mesures ne donnent pas d'estimation de la dynamique locale telle que la déformation des aspérités, les forces normales de contact ou le nombre de chocs.

Le problème canonique que nous cherchons à résoudre numériquement est donc constitué de deux profils rugueux en interaction plan-plan comme sur la figure 1. Le profil du haut se déplace horizontalement avec une vitesse constante  $V$ , alors que celui du bas est fixé aux deux extrémités. La forme des profils est tracée en fonction de l'altitude  $h_i(x)$  de l'ensemble des points sur la surface. L'écart initial entre les deux profils est  $\delta$ . Dans cet article, on présente donc une approche numérique utilisation de la technique de décomposition modale pour résoudre l'équation du mouvement, la méthode de pénalisation pour la gestion du contact, et différents schémas d'intégration temporelle. Les calculs sont effectués avec les hypothèses suivantes :

- Modèle 1D (deux poutres en contact),
- Les poutres vibrent en flexion transverse seulement, pas de déformation longitudinale,
- Modèle de poutre d'Euler-Bernoulli.
- La vitesse longitudinale et donc la position horizontale des points de la poutre supérieure est imposée,
- Le contact est régi par une loi de Hertz sans frottement.

### 2 Équation des poutres

L'équation du mouvement des poutres en flexion est,

$$D_i \Delta^2 u_i + m_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f(t, x), \quad (2)$$

où  $u_i$  est la déformée transverse de la poutre et  $f$  le champ de force de contact s'appliquant à la poutre.  $D_i = E_i I_i$  est la rigidité de la poutre,  $E_i$  module d'Young et  $I_i$  moment d'inertie,  $m_i$  est la masse linéique. Les conditions aux limites pour une poutre en appuis simples aux extrémités  $x = 0$  et  $x = L_i$ ,

$$u_i(0) = u_i''(0) = u_i(L_i) = u_i''(L_i) = 0. \quad (3)$$

Les modes  $\psi_i^k$  avec  $k = 0, 1, \dots$  de la poutre  $i$  sont définis de sorte que,

$$\int_0^{L_i} \psi_i^k(x) \psi_i^l(x) dx = \delta^{kl} \quad (4)$$

$$D_i \Delta^2 \psi_i^k = m_i (\omega_i^k)^2 \psi_i^k \quad (5)$$

avec

$$\psi_i^k(x) = \sqrt{\frac{2}{L_i}} \sin(k+1) \frac{\pi x}{L_i} \quad (6)$$

$$\omega_i^k = \sqrt{\frac{D_i}{m_i}} \left( \frac{(k+1)\pi}{L_i} \right)^2 \quad (7)$$

À chaque instant  $t$ , on peut développer la déformée  $u_i$  dans la base modale,

$$u_i(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} U_i^k(t) \psi_i^k(x) \quad (8)$$

Il s'agit de trouver et résoudre les équations sur les amplitudes modales  $U_i^k$ . Projétons l'équation du mouvement dans la base modale,

$$\sum_{k=0}^{\infty} U_i^k(t) D_i \Delta^2 \psi_i^k(x) + m_i \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{U}_i^k(t) \psi_i^k(x) = f(t, x) \quad (9)$$

En intégrant deux membres et en utilisant la propriété d'orthogonalité des modes propres, on obtient

$$m_i \left[ \ddot{U}_i^k + (\omega_i^k)^2 U_i^k \right] = F_i^k(t) \quad (10)$$

avec  $F_i^k$  la force modale définie par

$$F_i^k(t) = \int_0^{L_i} f(t, x) \psi_i^k(x) dx \quad (11)$$

Dans le cas d'une structure amortie, l'équation du mouvement dans la base modale devient

$$m_i \left[ \ddot{U}_i^k + 2\zeta_i^k \omega_i^k \dot{U}_i^k + (\omega_i^k)^2 U_i^k \right] = F_i^k(t) \quad (12)$$

Introduisons les variables auxiliaires  $V_i^k = \dot{U}_i^k$  et  $A_i^k = \ddot{U}_i^k$ . Nous pouvons maintenant écrire l'équation du mouvement sous la forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre.

$$\begin{bmatrix} V_i^k \\ A_i^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\omega_i^k)^2 & -2\omega_i^k \zeta_i^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i^k \\ V_i^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_i^k \end{bmatrix} \quad (13)$$

En posant  $y = \begin{bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{bmatrix}$  ces équations se retrouvent la forme générale du problème de Cauchy :

$$\dot{y} = g(y) ; y(0) = 0 \quad (14)$$

Afin de résoudre cet équation différentielle, on discrétise en temps et en espace. Le pas de temps est  $\tau$  et le vecteur temps est  $t^m = m\tau$ . Le pas de distance est  $\chi$  et le vecteur position est  $x_i^n = n\chi_i$ . Les déformées, force et distance deviennent  $u_i^{m,n} = u_i(t_m, x_n)$ ,  $f^{m,n} = f(t_m, x_n)$  et  $e^{m,n} = e(t_m, x_n)$ . Les quantités modales deviennent  $U_i^{m,k} = U_i^k(t_m)$  et  $\psi_i^{k,n} = \psi_i^k(x_n)$ . Enfin, les profils sont  $h_i^n = h_i(x^n)$ .

### 3 Gestion du contact - Méthode de pénalisation

Cette méthode autorise une légère pénétration du noeud dans le corps solide antagoniste lorsqu'il y contact. La pénétration vaut :

$$e(t, x) = H[h_1(x) + u_1(t, x) + h_2(x - \Delta) + u_2(t, x - \Delta) - \delta] \quad (15)$$

où  $H(x) = 0$  si  $x < 0$  et  $H(x) = x$  si  $x > 0$ . Le contact se produit quand la pénétration est supérieure à zéro. La force d'interaction est choisie suivant la loi de Hertz,

$$f(t, x) = -\frac{4}{3} \sqrt{RE^*} e(t, x)^{3/2} \quad (16)$$

Puisqu'il n'apparaît pas d'inconnue supplémentaire dans le calcul des forces de contact, cette méthode est donc facile à mettre en oeuvre. Cependant, elle présente l'inconvénient que la pénétration des solides en contact pourtant non physique, est autorisée.

## 4 Intégration temporelle

### 4.1 Méthode d'Euler explicite

La méthode d'Euler provient de l'approximation de l'intégrale  $\int_{t^m}^{t^{m+1}} g(y) dt \approx \tau g(y^m)$  qui donne le schéma,

$$y^{m+1} = y^m + \tau g(y^m) \quad (17)$$

Appliquer cet algorithme au système des équations du mouvement, on obtient :

$$U_i^{m+1,k} = U_i^{m,k} + \tau V_i^{m,k} \quad (18)$$

$$V_i^{m+1,k} = V_i^{m,k} + \tau A_i^{m,k} \quad (19)$$

### 4.2 Méthode d'Euler explicite modifié

La méthode d'Euler explicite modifié s'obtient en modifiant la formule (19) du déplacement, comme suit,

$$V_i^{m+1,k} = V_i^{m,k} + \tau A_i^{m,k} \quad (20)$$

$$U_i^{m+1,k} = U_i^{m,k} + \tau V_i^{m+1,k} \quad (21)$$

Il faut bien entendu calculer  $V_i^{m+1,k}$  par l'équation (20) avant d'appliquer l'équation (21).

### 4.3 Méthode de Heun ou méthode de Runge Kutta d'ordre 2

Cette méthode provient de l'approximation de l'intégrale par la formule du trapèze

$$\int_{t^m}^{t^{m+1}} g(y)dt = \frac{\tau}{2} [g(y^m) + g(y^{m+1})] \quad (22)$$

En utilisant la méthode d'Euler pour calculer  $y^{m+1} = y^m + \tau g(y^m)$ , on obtient la méthode de Heun :

$$y^{m+1} = y^m + \frac{\tau}{2} [g(y^m) + g(y^m + \tau g(y^m))] \quad (23)$$

#### 4.4 Méthode de Runge Kutta d'ordre 4

Cette méthode provient de l'approximation de l'intégrale  $\int_{t^m}^{t^{m+1}} g(y)dt$  en calculant  $g(y)$  quatre fois par pas du temps.

$$\int_{t^m}^{t^{m+1}} g(y)dt = \frac{\tau}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \quad (24)$$

$$k_1 = g(y^m) \quad (25)$$

$$k_2 = g(y^m + \frac{\tau}{2}k_1) \quad (26)$$

$$k_3 = g(y^m + \frac{\tau}{2}k_2) \quad (27)$$

$$k_4 = g(y^m + \tau k_3) \quad (28)$$

$$y^{m+1} = y^m + \frac{\tau}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \quad (29)$$

#### 4.5 Méthode de Runge Kutta d'ordre 8 - RK8

Cette méthode consiste en huit itérations successives pour évaluer  $g(t,y)$  par pas de temps. Les formules de la méthode RK8 se présentent comme suit :

$$\int_{t^m}^{t^{m+1}} g(y)dt = \frac{\tau}{840} [41(k_1 + k_8) + 216(k_3 + k_7) + 27(k_4 + k_6) + 272k_5] \quad (30)$$

$$y^{m+1} = y^m + \frac{\tau}{840} [41(k_1 + k_8) + 216(k_3 + k_7) + 27(k_4 + k_6) + 272k_5] \quad (31)$$

#### 4.6 Méthode des différences centrées - méthode à pas multiples

Le schéma aux différences centrées exprime les vitesses et les accélérations à l'instant  $m$  en fonction des déplacements aux instants  $m-1$ ,  $m$ ,  $m+1$  :

$$\dot{U}_i^{m,k} = \frac{U_i^{m+1,k} - U_i^{m-1,k}}{2\tau} \quad (32)$$

$$\ddot{U}_i^{m,k} = \frac{U_i^{m+1,k} - 2U_i^{m,k} + U_i^{m-1,k}}{\tau^2} \quad (33)$$

En remplaçant les vitesses et les accélérations par leurs expressions, l'équation d'évolution du champ vibratoire s'écrit

$$U_i^{m+1,k} \left[ \frac{1}{\tau^2} + \frac{\zeta_i^k \omega_i^k}{\tau} \right] = U_i^{m,k} \left[ \frac{2}{\tau^2} - (\omega_i^k)^2 \right] + U_i^{m-1,k} \left[ -\frac{1}{\tau^2} + \frac{\zeta_i^k \omega_i^k}{\tau} \right] + \frac{F_i^{m,k}}{m_i} \quad (34)$$

L'inconvénient de la méthode de différences centrées et les méthodes à pas multiples est la nécessité de gérer à chaque pas de temps à la fois  $U^{m-1}$ ,  $U^m$ ,  $U^{m+1}$  et donc il requiert plus de mémoire.

#### 4.7 Evaluation des schémas

L'évaluation d'un schéma est basée sur 3 critères : la consistance, la stabilité et la convergence.

Le schéma est consistant si la somme de l'erreur locale tend vers 0 lorsque le pas de temps devient petit. Le schéma est stable si on peut contrôler la propagation des erreurs d'arrondi au fil des calculs. Dès que le schéma satisfait à la consistance et à la stabilité, on dit qu'il est convergent c'est-à-dire que l'erreur globale tend vers 0 lorsque le pas devient petit.

Dans cet article on effectue les calculs avec la méthode de RK2 comme exemple de démonstration. La formule de la méthode de RK2 :

$$y^{m+1} = y^m + \frac{\tau}{2} [g(y^m) + g(y^m + \tau g(y^m))] \quad (35)$$

Calculer l'erreur de troncature en utilisant la formule de Taylor-Lagrange :

$$e^m = y(t^{m+1}) - y^{m+1}$$

$$y(t^{m+1}) = y(t^m) + \tau y'(t^m) + \frac{\tau^2}{2} y''(t^m) + \frac{\tau^3}{6} y^{(3)}(t^m) + o(\tau^3) \quad (36)$$

$$y^{m+1} = y(t^m) + \frac{\tau}{2} [y'(t^m) + (y(t^m) + \tau y'(t^m))']$$

$$e^m = \frac{1}{6} \tau^3 y^{(3)}(t^m) + o(\tau^3) = o(\tau^2) \quad (37)$$

Pour la stabilité, on effectue le calcul d'une manière approximative avec un système sans force extérieure ni amortissement.

$$\begin{bmatrix} V_i^k \\ A_i^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\omega_i^k)^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i^k \\ V_i^k \end{bmatrix} \quad (38)$$

En appliquant les formules de la méthode RK2,

$$\begin{bmatrix} U_i^{m+1,k} \\ V_i^{m+1,k} \end{bmatrix} = [\alpha] \begin{bmatrix} U_i^{m,k} \\ V_i^{m,k} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{(\tau \omega_i^k)^2}{2} & \tau \\ -\tau (\omega_i^k)^2 + \frac{\tau^3 (\omega_i^k)^4}{2} & 1 - \frac{(\tau \omega_i^k)^2}{2} \end{bmatrix} \quad (40)$$

Les valeurs propres de ce schéma sont

$$\lambda = 1 - \frac{(\tau \omega_i^k)^2}{2} \pm i \sqrt{(\tau \omega_i^k)^2 - \frac{(\tau \omega_i^k)^4}{2}} \quad (41)$$

Le schéma est consistant si  $|\lambda| < 1 \Rightarrow (\tau \omega_i^k)^2 - \frac{(\tau \omega_i^k)^4}{2} > 0$  c'est à dire  $\tau < \frac{\sqrt{2}}{\omega_i^k}$ .

### 5 Résultat

#### 5.1 Poutres simulées

Les profils sont générés numériquement. Leur propriétés topographiques sont présentées dans le tableau 1. Les poutres sont en acier avec un module d'Young  $E = 210$  GPa et une masse volumique  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>. Elles ont pour longueur  $L = 100$ mm, épaisseur  $b = 4$ mm. Le taux d'amortissement modal est  $\gamma = 0,01$ . Les données nécessaires pour la simulation : pas de

Méthode	Pas du temps	Erreur locale	Propriété
Diff. centrée	$\tau < \frac{2}{\omega_i^k}$		Explicite pas multiple
Euler ex.	instable	$o(\tau)$	Explicite un pas
Euler ex. modifiée	$\tau < \frac{2}{\omega_i^k}$	$o(\tau)$	Explicite un pas
RK2-Heun	$\tau < \frac{\sqrt{2}}{\omega_i^k}$	$o(\tau^2)$	Explicite un pas
RK4		$o(\tau^4)$	Explicite un pas
RK8		$o(\tau^5)$	Explicite un pas

TABLE 1 – Schéma d'intégration temporelle

temps  $\tau = 10^{-8}s$ , pas spatial  $\chi = 0,05mm$ , vitesse de glissement  $V = 30mm/s$ , rayon d'asperite pour la loi de Hertz  $R = 0,005mm$ , écart entre les deux profils  $\delta = 0,018mm$ , durée de simulation  $T = 0,1s$ . Les valeurs des fréquences propres sont présentées dans le tableau 2.

Profil	Rq	Rsk	Rku	RSm
Top	3,2	0,15	3,4	1400
bottom	3,2	0,02	3,6	1500

TABLE 2 – Propriétés topographiques

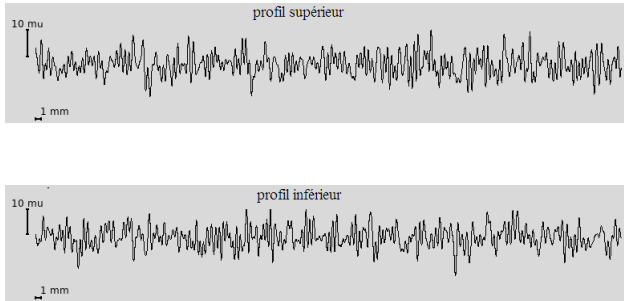


FIGURE 2 – Les profils simulés

Mode	1	2	3
f(Hz)	941,13	3764,54	8470,21

Mode	4	5	6
f(Hz)	15058,15	23528,36	33880,83

TABLE 3 – Fréquences propres des profils

## 5.2 Résultats de calcul

En vue de tester les schémas d'intégration temporelle, on considère un système simplifié sans amortissement ni force de contact. L'énergie totale de ce système est donc indépendante du temps :

$$\Pi^{total} = \Pi^d + \Pi^c = cte \quad (42)$$

L'énergie cinétique :

$$\Pi^c = \int_0^L \frac{m}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx = \int_0^L \frac{m}{2} \left( \sum_{k=0}^{\infty} V^k \psi^k \right)^2 dx \quad (43)$$

L'énergie de déformation :

$$\Pi^d = \int_0^L \frac{EI}{2} (\Delta u)^2 dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m}{2} (\omega^k)^2 \int_0^L (U^k \psi^k)^2 dx \quad (44)$$

La figure 3 présente l'évolution de l'énergie du système en fonction du temps selon les différents schémas d'intégration temporelle et la figure 4 compare les temps CPU. En observant ces deux figures, on trouve que :

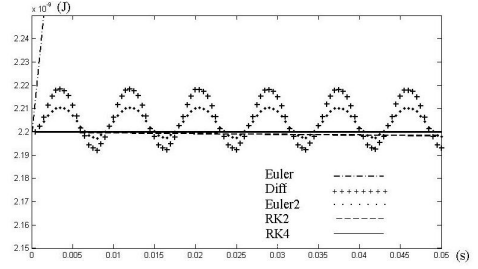


FIGURE 3 – Énergie totale d'un système simplifié sans force ni amortissement avec  $\tau = 10^{-6}s$  durée 0,05s

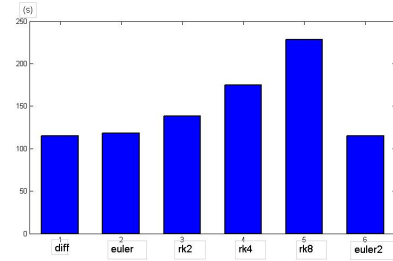


FIGURE 4 – Temps de CPU des schémas d'intégration avec  $\tau = 10^{-6}s$  durée 0,05s

- Les schémas Euler, Euler modifié et différences centrées prennent le même temps de calcul mais le Euler modifié est le plus exact.
- Les schémas rk2, rk4, rk8 sont plus stables et plus exacts que Euler modifié, mais le schéma RK2 est le plus rapide.

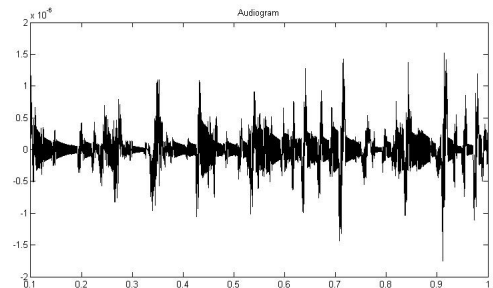


FIGURE 5 – La réponse vibratoire (vitesse) au centre de la poutre avec pas de temps  $\Delta t = 10^{-7}s$

Un exemple de calcul dynamique avec contact est montré dans la figure 5. Il s'agit de la réponse tempo-

relle (vitesse vibratoire) du profil supérieur en son point milieu. On peut observer la succession des impacts suivis de la réponse impulsionnelle de la poutre.

## 6 Conclusion

Le système modèle étudié ici permet de calculer précisément la dynamique locale de deux surfaces rugueuse en glissement relatif. L'équation du mouvement est résolue numériquement grâce à la technique de décomposition modale et la double discrétisation en temps et en espace. Plusieurs schémas d'intégration temporelle ont été programmés et comparés. Ceux de Euler modifié et Runge Kutta 2 sont les plus optimaux. Quant-à la gestion du contact, la force d'interaction est calculée suivant la loi de Hertz en acceptant une légère pénalisation. Le code obtenu, limité au cas plan, est plus rapide que la méthode des éléments finis standard. Il permet d'avoir accès aux efforts locaux et à la statistique des impacts inter-aspérités.

## Remerciements

On remercie vivement à M. J. Perret-Liaudet pour ses conseils précieux.

## Références

- [1] Alain Le Bot and E. Bou Chakra. "Measurement of friction noise versus contact area of rough surfaces weakly loaded", Tribology Letters, available on line, 2009 .
- [2] H. Ben Abdelounis, A. Le Bot, J. Perret-Liaudet, H. Zahouani. "An experimental study on roughness noise of dry rough flat surfaces," Wear, available on line, 2009.
- [3] J. Philippe Grivet "Méthodes numériques appliquées pour le scientifique et l'ingénieur", 2009.
- [4] H. Ben Abdelounis "Dynamique et vibroacoustique du contact rugueux : expérimentation et modélisation ", Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2010.
- [5] Laurent BAILLET, "Du mécanisme au contact - Modélisation par éléments finis". Frottement et usure : la tribologie. Synthèse et applications, Journées Francophones de Tribologie, 2002, Senlis, pp.2-26.
- [6] Boyko L. Stoimenov, S. Maruyama, K. Adashi, K. Kato, "The roughness effect on the frequency of frictional sound, Tribology International 40 (2007) 659-664.